Actas

VI Congreso Iberoamericano sobre

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

8, 9 y 10 de Noviembre 2023

Editores: Rosa Delgado-Rebolledo y Diana Zakaryan

Valparaíso-Chile-2023

PRESIDENTA DEL COMITÉ ORGANIZADOR
Dra. Diana ZAKARYAN, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

COMITÉ ORGANIZADOR INTERNACIONAL
Dra. Jenny ACEVEDO, Universidad Industrial de Santander, Colombia
Dr. Christian ALFARO, Universidad Nacional, Costa Rica
Dra. Nuria CLIMENT, Universidad de Huelva, España
Dr. Jeferson MORIEL, Instituto Federal Mato Grosso, Brasil
Dra. Nielka ROJAS, Universidad Católica del Norte, Chile
Dra. Ivonne SANDOVAL, Universidad Pedagógica Nacional, México

COMITÉ ORGANIZADOR LOCAL
Mg. Cristian BUSTOS, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
Dra. Carolina GUERRERO, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
Mg. Ledher LÓPEZ, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
Dra. Elisabeth RAMOS, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
Mg. Patricia VÁSQUEZ, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

PRESIDENTA DEL COMITÉ CIENTÍFICO
Dra. Rosa DELGADO-REBOLLEDO, Universidad de Concepción, Chile

COMITÉ CIENTÍFICO
Dra. Edvonete ALENCAR, Universidade Federal da Grande Dourados, Brasil
Dra. Emma CARREÑO, Universidad de Piura, Perú
Dra. Dinazar ESCUDERO, Universidad Complutense de Madrid, España
Dr. Eric FLORES, Universidad Complutense de Madrid, España
Dra. Isabel PASCUAL, Universidad de Huelva, España
Dr. Francisco ROJAS, Universidad Autónoma de Barcelona, España

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

6ª edición del CIMTSK
De 8 a 10 de noviembre de 2023

Actas VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

Av. Brásil 2950, Valparaíso, Chile

ISBN (pdf): 978-956-8388-26-3
Primera edición en formato ebook:
Diciembre 2023

Rosa Delgado-Rebolledo (Ed.)
Diana Zakaryan (Ed.)

Obra sometida al proceso de evaluación de calidad editorial
por el sistema de revisión por pares.
Materia: 370 – Educación

Diseño y maquetación: Andrea Díaz Schiappacasse

INDICE

Editorial 8

Conferencias Plenarias

Construcción de conocimiento especializado en la formación de profesorado
Nuria Climent Rodríguez, Universidad de Huelva, España 9

Strengthening the role of practice in mathematics teacher education: opportunities for university mathematics courses
Nick Wasserman, Universidad de Columbia, Estados Unidos 20

Talleres

Conexiones en el conocimiento especializado del profesor Sofía Caviedes, Universidad de Los Lagos, Chile
Gonzalo Espinoza, Universidad Alberto Hurtado, Chile 31

Tarefas para a formação e pesquisa especializada para uma formação especializante
Miguel Ribeiro, Universidade Estadual de Campinas, Brasil
Caroline Silva, Universidade Estadual de Campinas, Brasil 35

Comunicaciones y posters

Temática: 1 – MTSK en la formación docente

(Des)haciendo matemática. La colaboración al servicio del desarrollo del conocimiento matemático para enseñar
Gabriel Rubén Soto, Anahí Luciana Díaz, Eliana Gómez, Cintia Mariana Negrette, Laura Carrasco, Laura Espinoza, Gabriela Rodríguez 39

Diseño de tareas formativas para desarrollar la competencia mirada profesional
Modemar Campos Cano, Eric Flores Medrano 47

Aplicación del modelo MTSK en el diseño de secuencias didácticas con problemas de modelización matemática
Ronny Gamboa Araya, Jesennia Chavarría Vásquez. 55

Aproximação do conhecimento especializado do professor de educação infantil para ensinar o pensamento algébrico – classificação
Edvonete Souza de Alencar, María de la Cinta Muñoz Catalán, María del Mar Liñan García 63

Conocimiento especializado movilizado durante una tarea formativa sobre un problema de generalización
Ángeles Chico Gómez, Antonio Sánchez Cerrejón, Nuria Climent Rodríguez, Luis Carlos Contreras González ... 71

Decisiones didácticas en estadística ¿de qué manera influye el MTSK para su concreción?
Eugenio Lizarde Flores, Ana María Reyes Camacho, Francisco Javier Hernández Gutiérrez, José Luis Monreal Reyes, Selso Loera Serrano, Erik Ayala del Villar, Cindy Gabriela Alonso Segovia ... 79

Un modelo para observar la práctica educativa del profesor de matemática
Elisabeth Ramos Rodríguez, Claudia Vásquez Ortiz, Macarena Valenzuela, Felipe Ruz Ángel ... 87

El MTSK en el diseño curricular básico nacional de educación secundaria de la especialidad de matemática
Gina Patricia Paz Huamán, Candy Clara Ordoñez Montañez ... 95

Formación de profesores de educación básica primaria: tareas formativas para el desarrollo del pensamiento espacial y métrico
Jenny Patricia Acevedo Rincón, Campo Elías Flórez Pabón ... 103

Diseño y análisis de una tarea sobre inferencia estadística informal en formación inicial docente
Mª Isabel Pascual, Laura Rifo, Lorenzo Castilla, Nuria Climent Rodríguez ... 111

Propuesta para la elaboración de una licenciatura en educación matemática basada en el modelo MTSK
Hugo Parra-Sandoval, Berny Salas-Solano ... 119

Reflexión sobre el conocimiento especializado de un profesor de secundaria al diseñar clases de cuadriláteros
Elizabeth Advíncula Clemente, Isabel Torres Céspedes, Homero Flores Samaniego, Emma Carreño Peña ... 128

Tensiones de un grupo de futuros profesores de matemáticas en la discusión de una tarea: creencia sobre números periódicos
Jeannette Galleguillos Bustamante, Miguel Ribeiro ... 136

Transformación de conocimiento mediante un ciclo reflexivo alact, el caso de un profesor chileno.
Juan Pablo González Arriagada, Raimundo Ángel Olfos Ayarza, Nicolás Andrés Sánchez Acevedo, Miguel Ángel Montes Navarro ... 144

Transformación del conocimiento de los temas (KOT) de profesores sobre límite de sucesiones
Cristián Bustos Tiemann, Elisabeth Ramos Rodríguez, Macarena Valenzuela Molina ... 153

La construcción de una mirada didáctica a los problemas profesionales de enseñar geometría en la escuela secundaria
José Villella, Victoria Güerci, Rosa Ferragina, Gema Fioriti, Leonardo Lupinacci, Alejandra Almirón, Fernando Bifano 162

Análise dos números racionais expressos como objeto de estudo no livro didático
Éverton Ferraz Marcelino Batista, Paulo Cesar Oliveira, Miguel Ribeiro 170

Conocimiento especializado del futuro profesor que enseña el espacio proyectivo en el entorno rural
María Fernanda Mejía Barajas 178

Exploración del conocimiento didáctico del contenido de ecuaciones lineales de una profesora en formación
María Isabel Gazmuri Sanhueza, Leticia Muñoz Quezada 180

Temática: 2 – MTSK del formador de profesores

La “doble mirada” del formador de profesores de matemáticas como característica identificativa de su conocimiento
Macarena Reyes Bravo, María Isabel Pascual, Soledad Estrella, Sara Tarisfeño, Luis Carlos Contreras 182

Conhecimento pedagógico do conteúdo da formação: o caso do formador de professores de matemática que é investigador da docência
Flávia Cristina Figueiredo Coura, Cármen Lúcia Brancaglion Passos 190

Conocimiento del formador de profesores de matemáticas sobre la construcción de la identidad docente: el caso de la validación
Alejandra Avalos-Rogel, Marleny Hernández Escobar, Álvaro Sebastián Bustos Rubilar 198

Formadores de profesores de matemática y la práctica profesional del *noticing*
Ledher López Urquia, Macarena Bravo Reyes 206

El conocimiento matemático en la formación de profesores de educación especial: la perspectiva de los formadores
Juan Luis Piñeiro, Juan Pablo Calle 214

Temática: 3 – MTSK en diferentes temas y etapas

Análisis del conocimiento especializado de un profesor de matemáticas al enseñar el concepto de variable
Ana María Escudero Domínguez, Adriana María Yepes Montoya 222

Conhecimento especializado docente sobre funções: análise das relações entre KOT e KMT
Helio Cinquini Vianna Júnior, Jeferson Gomes Moriel Junior 230

Conhecimentos especializados para o desenvolvimento do pensamento algébrico em articulação com outros modos de pensar
Gustavo Gomes Senhora, Gabriel Loureiro de Lima, Barbara Lutaif Bianchini 238

Conocimiento del profesor de algebra lineal sobre procedimientos matriciales en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales
María del Carmen Regolini, Nuria Climent Rodríguez 246

Relaciones entre el conocimiento especializado del profesor y la práctica pedagógica: una revisión sistemática
Tifanni Julieth Sarmiento Afanador 254

Temática: 4 –Desarrollo del MTSK

Posibles relaciones entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas con la ejemplificación
Nicolás Sánchez Acevedo, Leticia Sosa Guerrero, Luís Carlos Contreras 256

Relaciones en el MTSK de una futura profesora de matemáticas al reflexionar sobre sus prácticas de enseñanza
Matías Almonacid Venegas, Fernanda Avilés Cano, Rosa Delgado Rebolledo 264

Temática: 5 –Extensiones del MTSK

¿Cómo atienden futuras profesoras al pensamiento algebraico de niñas? Conexiones entre noticing y MTSK
Eder Pinto, Camila Cortés, María Victoria Martínez, Juan Luis Piñeiro 272

Comprensión de la práctica del profesor de matemáticas: avances en la relación entre su conocimiento especializado y el trabajo matemático
Gonzalo Espinoza-Vásquez, Carolina Henríquez-Rivas, Paula Verdugo-Hernández 280

Conocimiento especializado del profesor de electricidad
Leonardo Vidal Araya, Fabián Quiroga Merino 288

El modelo STSK: extensión del modelo MTSK a la estadística Pedro Vidal-Szabó, Soledad Estrella 296

Estructuras mentales que predice un profesor que mostrarán sus estudiantes ante actividades del límite de una función
Dayana De Los Reyes Charris, Lidia Hernández Rebollar, Eric Flores Medrano 304

El MTSK como modelo para desarrollar el noticing en futuros profesores de matemáticas
Ledher López Urquía, Diana Zakaryan, Carolina Guerrero Ortiz 312

Relações teóricas entre o mathematics teacher's specialised knowledge e o conhecimento interpretativo
Caroline Almeida Souza Silva, Miguel Ribeiro 320

Una aproximación a las conexiones entre el MTSK y las prácticas matemáticas pedagógicas
Rosa Delgado Rebolledo, Diana Zakaryan, Nick Wasserman 328

O eixo articulador processos matemáticos no ciclo de alfabetização da cidade de são paulo: conhecimentos especializados requeridos dos professores
Renata Mendes Soares, Barbara Lutaif Bianchini, Gabriel Loureiro de Lima 336

Conhecimento específico do professor de matemática em tecnologias digitais
Renata Gomes de Oliveira Martins, Márcio Eugem K. L. dos Santos 344

Foro "Equipo de Chile- Red MTSK": subredes de colaboración, innovación e investigación
Elisabeth Ramos Rodríguez, Ledher López Urquía 346

Mesa de cierre: Avances y oportunidades de investigación con el MTSK
Rosa Delgado-Rebolledo, Macarena Reyes-Bravo, Renato Douglas, Edvonete Alencar 351

EDITORIAL

Esta obra reúne las contribuciones presentadas en el Sexto Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (VI CIMTSK), realizado de manera presencial del 8 al 10 de noviembre de 2023 en Valparaíso, Chile, que fue organizado por la Red Iberoamericana MTSK (AUIP) y el Equipo de Chile de la Red, representado por el Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV).

El congreso, como en sus versiones anteriores, ha convocado tanto a los investigadores de diversas partes del mundo que participan de la comunidad científica conformada en la RED MTSK como a todos los investigadores interesados en impulsar el diálogo entre el MTSK y otras teorías o perspectivas de la Educación Matemática, además de promover la participación y el trabajo colaborativo de jóvenes investigadores.

La sexta convocatoria contó con participantes de Argentina, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, España, Estados Unidos, México y Perú, en calidad de asistentes y ponentes de distintas contribuciones. En esta oportunidad, en el congreso se presentaron dos **conferencias plenarias**, dos **talleres** y 41 contribuciones (37 **comunicaciones** y 4 **posters**) las que se organizaron en torno a las cinco temáticas de estudio de la Red MTSK:

1. Aplicación de MTSK en la formación de profesores
2. Investigaciones sobre el formador de profesores de matemáticas
3. MTSK en distintos temas y etapas
4. Desarrollo del MTSK
5. Extensiones del MTSK

Asimismo, en el congreso se realizó el **Foro del Equipo de Chile**, el anfitrión del evento, en el cual los integrantes del mismo presentaron sus redes de colaboración dentro de la RED MTSK y los aportes de sus investigaciones a las respectivas temáticas.

Finalmente, el congreso culminó con una **Mesa de cierre**, conformada por representantes de las cinco temáticas, quienes resumieron los avances y reflexionaron sobre los desafíos en cada una de estas.

Los invitamos a conocer y compartir los trabajos presentados en esta acta, contribuyendo al desarrollo y divulgación de las investigaciones en torno del MTSK y animamos a participar en la séptima versión del Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas a realizarse en 2025, en la ciudad de Puebla de México.

Editores
Rosa Delgado-Rebolledo
Diana Zakaryan

CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO

Building Specialised Knowledge in Teacher Education

Climent, N.
Universidad de Huelva, España

Resumen.
El presente trabajo busca indagar sobre cómo se está aplicando del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) en el diseño de tareas para la formación de profesorado. A partir de una búsqueda sistemática de publicaciones, se analizan la caracterización de estas tareas, su foco, objetivo y estructura, el papel que juega el modelo MTSK, y cómo se investiga sobre el proceso. Los resultados muestran características comunes en muchas de estas tareas, diferencias en los objetivos y estructura por grupos de investigadores implicados, y posibles relaciones entre la estructura y los subdominios del modelo MTSK en que pretenden incidir. Además, hay mucha mayor abundancia en el diseño de tareas para la formación inicial que para la continua y para el profesorado de Educación Primaria frente al de otros niveles. Estos resultados permiten vislumbrar una panorámica de las investigaciones realizadas en esta línea y algunas vías de avance.

Palabras clave. Tareas, Formación del profesorado, MTSK, Revisión sistemática.

Abstract.
This paper aims to explore how the MTSK model is being applied in the design of tasks for teacher education. Based on a systematic review, it analyses the characterisation of these tasks, their focus, objective and structure, the role played by the MTSK model, and how the research process is developed. The results show common features in many of these tasks, differences in the goals and structure by groups of researchers involved, and possible relationships between the structure and the subdomains of the MTSK model they aim to influence. Moreover, there is a much greater abundance of task design for pre-service than for in-service teacher education and for primary school teachers compared to teachers at other levels. These results provide an overview of the research carried out in this area and some ways in which it can be taken forward.

Keywords. Tasks, Teacher Education, MTSK, Systematic Review.

Climent, N. (2023). Construcción de conocimiento especializado en la formación de profesorado. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 9–19). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

La mejora de la enseñanza de las matemáticas a través de la formación del profesorado ha sido el motor de las investigaciones que dieron origen al modelo MTSK (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*, Carrillo et al., 2018). Si bien el modelo MTSK se considera en continuo refinamiento y profundización, tras una etapa donde el foco se situaba principalmente en su construcción, ha seguido un mayor énfasis en su aplicación (Carrillo et al., 2022). Su aplicación más natural se sitúa en la formación (inicial y continua) del profesorado que enseña matemáticas.

En relación con la aplicación del modelo MTSK a la formación del profesorado, en Montes y Climent (2022) identificamos dos líneas de investigación futuras: el desarrollo de tareas y dinámicas formativas de aplicación local, y el estudio de su escalado y diseminación. En Carrillo (2017) ya se planteaba, como línea de avance en el trabajo con el modelo, desarrollar tareas de formación inicial y continua de profesores de distintos niveles, teniendo en cuenta, además, las distintas tareas profesionales que desempeña un profesor de matemáticas.

En estos momentos se han desarrollado trabajos que exploran tanto la estructuración de programas de formación como el diseño de tareas formativas usando el modelo MTSK (Montes, Carrillo et al., 2019; Parra-Sandoval y Salas-Solano, 2023). A la estructuración de programas le antecedieron estudios sobre el análisis de programas formativos a la luz del modelo MTSK, como un primer paso en su aplicación (Lizarde y Caldatto, 2022; Nolla et al., 2021).

Este trabajo se centrará en una revisión sobre el diseño de tareas para la formación del profesorado con el modelo MTSK. Para ello, a través del análisis de publicaciones al respecto, se intentará dar respuesta a en qué medida cubren diferentes temáticas y niveles, cuáles son sus características, cuál es el papel del modelo y cómo se ha investigado sobre dicho proceso.

Aplicaciones del MTSK al diseño de tareas para la formación de profesorado

Para identificar publicaciones que muestran los resultados sobre el diseño de tareas para la formación de profesorado usando el modelo MTSK, se ha realizado una búsqueda en Google Scholar con los términos "MTSK" y una de las siguientes combinaciones: "tarea formativa", "tarea" y "formación", o "task" y "teacher education". Los resultados de esta búsqueda han sido cribados con los siguientes criterios: no se han considerado trabajos en los que el foco se sitúa en el estudio del conocimiento especializado y la tarea no es más que el instrumento de recogida de información; y se han excluido documentos que no incluyen subdominios de conocimiento del MTSK. Además, solo se han considerado artículos, capítulos de libro y ponencias o comunicaciones en congresos (de modo que hayan seguido un proceso de revisión por pares) a los que se tiene acceso completo. Se han excluido los pósteres en congreso porque, por su extensión, apenas aportan información para su análisis. A esta búsqueda se ha añadido una adicional, con los mismos criterios, en las actas de los Congresos sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas y en Carrillo, Montes y Climent (2022).

La selección anterior ha dado como resultado 27 publicaciones, una de ellas de 2016, una de 2018, siete de 2019, once de 2021, seis de 2022 y una de 2023. Estas fechas dan cuenta de cómo el diseño de tareas para la formación de profesorado desde el modelo MTSK es relativamente reciente (dado que no se impuso ninguna limitación temporal en la búsqueda).

Un análisis de la procedencia de los autores de los trabajos permite diferenciar tres grupos mayoritarios desde los que se están desarrollando los diseños: un *grupo 1*, centrado en la Universidad Estatal de Campinas, en Brasil (con los que colaboran investigadores de otras universidades como la Pontificia Universidad Católica de Campinas, en Brasil, la Universidad de Valparaíso, en Chile, o la Universidad Federico II, en Italia); un *grupo 2*, en el que colaboran investigadores de la Universidad Complutense de

Madrid y la Universidad de Sevilla, ambas en España; y un *grupo 3*, de investigadores de la Universidad de Huelva, también en España. Además, tres de las publicaciones, que consideraremos en un *grupo 4,* corresponden a diferentes instituciones externas a las anteriores con autores que firman un único trabajo (Beteta et al., 2021; Cusi y Martignone, 2022; González, 2022).

De las 27 publicaciones consideradas, solo 4 se refieren a la formación continua del profesorado (3 del grupo 1 y una del grupo 3), estando por tanto el diseño centrado mayoritariamente en tareas para la formación inicial. En cuanto a niveles educativos se observa un gran desplazamiento hacia la Educación Primaria (16 publicaciones), con cinco trabajos del grupo 1 que o bien se refieren a Educación Infantil u orientan la tarea tanto a profesores de Educación Infantil como de Años Iniciales (profesorado que se ocupa del alumnado 0 a 10 años) y uno del grupo 2 destinado a profesorado de Educación Infantil. Solo tres publicaciones reportan tareas orientadas a profesorado de Educación Media[1] (Galleguillos y Ribeiro, 2021; González, 2022; Oliveira et al., 2021).

Caracterización de tareas para la formación de profesorado

Uno de los rasgos principales que se asocia en estas publicaciones a las tareas para la formación de profesorado es la necesidad de que estén situadas en la práctica del profesor, convirtiendo dicha práctica en el centro de la formación (Joglar-Prieto et al., 2022). De este modo, además de permitir desarrollar conocimiento especializado, posibilita que el profesorado vivencie situaciones de la misma naturaleza que se espera pueda proponer a su alumnado (Ribeiro, Almeida y Mellone, 2021). Esto explica que, como veremos en relación con su estructura, en las tareas diseñadas en el grupo 1 una de las partes destacadas es una tarea escolar sobre la que se basan las reflexiones que se propone al profesorado. La tarea escolar permite centrarse en una problemática o dificultad identificada en la práctica de la enseñanza de las matemáticas.

Además de presentar una tarea escolar, la tarea para la formación muestra parte de su desarrollo, real o simulado, bien en forma de respuestas del alumnado o de fragmentos de su implementación en un aula. En el caso de las tareas del grupo 1, se incluyen siempre producciones de los alumnos, cuya selección es central, de modo que cada una es elegida con un motivo específico de cara a discutir dificultades de aprendizaje o abordajes no típicos de la tarea (Ribeiro, 2016). En las tareas del grupo 2 se presentan siempre situaciones de aula en las que se muestran interacciones entre profesor/a y alumnos, y se da mucha importancia a la gestión de estas situaciones, la interpretación de las interacciones y el papel de los recursos (Barrera-Castanardo et al., 2019). Se espera que estas tareas contribuyan a aprender a identificar elementos esenciales de la práctica y se pone el énfasis en ofrecer planteamientos alternativos de enseñanza (Liñán-García et al., 2019). En las tareas del grupo 3, por su parte, se presentan por lo general fragmentos reales de enseñanza, en su mayor parte en formato de vídeos, y se pretende de este modo situar a los estudiantes para profesor ante la complejidad de las situaciones del aula (Pascual et al, 2023). En estos casos se enfatiza la importancia de reflexionar sobre la práctica, en un primer momento de modo libre (Montes et al., 2022).

Las tareas para la formación toman como referente tareas profesionales (Joglar-Prieto et al, 2021), de modo que, en el desarrollo de la tarea, el profesor o futuro profesor ha de interpretar y dar feedback al pensamiento de los estudiantes (presente en casi todas las tareas del grupo 1), diseñar actividades matemáticas (Flores-Medrano et al., 2022), o evaluar un conjunto de ejemplos para la introducción de un concepto (Pascual et al., 2023). De esta forma, reproducen o se asemejan al trabajo de enseñar (Silver, 2009), lo que favorece en mayor medida la generación de conocimiento profesional útil y disponible (Cusi y Martignone, 2022) y pretende propiciar que los profesores otorguen legitimidad a las tareas propuestas (Climent y Montes, 2019).

[1] Se han considerado en este grupo las tareas orientadas a profesorado de Enseñanza Media o equivalente (de 10 u 12 a 17 años).

Otra característica de estas tareas es que están estrechamente ligadas a la investigación en Educación Matemática (Pascual et al., 2023). De este modo, su diseño se basa en resultados de investigaciones previas y tanto este como el análisis de su implementación pretenden, a su vez, dar respuesta a preguntas de investigación sobre el conocimiento y aprendizaje del profesor para la enseñanza de las matemáticas (Almeida y Ribeiro, 2021).

Estas características son coherentes con la visión de la formación del profesorado como un proceso continuo desde la formación inicial a la del profesorado en ejercicio, donde el aprendizaje del profesor se basa en la reflexión sobre la práctica a partir de su problematización (Carrillo et al., 2020).

Objetivos, foco, y estructura

Las tareas para la formación de profesorado tienen función (entendida como sus objetivos, en relación con las expectativas de aprendizaje de los profesores o futuros profesores), foco y forma (Grevholm et al., 2009).

Las tareas diseñadas desde el modelo MTSK comparten el objetivo de promover el desarrollo de conocimiento especializado para la enseñanza de un tema matemático, enfatizando su carácter especializado. En algunos casos se hace explícito el objetivo de, además de promover, acceder a dicho conocimiento, de cara a la investigación sobre el mismo (Couto y Ribeiro, 2019a). En gran parte de las tareas del grupo 1, a este objetivo se une el de desarrollar el conocimiento interpretativo del profesorado (Ribeiro, Gibim y Alves, 2021), que permite dar sentido a los razonamientos y producciones de los estudiantes y ofrecerles un feedback constructivo. En algunas de las tareas del grupo 2 se pretende, como complemento a la construcción o desarrollo de conocimiento especializado, que los futuros profesores aprendan a mirar con sentido la práctica profesional (Joglar-Prieto et al., 2021). Esta perspectiva, aunque relacionada, difiere de la del conocimiento interpretativo, pues en este caso el foco está puesto en la capacidad de identificar elementos relevantes de la práctica.

El foco de las tareas se sitúa en cuestiones matemáticamente críticas (Ribeiro, 2016) o clave, ligadas a obstáculos conceptuales significativos y características esenciales de las situaciones de enseñanza-aprendizaje matemático (Swan, 2007). Fundamentalmente se han fijado en temas relacionados con distintos tipos de números y operaciones, o en temas geométricos (como en Couto y Ribeiro, 2019b, o en Montes et al., 2019, respectivamente). Es interesante cómo en Ribeiro, Almeida y Mellone (2021) se presenta una tarea que sirve para formar a profesorado de distintos niveles en distintos temas matemáticos (la sustracción en el caso de profesorado de Infantil y Años Iniciales, y ecuaciones e inecuaciones, pensamiento algebraico, teoría de grupos y anillos, demostración y generalización, en profesorado de niveles superiores). De este modo, se busca una articulación entre la matemática escolar y la matemática superior.

En el análisis de la forma que toman las tareas reportadas nos hemos fijado en su estructura. Tanto la estructura como el grado de sistematización de dicha estructura puede ser una de las principales diferencias en el diseño de tareas de los grupos 1, 2 y 3. Así, las tareas del grupo 1 presentan una estructura que se ha ido sistematizando progresivamente hasta llegar a diferenciar tarea formativa y, como parte de esta, tarea para la formación. La tarea formativa contiene, además, un documento para el profesor (que incluye elementos de conocimiento matemático y didáctico del contenido matemático necesarios para implementar la tarea escolar) y otro para el formador (para facilitar la implementación de la tarea para la formación en el contexto formativo). Nos centramos aquí en las tareas para la formación, que son las equivalentes a las tareas que se diseñan en los otros grupos. Estas tareas, en general, tienen dos partes: la primera, partiendo de una tarea escolar, propone cuestiones asociadas a subdominios del modelo MTSK; la segunda, presenta posibles resoluciones de alumnos a la tarea escolar y pretende propiciar el desarrollo del conocimiento interpretativo (Almeida y Ribeiro, 2021). Los investigadores defienden la conveniencia de centrarse primero en el conocimiento especializado en la primera parte de la tarea para la formación y después en el conocimiento interpretativo, que toma como base el primero (Ribeiro, Almeida y Mellone, 2021). En las tareas del grupo 2 se observan principalmente dos tipos de estructura. En el primer tipo, a un fragmento de una situación de aula presentado en formato de transcripción le siguen preguntas orientadas a la comprensión profunda del caso, relacionadas con distintos subdominios del modelo MTSK (Barrera-Castanardo et al., 2019). En el segundo tipo, a la observación de un fragmento de vídeo de una situación de aula real sobre la enseñanza de algún tema matemático le sigue un análisis primero libre y después usando una pauta orientada desde el modelo MTSK (Joglar-Prieto et al., 2022). En el diseño de tareas en el grupo 3, por su parte, en su mayoría la tarea parte de la visualización de un vídeo sobre una lección en un aula de Primaria que los futuros profesores analizan primero libremente y después con dimensiones que evocan a los subdominios del modelo MTSK (Montes et al., 2022). A este análisis, que constituye la primera tarea de la secuencia, siguen diferentes tareas que, tomando como referente el vídeo, profundizan en distintos aspectos didáctico-matemáticos de la lección (como los ejemplos elegidos por el profesor para la tarea escolar, el conocimiento matemático que se institucionaliza o la práctica matemática foco de la lección) (Montes et al., 2019).

Es interesante observar que en las escasas tareas para formación continua la estructura se modifica. De este modo, en la primera parte de las tareas para la formación propuestas en el grupo 1, a la tarea escolar y preguntas orientadas desde el modelo MTSK le anteceden cuestiones sobre cómo suelen abordar la enseñanza del tema los profesores en su práctica. Por su lado, la única tarea para la formación continua en el grupo 3, en lugar de presentar una situación de aula, parte de un conjunto de problemas matemáticos que podrían plantearse en Primaria, seguidos de preguntas sobre los mismos orientados desde los subdominios del modelo MTSK (Montes et al., 2021).

Sin embargo, no se observan diferencias en las tareas cuando se dirigen a profesores de distintos niveles educativos. Esto se evidencia principalmente en las tareas del grupo 1, algunas destinadas conjuntamente a profesorado desde 0 a 10 años sin que se comenten diferencias de cara al profesorado de Infantil. Es más, se justifica que desde la perspectiva del MTSK el profesorado de las dos etapas debe tener el mismo conocimiento matemático (Ribeiro, Almeida y Mellone, 2021). Sí se observa, sin embargo, diferencia entre el conocimiento matemático pretendido en una misma tarea en relación con profesorado de Infantil y de Enseñanza Media o Universitaria (como comentamos previamente en relación con el foco de la tarea presentada en Ribeiro, Almeida y Mellone, 2021).

El modelo MTSK en el diseño, implementación y desarrollo de la tarea

El modelo MTSK orienta, en todos los casos, el diseño de la tarea. En las tareas del grupo1 sustentando la selección de las producciones del alumnado y las cuestiones asociadas, y en las del grupo 2 en el análisis de los videos de aula, el enriquecimiento de los casos con oportunidades de construcción de conocimiento especializado a partir del conocimiento evocado por el investigador (Barrera-Castanardo et al., 2019) y proponiendo cuestiones para su análisis. En las del grupo 3 para seleccionar videos con interés desde el punto de vista de construcción de conocimiento especializado y para establecer a priori el conocimiento que se pretende construir (Pascual et al., 2023). El conocimiento pretendido con la tarea para la formación puede describirse de manera general (Couto y Ribeiro, 2019b) o determinarse previamente con indicadores concretos (Montes et al., 2019; Pascual et al., 2023). En este último caso, hay más énfasis en contrastar el conocimiento pretendido con el evidenciado, reflexionando sobre la tarea en el caso de desajustes.

El análisis de los resultados de la implementación de la tarea, en términos del conocimiento evidenciado por los resolutores, se realiza también en todos los casos con las categorías y subdominios del modelo en MTSK. En algunos casos, es en la descripción de este conocimiento donde se da mayor concreción, identificándose indicadores de dicho conocimiento (Galleguillos y Ribeiro, 2021; Moreno y Climent, 2021).

En ningún caso la implementación de la tarea en sí es objeto de análisis, si bien en los análisis del grupo 3 se presentan fragmentos de las interacciones entre estudiantes para profesor y formadores, mostrándose el conocimiento evidenciado en el marco de estas interacciones (Pascual et al., 2023).

Otra diferencia se refiere a los elementos de conocimiento especializado a cuyo enriquecimiento pretende contribuir la tarea. Como constatan los propios investigadores, las tareas del grupo 1 se han centrado en el desarrollo de conocimiento matemático, debido en parte a que esta es la base del conocimiento interpretativo (Ribeiro, Almeida y Mellone, 2021). De este modo, en todas sus tareas hay foco en el Conocimiento de los temas (KoT), en algo más de la mitad en el conocimiento de la práctica matemática (KPM) y el conocimiento de la estructura de la matemática KSM, y en la mitad en conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas KFLM. Es curioso que en ninguna se haga alusión explícita a conocimiento de la enseñanza de las matemáticas KMT o el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas KMLS en la tarea para la formación, "*siendo que las dimensiones del PCK se pretenden desarrollar a través de la forma de trabajo, por los focos de discusión y ejemplos presentados y discutidos durante la implementación de la tarea en los contextos de formación*" (Ribeiro, Almeida y Mellone, 2021, p. 17). En las tareas del grupo 2 el subdominio de conocimiento más presente en las tareas es KFLM (pretendido en todas), seguidos de KoT y KMT (en todas menos una), KPM y KMLS (en algo más de la mitad), y KSM (solo en una). Por su parte, en las tareas del grupo 3 se sitúa igualmente el énfasis en la construcción de KoT, KPM, KFLM y KMT (presente en dos terceras partes de estas) y en menor medida en KSM y KMLS (en un tercio).

La presencia de los distintos subdominios en relación con el conocimiento pretendido no parece fortuita en los distintos tipos de diseños. El peso relativo de KFLM en todos los casos pone de manifiesto el interés en centrar la atención del profesorado y, sobre todo, futuro profesorado en el pensamiento matemático del alumnado. Este pensamiento es el denominador común en las representaciones de la práctica que se incluyen en todas las tareas. La ausencia de KMT en las tareas del grupo 1 y el peso en las de los grupos 2 y 3 podría explicarse porque estas últimas integran fragmentos de interacciones en aulas y el profesor, de algún modo, está presente en las representaciones de la práctica que se presentan. Por último, parece significativo la importancia que se otorga a KSM en las tareas del grupo 1 frente a la escasa presencia en las de los otros grupos. Esto responde a una especial mirada en estas tareas a la profundización en los contenidos matemáticos a través del establecimiento de conexiones. De hecho, en algunos casos, el propio foco en el desarrollo de conocimiento especializado se sitúa directamente en KSM (como en Policastro et al., 2019, donde el objetivo de la tarea es el desarrollo de conexiones entre medidas y fracciones).

Cusi y Martignone (2022) presenta un tipo de tarea muy diferente a las anteriores, que pretende movilizar conocimiento en todos los subdominios. En esta tarea, orientada a la formación inicial de profesorado de Primaria, se facilita a los estudiantes para profesor una tarea escolar y seis respuestas escritas de estudiantes reales. A partir de esto, se les pide que diseñen debates ficticios que pudieran desarrollarse en una clase representando diálogos entre un profesor y sus alumnos y que justifiquen el diseño mediante perspectivas teóricas determinadas. De este modo, el estudiante para profesor ha de imaginar cómo gestionaría la discusión de las respuestas y cuáles podrían ser las intervenciones del alumnado.

Metodología de las investigaciones

El análisis de las investigaciones desarrolladas en torno al diseño e implementación de tareas para la formación de profesorado desde la mirada del modelo MTSK muestra poca diversidad en lo que se refiere a su metodología. Todos los estudios del grupo 1 se describen como estudios de caso, en su mayor parte instrumentales, en el que participa un número pequeño de profesores o futuros profesores (a lo sumo un grupo-clase). En los estudios del grupo 1 y 2 se hace referencia en su mayoría a experimentos de enseñanza, en los que participan por lo general uno o varios grupos de estudiantes para maestro. En Montes et al. (2022) se presenta una variante interesante con una primera fase del experimento en pequeño grupo (con tres estudiantes para maestro) donde se implementan y analizan las tareas antes de hacerlo en grupos clase en una fase posterior. En todos los casos se recogen los datos a través de video y/o audio grabaciones de las sesiones formativas, producciones de los profesores o futuros profesores y, en menor medida, entrevistas posteriores con estos y los formadores implicados en la implementación.

Las preguntas de investigación, cuando se hacen explicitas, se refieren a qué conocimientos especializados revelan o muestran profesores o futuros profesores y en muy pocas ocasiones se cuestiona sobre las tareas en sí con excepciones como en Policastro et al. (2019), o Pascual et al. (2023).

Comentarios finales

En el relativamente corto periodo en el que se viene investigando sobre el diseño e implementación de tareas para la formación de profesorado usando el modelo MTSK se observa una sistematización de los diseños y cierta variedad en sus focos y formas. Sin embargo, la aplicación del MTSK en distintas escalas a la formación del profesorado en distintos niveles (Carrillo, Climent et al., 2022) requeriría de explorar otros diseños de investigación y desviar la mirada del nivel de Educación Primaria. Además, no se han constatado estudios sobre la aplicación y adaptación de estas tareas en diferentes contextos, de cara a su escalado y diseminación (Montes y Climent, 2022). En esta línea, y dentro de un proyecto de investigación financiado por el Gobierno de España sobre tareas formativas y conocimiento del formador (en el que participan buena parte de los investigadores aquí citados), estamos iniciando la implementación de una misma tarea formativa en distintas universidades dentro de un mismo país y en distintos países. De este modo, podremos comprender mejor los resultados de la implementación de una tarea en relación con el contexto formativo. En este sentido, si bien en algunos documentos de los aquí revisados se defiende la necesidad de considerar en el diseño el papel de los contextos en los que tienen lugar la práctica y la formación (Ribeiro, Almeida y Mellone, 2021), sería conveniente hacer más explícita esa consideración.

En relación con el diseño de tareas para la formación de profesorado en distintos niveles y con distintos focos, no queda constancia por los trabajos revisados de que su consideración establezca diferencias en las tareas. Sigue, pues, abierta la cuestión de si la construcción o desarrollo de conocimiento especializado en distintos temas, subdominios y niveles presenta especificidades que deriven en las tareas.

Sin embargo, aunque la formación continua constituye una parte muy pequeña del destino de las tareas diseñadas, parece que las tareas para la formación inicial y continua presentan diferencias. Conviene seguir indagando sobre esta aparente diferencia, que se relaciona con una posible modelización del aprendizaje o desarrollo del profesor y/o futuro profesor.

Sánchez y García (2009) diferenciaban tres tipos de tareas para la formación del profesorado: de organización del contenido matemático para la enseñanza, de comprensión de la gestión del contenido matemático y el discurso en el aula, y de análisis e interpretación del pensamiento y conocimiento matemático de los estudiantes. Hemos encontrado, sobre todo, tareas del primer y tercer tipo, estando menos explorado cómo potenciar desde una perspectiva especializada el aprendizaje sobre la gestión del contenido matemático y el discurso en el aula.

El análisis de la implementación de las tareas se ha centrado en los resolutores, sin prestar atención a dicho proceso de implementación. Sería interesante, en ese sentido, ampliar el foco incluyendo cómo se gestionan las tareas y el papel decisivo del formador. ¿Qué papel puede tener, por ejemplo, el modelo MTSK en la propia implementación, como referente para el formador? ¿Tiene alguna incidencia el hecho de que el formador esté familiarizado con el modelo MTSK o no?

Las diferentes estructuras de las tareas revisadas y las posibles relaciones con los subdominios del modelo MTSK en que ponen énfasis, por último, puede orientar a la hora de elegir un tipo determinado de tarea para un objetivo y con un foco determinados.

Agradecimientos

Proyecto PID2021-122180OB-I00 (Gobierno de España). Proyecto ProyExcel_00297 (Junta de Andalucía). Grupo de investigación DESYM (HUM-168). Red MTSK, auspiciada por la AUIP. Centro de investigación COIDESO (Universidad de Huelva).

Referencias

Almeida, A. R. D., y Ribeiro, M. (2021). Potencialidades de uma tarefa para promover o conhecimento especializado do professor no tópico frações. *ACERVO – Boletim do Centro de Documentação do GHEMAT-SP, 3*, 1–18. https://ojs.ghemat-brasil.com.br/index.php/ACERVO/article/view/31

Barrera-Castarnado, V J., Liñán-García, M. M., Muñoz-Catalán, M. C. y Contreras, L. C. (2019). El uso de MTSK en el diseño de tareas formativas para estudiantes para profesor de educación primaria. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 110–118). Universidad de Huelva Publicaciones. https://www.uhu.es/publicaciones/?q=librosycode=1215

Beteta-Salas, M., Quintana-Sánchez, D., y Mejía-Alemán, L. (2021). Diseño de tareas formativas para caracterizar el conocimiento matemático y didáctico de área y volumen del docente de matemática del nivel Primario. En J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del profesor de Matemáticas* (pp. 114–120). Congresseme.

Carrillo, J. (2017). Idiosincrasia del MTSK, investigaciones realizadas y utilidades. En J. Carrillo y L. C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK* (pp. 7–10). CG.SE.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Montes, M. (2020). Using Professional Development Contexts to Structure Prospective Teacher Education. En S. Llinares y O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 393–420). Brill. https://doi.org/10.1163/9789004418967_015

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores–Medrano, E., Escudero–Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar–González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2022). Una trayectoria de investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas: del grupo SIDM a la Red Iberoamericana MTSK. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática, 2*(2), 1–26.

Carrillo, J., Montes, M. A., y Climent, N. (Eds.), (2022). *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino*. Dykinson.

Climent, N. y Montes, M. A. (2019). Taller 2: diseño de tareas para la formación de profesores de matemáticas a partir de MTSK. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 60–68). Universidad de Huelva Publicaciones. https://www.uhu.es/publicaciones/?q=librosycode=1215

Couto, S., y Ribeiro, C. M. (2019a). Conhecimento especializado de futuros professores da educaçao infantil e anos iniciais no ambito do paralelismo entre retas. *Revista Educação-UNG-Ser, 14*(1 ESP), 75-85. http://revistas.ung.br/index.php/educacao/article/view/3744

Couto, S., y Ribeiro, C. M. (2019b). Conhecimento especializado de futuros professores da educação infantil e dos anos iniciais quanto às dificuldades de aprendizagem de alunos cegos e videntes sobre paralelismo. *ACTIO: Docência em Ciências, 4*(3), 701-721. https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/10544/7383

Cusi, A., y Martignone, F. (2022). Integration of two theoretical lenses to analyse the potentialities of a practice-based task in fostering pre-service mathematics teacher specialized knowledge. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, y F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 3543–3550). Free University of Bozen-Bolzano. https://hal.science/CERME12/hal-03748739v1

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D. I., y Coca, M. M. (2022). El uso de representaciones y de problemas para la adquisición del conocimiento matemático didáctico de fracciones en la formación de maestros. *APEduC Revista-Investigação e Práticas em Educação em Ciências, Matemática e Tecnologia, 3*(2), 98-113. https://apeducrevista.utad.pt/index.php/apeduc/article/view/358/141

Galleguillos, J., y Ribeiro, M. (2021). El conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas sobre números periódicos. En J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del profesor de Matemáticas* (pp. 114–120). Congresseme.

González, V. (2022). Un dispositivo de formación docente para promover la alfabetización matemática. *Ducere. Revista De Investigación Educativa, 1*(1), e202205. https://doi.org/10.61303/2735668X.v1i1.2

Grevholm, B., Millman, R., y Clarke, B. (2009). Function, form and focus: the role of tasks in elementary mathematics teacher education. En B. Clarke, B. Grevholm, y R. Millman (Eds.), *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education* (pp. 1–5). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8_1

Joglar-Prieto, N., Belmonte, J. M., Liñán, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Pizarro, N., Ramírez, M., y Méndez, M. (2021). El papel de una tarea formativa sobre el numero en el desarrollo de la competencia noticing del futuro maestro de Educación Infantil. En GIDIMAT-UA (Eds.), *Ideas para la educación matematica: Perspectivas desde el trabajo de Mª Luz Callejo de la Vega* (pp. 183–203). Compobell.

Joglar-Prieto, N., Liñán-García, M. M, y Contreras, L. C. (2022). MTSK en la formación inicial del profesorado de primaria. En J. Carrillo, M. A. Montes, y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 207-222). Dykinson.

Liñán-García, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Joglar, N. y Ramírez, M. (2019). Taller 1: Generación de propuesta de conocimiento especializado basada en situaciones de aula. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 49–59). Universidad de Huelva Publicaciones. https://www.uhu.es/publicaciones/?q=librosycode=1215

Lizarde, E., y Caldatto, M. E. (2022). El modelo MTSK y el análisis de programas formativos. En J. Carrillo, M. A. Montes, y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 291–302). Dykinson.

Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M. y Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 157–176). Ediciones Universidad Salamanca. https://eusal.es/eusal/catalog/book/978-84-1311-073-8

Montes, M., y Climent, N. (2022). Prospectiva de la investigación con MTSK. En J. Carrillo, M. A. Montes, y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 337–347). Dykinson.

Montes, M. Á., Climent, N., y Contreras, L. C. (2022). Construyendo conocimiento especializado en geometría: un experimento de enseñanza en formación inicial de maestros. *Aula Abierta, 51*(1), 27–36. https://reunido.uniovi.es/index.php/AA/article/view/16421/15572

Montes, M., Pascual, M., y Climent, N. (2021). Un experimento de enseñanza en formación continua estructurado por el modelo MTSK. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 24*(1), 83-104. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362021000100005yscript=sci_abstract

Montes, M., Climent, N., Carrillo, J., y Contreras, L. (2019). Constructing tasks for primary teacher education from the perspective of Mathematics Teachers' Specialised Knowledge. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3955-3962). Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. https://hal.science/hal-02430479/document

Moreno, A., y Climent, N. (2021). Conocimiento matemático especializado movilizado por estudiantes para maestro durante el análisis de situaciones de aula sobre polígono. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16*(61), 1-20. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/252

Nolla, Á., Muñoz, R., Cerisola, A., y Fernández, B. (2021). La formación inicial de los maestros en matemáticas y su didáctica. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 96*(35.1), 185–208. https://doi.org/10.47553/rifop.v96i35.1.85882

Oliveira, M. P., Almeida, A. R., y Ribeiro, M. (2021). Conhecimento especializado de futuros profesores de matemática sobre rotaçao e revoluçao de figuras geométricas. En J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del profesor de Matemáticas* (pp. 58–65). Congresseme.

Pascual, M. I., Climent, N., Codes, M., Martín, J. P., y Contreras, L. C. (2023). Tareas en la formación inicial de maestros para la construcción de conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 98*(37.2), 56–72. https://doi.org/10.47553/rifop.v98i37.2.99221

Parra-Sandoval, H., y Salas-Solano, B. (2023). Propuesta para la elaboración de una licenciatura en educación matemática basada en el modelo MTSK. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 119–127). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Policastro, M., Mellone, M., Ribeiro, M., y Fiorentini, D. (2019). Conceptualising tasks for teacher education: from a research methodology to teachers' knowledge development. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3978–3985). Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. http://erme.site/wp-content/uploads/archives/CERME11_Proceedings_2019.pdf

Ribeiro, M. (2016). Tareas para alumnos y tareas para la formación: Discutiendo el conocimiento especializado del profesor y del formador de profesores de matemáticas. En S. Estrella, M., Goizueta, C. Guerrero, A. Mena, A. Mena, E. Montoya, A. Morales, M. Parraguez, E. Ramos, P. Vásquez, y D. Zakaryan (Eds.), *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 31–39). SOCHIEM. http://funes.uniandes.edu.co/15006/1/Ribeiro2016Tareas.pdf

Ribeiro, M., Almeida, A., y Mellone, M. (2021). Conceitualizando Tarefas Formativas para Desenvolver as Especificidades do Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor. *Perspectivas da Educação Matemática, 14*(35), 1–32. https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/13263

Ribeiro, M., Gibim, G., y Alves, C. (2021). A Necessária Mudança de Foco na Formação de Professores de e que Ensinam Matemática: Discussão de Tarefas para a Formação e o Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo. *Perspectivas da Educação Matemática, 14*(34), 1-24. https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/12686

Sánchez, V., y García, M. (2009). Task for Primary Student Teacher: A task of Mathematics Teacher Educators. En B. Clarke, B. Grevholm y R. Millman (Eds.), *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education* (pp. 37–49). Springer.

Silver E.A. (2009). Toward a More Complete Understanding of Practice-Based Professional Development for Mathematics Teachers. En R. Even y D.L. Ball (Eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. New ICMI Study Series* (Vol. 11, pp. 245–247). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09601-8_25

Swan, M. (2007). The impact of task-based professional development on teachers' practices and beliefs: a design research study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 217-237. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9038-8

STRENGTHENING THE ROLE OF PRACTICE IN MATHEMATICS TEACHER EDUCATION: OPPORTUNITIES FOR UNIVERSITY MATHEMATICS COURSES

Fortalecimiento del papel de la práctica en la formación de profesores de matemáticas: oportunidades para cursos universitarios de matemáticas

Wasserman, N. H.
Teachers College, Columbia University, USA

Resumen.
Este artículo explora la práctica y su relación con el conocimiento y las creencias en la formación de profesores de matemáticas. Específicamente, considera los cursos universitarios de matemáticas y las oportunidades que estos cursos podrían ofrecer para desarrollar prácticas que podrían servir tanto para hacer matemáticas como para enseñar matemáticas – llamadas prácticas matemáticas pedagógicas (PMPs). El artículo sintetiza los PMPs de dos fuentes y amplía la práctica en dos direcciones clave con ejemplos de un curso de geometría moderna.

Palabras clave. Formación de profesores, Prácticas matemáticas pedagógicas, Matemáticas universitarias.

Abstract.
This paper explores the role of practice, and its relation to knowledge and beliefs, in mathematics teacher education. Specifically, it considers the context of university mathematics courses and the possibilities those courses might provide for developing practices that might serve both for doing mathematics and for teaching mathematics – referred to as pedagogical mathematical practices (PMPs). The paper synthesizes PMPs from two sources and extends practice in two key directions with examples from a modern geometry course.

Keywords. Teacher Education, Pedagogical mathematical practices, University mathematics.

Wasserman, N. H. (2023). Strengthening the role of practice in mathematics teacher education: opportunities for university mathematics courses. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 20–30). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introduction

For at least the last thirty years, conceptualizing and studying the professional knowledge base of teachers has been a focal point in the field of mathematics education. Some core tenets have been an emphasis on distinguishing teaching and its professional knowledge base from other professions; on the discipline-specificity of teaching and that knowledge; and an alignment of that knowledge to the actual work that teachers do in classrooms. From Shulman's (1986) pedagogical content knowledge (PCK), Ball et al.'s (2008) mathematical knowledge for teaching (MKT), and Carrillo et al.'s (2018) mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) – all of which broadly characterize different domains of knowledge – to Rowland et al.'s (2005) knowledge quartet (KQ), which identified types of activities in situ in classrooms in which teachers' mathematical knowledge is revealed, just to name a few, these efforts have developed ideas of a professional knowledge base and have greatly influenced teacher education.

The purpose of this paper – and talk – will to be explore the role of "practice" and how it is, or might be, situated, strengthened, and developed alongside these broader efforts. From the outset, there are two specific contexts within which most of my work has been situated that are important to specify. The first is that I have primarily been involved in *secondary teacher education* – though this aligns well with MTSK's orientation toward a disciplinary emphasis in its organization. A common structure tends to delineate four components of secondary teacher education: mathematical coursework, mathematics education coursework, general education coursework, and practicum experiences (Wasserman et al., 2023). The second context is that I have primarily studied the role of *mathematics coursework* within this teacher education context – often focusing on more advanced courses such as abstract algebra or real analysis. These two aspects help situate the content of this paper.

I have focused on these areas largely because mathematical coursework does not necessarily have a good track record in teacher education (e.g., Zazkis & Leikin, 2010), but also because there are instances where it has been meaningful (e.g., Wasserman & McGuffey, 2021). Indeed, my work in this area has suggested the potentially powerful role that practice, and its development, might play in teacher education.

Teaching and its components

Cohen et al. (2003) conceptualize teaching as an instructional triangle – as interactions among the three key players of teacher, student, and content, acting within contextual environments. How teachers engage in these activities is of fundamental importance to the process of teaching and learning.

Scholars have worked to model the factors that seem to most influence the way teachers go about their teaching. Broadly speaking, these efforts have landed on incorporating three primary distinctions made in psychology – between cognition, affect, and conation (Huitt, 1999). That is, teaching seems to be a function of one's knowledge (cognition), one's beliefs (affect), and the proactive aspects of one's behavioral practices (conation). Blömeke et al. (2015), for instance, model teacher action as a function of two levels, where the first level is one's general traits of knowledge and beliefs, and the second is situation-specific skills, which are shaped by knowledge and beliefs but which also subsequently shape one's ultimate classroom actions. Similarly, Schoenfeld's (1998) teaching-in-context posited knowledge, beliefs, and goals as centrally important factors that influence teachers' actions.

Situating knowledge, beliefs, and practices

Indeed, all three – knowledge, beliefs, and practices – are reflected in some of the field's work conceptualizing the professional knowledge base of teachers. Consider the MTSK model (Carrillo et al., 2018) (Figure 1a). It primarily identifies different domains of *knowledge* – with an essential distinction between knowledge of *mathematics* (MK) and *Pedagogical Content Knowledge* (PCK). Yet, we also see the inclusion of *beliefs* – with an analogous distinction between beliefs on mathematics and on mathematics teaching – as well as the domain "knowledge of *practices* in mathematics" (italics added for emphasis). Blömeke et al.'s (2015) model of teacher action, as adapted by Wasserman and McGuffey (2021), also make clear each of these three aspects (Figure 1b).

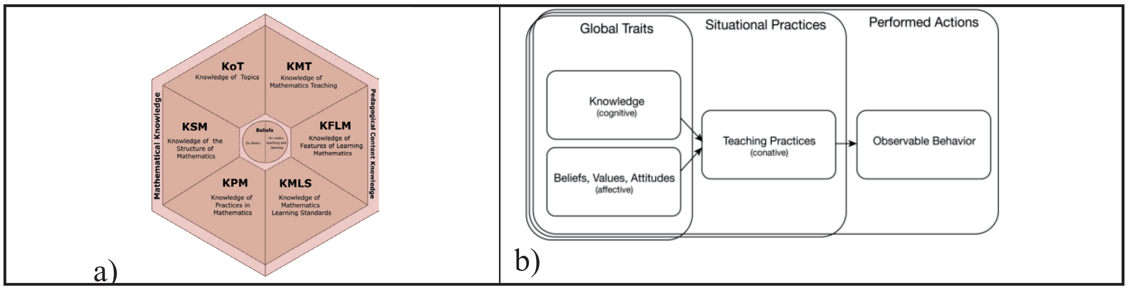


Figure 1. a) MTSK model (Carrillo et al., 2018); b) Wasserman y McGuffey's (2021) adaptation of Blömeke et al.'s (2015) model

Reflecting on these two figures, some provocative questions might arise: How are knowledge, beliefs, and practices situated in relation to each other in each? What does the way in which we situate them mean for teacher education? Notably, although the two models do so differently, they may not necessarily be at odds with one another; for instance, the MTSK model might be superimposed over the global traits, providing further specification about various domains of knowledge and beliefs. In that case, another question might arise: How does the MTSK model conceptualize and inform a relationship to the situational teaching practices in the second model? How can the MTSK model be informed by these practices? Such questions are central to the theme of this paper. To do so, we think further about this notion of practice.

Practice – and practices

Practice is often contrasted with knowledge, where practice is associated with what we do, and knowledge with how we think. In mathematics education, these are reflected in distinctions we make between, for example, mathematical concepts and mathematical processes, or between content standards and standards for practice (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000); we know concepts and content, but we engage in doing processes and practices. One of the challenges, is that we use the term practice in different ways (Lampert, 2010). For instance, practice might be used to talk about repeated action to improve performance (e.g., piano practice), the carrying on of a collection of people (e.g., medical practice), or habitual ways and modes of acting, where the plural – practices – is often used (e.g., mathematical practices). The latter tends to be the most common meaning in mathematics education literature (Charalambous & Delaney, 2020).

Yet, even this warrants further clarification. Ancient notions of practice (e.g., praxis) were focused solely on the execution of techniques and skills – e.g., a sort of mechanical repetitious activity like done on assembly lines. Modern notions of practice (including of assembly line work) tend to focus on the ways in which competent actors navigate all types of context-specific situations. Schmidt (2014) describes the notion of practice as meaning "normatively regulated continent activity," meaning it is the ways in which competent actor's actions take the particular conditions into account while also committed to and guided by more general principles. That is, a practice is a category of activity that is normative and conducted in situation-specific contexts. Placed in the context of mathematics teaching, these practices are the "regular and habitual classroom routines engaged in by the teacher" (Charalambous y Delaney, 2020, p. 361). These ways of going about the work of teaching are of course guided by particular beliefs and knowledge, but they are different than them, describing and representing the intentional and normative ways such knowledge and beliefs are enacted in particular behaviors.

Mathematics practices and mathematics teaching practices

Similar to the distinction made between mathematics and mathematics teaching in domains of knowledge and beliefs, the field has also distinguished between mathematics practices and mathematics teaching practices.

Mathematics practices describe the normative kinds of behaviors mathematicians engage in, which could be activities like conjecturing, justifying, representing, symbolizing, defining, specializing, and generalizing (e.g., Heid & Wilson, 2015), as well as heuristics or habits of mind for engaging in those kinds of activities (e.g., Cuoco et al., 1996; Polya, 1971). These are akin to the practices described in the MTSK model's Knowledge of the Practices of Mathematics (KPM) category. Mathematics teaching practices, in contrast, would signify the normative kinds of behaviors that capture the ways mathematics teachers go about their work, which could be activities such as building procedural fluency from conceptual understanding, eliciting and using evidence of student thinking, orchestrating productive mathematics discussions, juxtaposing examples and non-examples (e.g., NCTM, 2014; TeachingWorks, 2015), and so on. A common challenge in all of this work has been capturing the notion of a practice at an appropriate grain size (Charalambous & Delaney, 2020).

Relating mathematics practices and mathematics teaching practices

One of the primary ways the field has tended to imagine these two practices as being related is that mathematical practices should inform the way mathematics is taught. Meaning, mathematics teaching practices should include engaging students in mathematics practices. This certainly seems desirable. But in a special issue, Weber et al. (2020) problematize this correspondence as overly simplistic – sharing skepticism about the degree to which mathematics practices are broadly shared and the degree to which they are indeed the best mathematics teaching practices in which to engage students to help them learn. Consider, for example, their example that mathematicians tend to freely apply the published theorems of others, meaning, if "trusted experts in the field declare the result to be reliable, this is sufficient for many mathematicians to accept and use the results…[but] we would not want this practice to be normative in mathematical classrooms. Individual students should not accept a result because the authorities in the classroom (the teachers and the best students) understood and sanctioned the results" (p. 1071). In this framing, if not all mathematics practices have equal validity in mathematics teaching and learning, then it can be meaningful to ask, which ones might?

As one way to approach answering this question, Wasserman (2022) conceptualized the notion of pedagogical mathematical practices (PMPs) – essentially, a notion similar to Shulman's PCK but in relation to practices instead of knowledge. At some level, PMPs were meant to capture overlapping kinds of practices – those productive both as a mathematics practice and a mathematics teaching practice. The example of acknowledging and revisiting assumptions and mathematical limitations – talked about as 'attending to scope' – was described in relation to both mathematics and mathematics teaching practice. Notably, being explicit about this practice and providing opportunities to engage in it in both mathematics and mathematics teaching contexts in a real analysis course had an impact on the future classroom practices of secondary teachers who took that course (Wasserman & McGuffey, 2021). The critical point is that the attention given to developing this practice helped turn the university mathematics coursework into a meaningful part of secondary teacher education.

Some pedagogical mathematical practices

As part of a project developing a real analysis course, Wasserman et al. (2022) specified six potential

PMPs that became a focus for the course. In another study, Wasserman (2023) had participants rate a set of practices as they were relevant for being a mathematics practice and a mathematics teaching practice – identifying four PMPs that were highly relevant for both. Critically, these provide examples of PMPs – but in no way were they intended to be an exhaustive classification or organization. Table 1 synthesizes them. Rows in the table depict (subset) relations between reasonably similar practices.

Table 1. Example PMPs from two sources

From Wasserman et al. (2022)	From Wasserman (2023)
Attending to scope: acknowledging and revisiting assumptions and mathematical limitations	
Using boundary cases: considering and using boundary cases to test and illustrate mathematical ideas	*Concrete exemplification:* working with several concrete examples, and then reasoning from those about the actual problem/concept
Exposing logic: exposing logic as underpinning mathematical interpretation	
Modeling simple-complex: using simpler objects to study more complex objects	
Avoiding rules: Avoiding giving rules without accompanying mathematical explanations	*Informal justification:* justifying claims with examples, analogies, intuitions, or illustrations
Multiple explanations: Seeking out and using multiple explanations	*Multiple approaches:* Seeking out a second (or third, or fourth, etc.) way to approach the problem/concept
	Explicit visualization: identifying visual ways to represent the problem/concept or aspects of the problem/concept

Connecting to teacher education

These ideas form the backdrop to the question I will consider for the remainder of the paper: *How might these ideas about knowledge, beliefs, and practice, and their models as they relate to teaching, inform our approaches to teacher education – in particular, secondary teacher education through university mathematics coursework?* In what follows, I consider the context of a modern geometry course, and the ways these ideas might inform the goals and instruction of such a course in teacher preparation.

Probing practice in a university mathematics course

A modern geometry course is typically characterized by an introduction to different kinds of geometries and their axiom systems. Non-Euclidean geometries such as finite geometries, and hyperbolic and elliptic geometries, as well as some of their basic results, are frequently included. With respect to secondary teacher education, such a course would likely be most pertinent for future secondary geometry teachers, but even this has some challenges. Namely, a secondary teacher will teach Euclidean geometry, so what purpose can be served by learning about non-Euclidean geometries which they will not be responsible for teaching?

If we consider our frameworks from Figure 1, knowledge, beliefs, and practices – which are relevant factors to teaching – might inform some of our goals. The MTSK model suggests we might focus on advancing future teachers' knowledge of topics (KoT) and knowledge of structures (KSM), which could relate to specific non-Euclidean geometric results, especially as they inform this broader structure of different geometries. The history of their development might even shape beliefs about mathematics – e.g., that mathematics is not fixed. Although a modern geometry course is explicitly about mathematics (not pedagogy), one might also imagine that by modeling good instruction future teachers might also develop some MTSK sub-domains of PCK (e.g., knowledge of mathematics teaching, knowledge of features of learning mathematics). These of course are, and can be, important goals and resources for teachers. But there are challenges, too. One is that is often unclear how mathematical knowledge of some university topic or structure relates to secondary teaching; how would a geometry teacher make use of this when teaching students about Euclidean geometry? Another is that the audience in a university geometry course contrasts greatly with secondary students; so, is being apprenticed by observing the pedagogical approaches of a university instructor germane for developing PCK to teach secondary students? In raising these questions, I do not intend to make light of the importance of strengthening teachers' mathematical knowledge of topics and structures, their beliefs, or their PCK; these are important goals – and they have a place in university mathematics courses. But these questions do beg for other considerations. Namely, the aspect to which I turn next, which is the role of practice and its development as a primary goal.

One goal of the MTSK model is Knowledge of Practices in Mathematics (KPM). This subdomain suggests that rather than content goals, or more likely in addition to them, the explicit goal of knowing mathematics practices is important. In a modern geometry course, perhaps the most salient would be proving. This aligns with the statement that "argumentation practices…represent one of the central planks of KPM" (Carrillo al., 2018, p. 10). Delgado-Rebolledo and Zakaryan's (2019) work further helped point out how KPM might take shape in teaching. Specifically, they pointed to KPM potentially informing a teacher's ways of communicating (e.g., use of formal language as a way of communicating), ways of validating (e.g., use of proofs by contradiction), and ways of proceeding (e.g., establishing preliminary results to facilitate development, and the process of particularizing and generalizing a proposition). For secondary teachers, then, a modern geometry course could help develop their mathematical knowledge of how to prove and how to write proofs. Such knowledge might be demonstrated by successful ability to accomplish proving tasks in that university course. In what follows, I use Blömeke et al.'s (2015) model as a point of reference to probe KPM in two specific directions: i) knowledge of a practice seems different than having that practice be incorporated as a normative way of engaging; and ii) the professional practice teachers engage in is teaching mathematics which is not the same as doing mathematics.

First, let's consider Blömeke et al.'s (2015) model with respect to actions performed doing mathematics (slightly different than what is depicted in Figure 1b). Within the context of doing mathematics, it is still sensible to differentiate global traits such as knowledge and beliefs from situational practices. Meaning, the model points to a distinction between cognitive knowledge of a practice, which would still be a global trait, and having developed something as a practice – a habitual way of going about one's work. Knowledge will inform the practice; but that knowledge is not the practice itself. For example, in a modern geometry course, a student might recognize a triangle on a sphere as a counterexample to the claim that the interior angle sum of every triangle is 180°, as well as the fact that this singular counterexample negates the claim as stated. But this knowledge is different than a student having built into their normative way of approaching mathematics the practice of looking for counterexamples. Knowledge of the practice is important, but distinct from having developed it into a mathematical practice.

Second, I point out that Blömeke et al.'s (2015) model is, in fact, with respect to actions performed teaching, and that – at least in this context – knowledge of mathematical practices (and even the practices themselves) might be best understood as falling under global traits. The situational practices in the model would refer to mathematics teaching practices and not mathematics practices. Although mathematics teaching practices might be related to some of the PCK subdomains, the MTSK model does not have the same emphasis on the practices of mathematics teaching as they do the practices of mathematics (which is reflected in the KPM subdomain). In the goal to develop knowledge of proving in a modern geometry course, for instance, one might consider claims like the interior angle sum of triangles on a sphere must be between 180° and 540°, and learn how such mathematical proofs might proceed. But university proving likely looks different than how one engages in working with secondary students on proving during the teaching of mathematics. Not all practices in mathematics translate directly into suitable mathematics teaching practices.

Although not the same, we might consider how mathematics practices inform mathematics teaching practices; we also might consider how we develop practice and not just knowledge of a practice. In this vein, PMPs might be one way of forming a link between mathematics practices and mathematics teaching practices in these models. Specifying PMPs as a goal would mean trying to develop not just knowledge of a practice, but engagement in that practice as a normative, regular, and habitual way of doing – in both mathematics *and* in mathematics teaching. I use two examples to illustrate.

Two examples

First, let's consider what developing the PMP of "exposing logic" (Table 1) in a modern geometry course might mean, and how it might differ from other goals. Here is a modern geometry task about an incidence geometry:

> Prove that the axiom system of an incidence geometry[1] is independent.

Completing this task requires knowing some things about proof, what independence means, and so forth. A typical proof involves demonstrating the existence of three models: one in which Axioms 2 and 3 are true but Axiom 1 is not, one in which Axioms 1 and 3 are true but Axiom 2 is not, and one in which Axioms 1 and 2 are true but Axiom 3 is not. In essence, each model is a counterexample to the claim that one axiom can be proved from the remaining other axioms. One goal that might be emphasized from such a task is about mathematical content – that an incidence geometry is an important geometric structure (KSM). Another goal might be about the particular processes for proving independence and the specific way to deploy counterexamples in this mathematical context. Again, both might be productive goals. But what might look different if the goal were developing the PMP of "exposing logic"?

In my experience, many students struggle with identifying situations in which an Axiom is not true – i.e., the negation of a statement. Exposing logical structure as underpinning mathematical interpretation can be helpful. For example, an instructor might use this task as an opportunity to develop the practice of exposing logic in order to help students understand an intended mathematical meaning; this might begin by rephrasing the first axiom to make explicit the if-then conditional structure of Axiom 1:

> Ax1. If there are two distinct points A, B, then there exists exactly one line containing them.

For students familiar with negation (from logic), recalling that the negation of $A \Longrightarrow B$ is $A \wedge \neg B$ might help students rephrase the negation of Axiom 1 as follows:

> $\neg\mathrm{Ax1}$. There are two distinct points A, B, and there does not exist exactly one line containing them.

One challenge of this negation of Axiom 1 in my experience is that some students interpret it as needing to be true of all pairs of distinct points. That is, there is implicit quantification to which we need to attend. We could, iteratively, go back and revisit both:

[1] With undefined terms point and line, an incidence geometry has the following axioms: 1) For two distinct points A, B there is exactly one line containing them; 2) Every line contains at least two points; 3) There exist three points, not all of which are on the same line.

Ax1. For all points A, B, if there are two distinct points A, B, then there exists exactly one line containing them.

¬Ax1. There exist points A, B, such that they are two distinct points A, B, and there does not exist exactly one line containing them.

In a university mathematics course, one might call attention to this practice of “exposing logic” and the ways in which – at least in mathematics – it helps us increasingly understand the meaning of specific statements as well as to think about their logical opposite. Rather than calling attention to the content of incidence geometries or knowledge of proving, an instructor might leverage the task in order to instead call attention to this normative way of engaging with mathematics, and then encourage students to further develop this practice by having them continue to engage in it. Yet, its’ description as a PMP also highlights its’ utility as a normative way of engaging with mathematics teaching. As such, an instructor might further facilitate developing this as a practice by considering how it might be a fruitful practice in understanding comments secondary students might make. Consider the following statement:

Well, that’s not true – a square is *not* a rectangle.

What logical meaning might a student have assigned to the statement “A square is a rectangle” for them to conclude they disagree? Was their meaning ‘if square then rectangle’; or, ‘square if and only if rectangle’? A teachers’ response would differ depending on which interpretation they presumed. And, to be explicit, it is not clear one interpretation of the statement should be assigned over the other. Hence, for the teacher, clarifying the possibilities and rephrasing them to help convey meaning and interpret students’ meaning might be a helpful way to regularly and habitually engage in teaching mathematics. Developing “exposing logic” as a practice means making it a common theme – a regular, habitual, and productive way of engaging both with mathematics content (in the university geometry course) and with mathematics teaching.

Second, let’s consider what developing the PMP of “explicit visualization” (Table 1) in a modern geometry course might mean. Notably, geometry is an especially visual domain of mathematics – yet, there are still aspects that can be developed with respect to visualization. Figure 2 provides models of two geometries for our discussion.

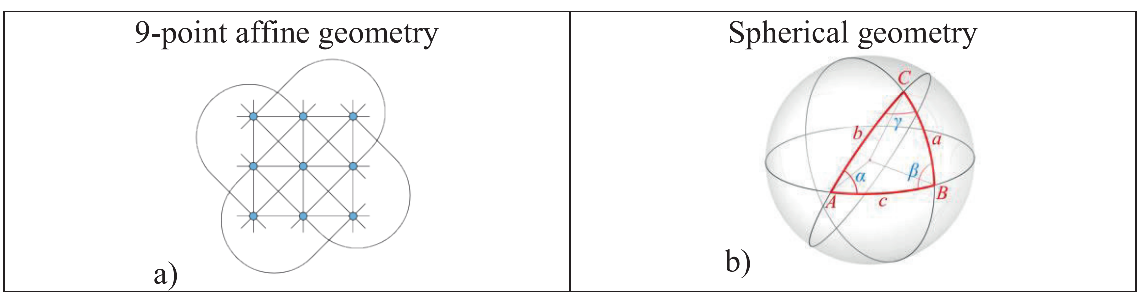


Figure 2. Visualization of lines on a) an affine geometry, and b) spherical geometry

How do we visualize “lines” in a finite geometry or spherical geometry? The “lines” in Figures 2a and 2b do not look “linear” – as we often understand that term. Nonetheless, it’s important to recognize the mathematical representation of an object as being linked to its’ definition, as well as its’ properties. In a finite geometry, we understand a collection of objects to be represented as points, and “lines” to be a subcollection. That is, what we are trying to convey by the visualization of a line is the particular subcollection of points that define the line. In a finite geometry, then, the “lines” have no other purpose except to depict which “points” a line contains. Thus, each of the twelve lines in Figure 1a only intend to communicate which three points it contains – and nothing more (e.g., nothing about “straightness”, or points being "between" other points). In spherical geometry, determining what might count as a "line" can be challenging; the lines still depict a particular subcollection of points – this time, an infinite collection of points on the sphere – but none appear to be straight like one might imagine them being. Here, straightness can be understood by its properties, for example, reflective-in-the-line symmetry, which means that lines, ultimately, should be great circles and only great circles on the sphere. Developing the practice of visualization – i.e., trying to depict and represent mathematical objects – can be emphasized and facilitated by trying to unpack what is meant and communicated by certain visualizations in mathematics. Probing normative visualizations in school mathematics (e.g., graphs of functions), and what they intend to convey and why, might be used to help develop this as a mathematics teaching practice.

Discussion and conclusion

This paper has explored the role of practice, drawing on how it is reflected in various frameworks in order to probe further how we might strengthen it in relation to teacher education. Specifically, this has been considered in the context of university mathematics courses. Two key directions captured how this notion of practice was extended in this paper: developing practice and not just knowledge of practice, and emphasizing not just mathematical practices but those that also inform mathematics teaching – i.e., PMPs.

The two examples from a modern geometry course intended to capture how an emphasis on developing PMPs might, on the one hand, use reasonably common university tasks and, on the other hand, alter the emphasis in order to highlight and help develop such practices. Here, I give two other claims about how PMPs might be incorporated into such university mathematics courses, which were also evident from the two examples. The first claim is their incorporation emphasize the nature and philosophy of mathematics, and the uniqueness of the practices as they particularize that nature and philosophy. This means to convey that mathematics is fundamentally different than other disciplines like history, and that ontologically and epistemologically distinct aspects of mathematics should inform each practice. Because mathematics captures causal relations (if-then), it is sensible that "exposing logic" is a useful practice to interpret statements (whether they be theorems or student comments); but this practice may be less sensible in other domains that cannot always tease out causality in the same way. Similarly, mathematical objects do not exist in the real world; hence, the practice of explicit visualization – and having it convey both its' definitions and properties – is very particular to the study of mathematics. The second claim is that repeated opportunity to engage in a practice – in both mathematics and in mathematics teaching contexts – provides the best opportunity to develop this as a practice that will become useful for future teaching. Indeed, doing so in mathematics courses provides a unique opportunity with respect to teacher education to continue to foster and develop such habitual, regular, and normative ways of engagement.

References

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

Blömeke, S., Gustafsson, J.-E., & Shavelson, R. J. (2015). Beyond dichotomies: Competence viewed as a continuum. *Zeitschrift für Psychologie, 223*(1), 3–13.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Avila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253.

Charalambous, C. Y., & Delaney, S. (2020). Mathematics teaching practices and practice-based pedagogies: A critical review of the literature since 2000. In D. Potari & O. Chapman (Eds.), *Knowledge, beliefs, and identity in mathematics teaching and teaching development* (2nd ed., pp. 355–390). Brill.

Cohen, D. K., Raudenbush, S. W., & Ball, D. L. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 25*(2), 119–142.

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for a mathematics curriculum. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(4), 375–402.

Delgado-Rebolledo, R. & Zakaryan, D. (2019). *Exemplifying mathematics teacher's specialised knowledge in university teaching practices*. In U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Eds.). Proceedings of the CERME 11 (3895-3902). Utrecht University and ERME.

Heid, M.K., Wilson, P.S. & Blume, G. (Eds. 2015). *Mathematical Understanding for Secondary Teaching: A Framework and Classroom-based Situations.* Information Age Publishing.

Huitt, W. (1999). Conation as an important factor of mind. Educational Psychology Interactive. http://www.edpsycinteractive.org/topics/conation/conation.html

Lampert, M. (2010). Learning teaching in, from, and for practice: What do we mean? *Journal of Teacher Education, 61*(1–2), 21–34.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics.* NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all.* NCTM.

Polya, G. (1971). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method.* 2nd ed. Princeton University Press.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255–281.

Schmidt, K. (2014). The concept of 'practice': What's the point? COOP 2014: *Proceedings of the 11th International Conference on the Design of Cooperative Systems* (pp. 427–444). Springer.

Schoenfeld, A. H. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education, 4*(1), 1–94.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

TeachingWorks. (2015). High-leverage practices. Retrieved December, 2022, from http://www.teachingworks.org/high-leverage-practices

Wasserman, N. (2022). Re-exploring the intersection of mathematics and pedagogy. *For the Learning of Mathematics, 42*(3), 28-33.

Wasserman, N., Buchbinder, O., & Buchholtz, N. (2023). Making university mathematics matter for secondary teacher preparation. *ZDM–Mathematics Education, 55*(4), 719-736.

Wasserman, N., Fukawa-Connelly, T., Weber, K., Mejia-Ramos, J. P., & Abbott, S. (2022). *Understanding analysis and its connections to secondary mathematics teaching.* Springer.

Wasserman, N., & McGuffey, W. (2021). Opportunities to learn from (advanced) mathematical coursework: A teacher perspective on observed classroom practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 52*(4), 370-406.

Weber, K., Dawkins, P., & Mejia-Ramos, J. P. (2020). The relationship between mathematical practice and mathematics pedagogy in mathematics education research. *ZDM–Mathematics Education, 52,* 1063–1074.

Zazkis, R. & Leikin, R. (2010). Advanced mathematical knowledge in teaching practice: perceptions of secondary mathematics teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(4), 263–281.

CONEXIONES EN EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR

Connections in the teacher's specialized knowledge

Caviedes, S.[a], Espinoza, G.[b]

[a] Universidad de Los Lagos, Chile
[b] Universidad Alberto Hurtado, Chile

Resumen.
El objetivo del presente taller es generar un espacio para reflexionar sobre las diferentes conexiones que contempla el MTSK a través de la identificación del conocimiento especializado que moviliza una futura maestra, cuando interpreta respuestas de alumnos a una tarea sobre área de figuras 2D. Para esto, se toman en consideración aspectos teóricos y metodológicos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. Los participantes, reunidos en grupo, utilizan un instrumento con los subdominios y categorías del modelo, a fin de orientar el análisis de la interpretación realizada por la futura maestra. A partir de preguntas orientadoras, se espera discutir acerca de las conexiones matemáticas que establece la futura maestra.

Palabras clave. Conocimiento especializado del profesor, Conexiones, Área de figuras 2D, Estudiantes para maestro.

Abstract.
The aim of this workshop is to generate a space to reflect on the different connections that MTSK contemplates through the identification of the specialised knowledge that a prospective primary teacher mobilises when interpreting student responses to a task on the area of 2D figures. Theoretical and methodological aspects of the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge model are taken into consideration. The participants, gathered in a group, use an instrument with the subdomains and categories of the model, in order to guide the analysis of the interpretation made by the prospective teacher. On the basis of guiding questions, participants are expected to discuss the mathematical connections established by the prospective teacher.

Keywords. Mathematics Teachers Specialised Knowledge, connections, Area of 2D figures, prospective primary teacher.

Caviedes, S. y Espinoza, G. (2023). Conexiones en el conocimiento especializado del profesor. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 31–34). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

En el presente taller se asume el carácter especializado del conocimiento del profesor desde la perspectiva del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). Dicho modelo considera la noción de especialización como núcleo del conocimiento del profesor y, a su vez, se presenta como una herramienta metodológica que permite analizar diferentes prácticas del profesor de matemáticas a través de sus categorías (Carrillo-Yañez et al., 2018). Particularmente, se aborda el conocimiento especializado que moviliza una futura maestra cuando interpreta respuestas de alumnos a una tarea sobre área de figuras 2D. Este tipo de conocimiento ha adquirido especial relevancia, pues diversas investigaciones señalan que el proceso que realiza el profesor para interpretar respuestas de alumnos requiere de una formación intencionada para ello, de modo que el (futuro) profesor logre atribuirle significado a las producciones de los estudiantes (p.ej., Ribeiro et al., 2022). De esta forma, se constituye en un aspecto clave para evaluar y ajustar la instrucción de forma continua, a fin de enriquecer el proceso de enseñanza aprendizaje (p.e., Llinares, 2012).

En este sentido, para que los estudiantes para maestro (EPM) puedan ser capaces de interpretar tales respuestas, es necesario que cuenten con un conocimiento amplio del contenido a enseñar, que puedan establecer relaciones entre estos conocimientos y que al mismo tiempo les permita resolver las tareas que proponen a los estudiantes. Existen diversas investigaciones sobre las dificultades que tienen los EPM al momento de resolver tareas de área. Algunas de ellas muestran una tendencia de los EPM hacia el uso de fórmulas y escasas estrategias de resolución (Baturo y Nason, 1996; Caviedes et al., 2019, 2023; Runnalls y Hong, 2020, Simon y Blume, 1994) o que poseen dificultades para aceptar la propiedad de conservación del área (Hong y Runnalls, 2020) o para identificar la relación entre área y perímetro. En este contexto el taller propone dos preguntas que conducen la discusión: *¿Qué tipo conocimiento sobre el área de figuras 2D moviliza una futura maestra al interpretar respuestas de alumnos? ¿Qué conexiones se establecen en el conocimiento movilizado por la futura maestra?*

Marco teórico

Para abordar estas preguntas y desarrollar el taller, se utilizará el modelo MTSK, centrándonos en los dominios que lo conforman: el Conocimiento Matemático (MK) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) y dos de sus respectivos subdominios con sus categorías, los cuales se describen sucintamente a continuación.

Dentro del MK nos centramos en el conocimiento de los temas (KoT) y en el conocimiento de la estructura de la matemática (KSM). El KoT describe el qué y de qué manera los profesores de matemáticas conocen el contenido que enseñan, siendo una combinación entre el conocimiento que se espera que los alumnos aprendan y una comprensión más profunda, formal y más rigurosa (Carrillo-Yañez et al., 2018). El KoT incluye las categorías de: definiciones, propiedades y sus fundamentos; la fenomenología y aplicaciones; los procedimientos y sus justificaciones y los registros de representación. El KSM describe el conocimiento de los profesores sobre conexiones entre diferentes temas matemáticos (Montes et al., 2013). Se consideran cuatro categorías de conexiones: conexiones de complejidad creciente, de simplificación, auxiliares y transversales. Las conexiones de complejidad creciente (complejización) y de simplificación se relacionan con conocimientos elementales y avanzados, es decir, los conocimientos avanzados permiten a los profesores un tratamiento de la matemática elemental desde una perspectiva avanzada; los conocimientos elementales, un tratamiento de la matemática avanzada desde una perspectiva elemental (Montes et al., 2013). Las conexiones auxiliares están relacionadas con la participación de un tema en un proceso más largo (Carrillo-Yañez et al., 2018), es decir, con considerar el apoyo de una noción o procedimiento para la comprensión de otro concepto (Policastro et al., 2019). Las conexiones transversales se refieren a los conocimientos que fundamentan el establecimiento de relaciones entre varios temas con rasgos comunes (Montes et al., 2013).

Respecto al PCK, nos interesa el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas

(KFLM) y el conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas (KMT). El KFLM engloba los conocimientos asociados a las características inherentes al aprendizaje de las matemáticas, poniendo el foco en el contenido matemático (como objeto de aprendizaje). El KFLM incluye cuatro categorías: teorías de aprendizaje de las matemáticas; fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas; la manera en que los alumnos interactúan con el contenido matemático y los aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas. El KMT se refiere a los conocimientos sobre la enseñanza intrínsecamente ligados al contenido y considera tres categorías: teorías de enseñanza; recursos de enseñanza y estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.

Aunque se han descrito cuatro de los subdominios del MTSK, se deja abierta la posibilidad a identificar conocimientos en los otros subdominios del modelo.

Metodología del Taller

Los participantes se reunirán en grupos y, usando el modelo MTSK como instrumento (Tabla 1), identificarán el conocimiento especializado que moviliza una futura maestra, cuando interpreta respuestas de alumnos (de 13-14 años) a una tarea sobre área de figuras 2D. En ello, se hará especial énfasis en las conexiones que se establecen en el conocimiento movilizado.

Los datos utilizados provienen de un trabajo doctoral presentado en la Universitat Autònoma de Barcelona el año 2022, cuyo título es: Caracterización del conocimiento especializado sobre el área de figuras planas en estudiantes para maestro.

Tabla 1. Protocolo para el análisis del MTSK.

	Conocimiento Matemático	
Sub dominio	**Descripción**	**Categorías**
Conocimiento de los Temas (KoT)	Corresponde al conocimiento del profesor sobre el tema, su red conceptual y aplicaciones.	Representaciones, procedimientos, definiciones, conceptos, propiedades y sus fundamentos, conexiones intraconceptuales.
Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM)	Corresponde al conocimiento de las conexiones del tema con otros o su progresión epistemológica.	Conexiones de complejización, conexiones de simplificación, conexiones auxiliares, conexiones transversales.
Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM)	Corresponde al conocimiento sobre la forma en que se produce, explora y comunica en matemáticas.	*Prácticas de demostrar, definir, resolver problemas; comunicar o lenguaje matemático.
	Conocimiento Didáctico del Contenido	
Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT)	Corresponde al conocimiento de los temas como objetos de enseñanza.	T. de enseñanza Recursos materiales o virtuales Estrategias, tareas, actividades.
Conocimiento de Características del Aprendizaje de la Matemáticas (KFLM)	Corresponde al conocimiento de los temas como objetos de aprendizaje.	T. de aprendizaje Fortalezas y dificultades del aprendizaje Formas de interacción Aspectos emocionales del aprendizaje.
Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS)	Corresponde al conocimiento del profesor sobre lo que el estudiante debe o puede alcanzar en determinado nivel.	Expectativas de app. Nivel de desarrollo C-P Secuenciación de temas.

Se prevé que los participantes logren identificar la interpretación realizada por la EPM basada en conocimientos especializados de los subdominios descritos. En especial, conocimiento sobre la estructura del área -KSM- en términos de las conexiones que se requieren para resolver las tareas en relación con el KFLM. Además, se prevé que los participantes identifiquen que el KMT proporciona herramientas para el análisis de los errores en la interpretación de la futura maestra, así, como para la toma de decisiones y la reorientación de dichos errores mediante estrategias de enseñanza. Por último, se prevé que los participantes identifiquen que, tanto las decisiones tomadas como los errores identificados en el análisis, podrían estar vinculados con la movilización estratégica del conocimiento matemático de la EPM -KoT y KSM.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Baturo, A. y Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational studies in mathematics, 31*(3), 235-268. https://doi.org/10.1007/BF00376322

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Agular-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2019). Conexiones matemáticas que establecen maestros en formación al resolver tareas de medida y comparación de áreas. *Praxis, 15*(1), 69-87. https://doi.org/10.21676/23897856.2984

Caviedes, S., de Gamboa, G. y Badillo, E. (2023). Preservice teachers' knowledge mobilized in solving area tasks. *Journal on Mathematics Education, 14*(1), 35-54. https://doi.org/10.22342/jme.v14i1

Liñan, M., Barrera, V. e Infante, J. (2014). Conocimiento especializado de los estudiantes para maestro: La resolución de un problema con división de fracciones. *Escuela Abierta, 17*(1), 41-63. https://doi.org/10.29257/EA17.2014.04

Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos, 10*, 53-62.

Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J. y Muñoz-Catalán, M. (2013). MTSK: From Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures. En B. Ubuz, C. Haser, y M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3185-3194). ERME.

Policastro, M., Mellone, M., Ribeiro, M. y Fiorentini, D. (2019). Conceptualising tasks for teacher education: from a research methodology to teachers' knowledge development. En U. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3978–3985). ERME.

Ribeiro, M., Policastro, M., Caldatto, M. y Rodriguez, A. (2022). Interpretative knowledge of perspective kindergarten and primary teachers in the context of subtraction. *Acta Scientiae, 24*(3), 1-31. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.XXXX

Runnalls, C. y Hong. D. (2020). "Well, they understand the concept of area": pre-service teachers' responses to student area misconceptions. *Mathematics Education Research Journal, 32*(4), 629-651. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00274-1

Simon, M. y Blume, G. (1994). Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(5), 472-494. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.25.5.0472

TAREFAS PARA A FORMAÇÃO E PESQUISA ESPECIALIZADA PARA UMA FORMAÇÃO ESPECIALIZANTE

Tasks for Teacher Education and specialized research towards a Teacher Education specialization

Ribeiro, M.[a], Silva, C.[a]
[a] Universidade Estadual de Campinas, Brasil

Resumen.
Efetuar pesquisa que impacte a melhoria da qualidade das propostas formativas e das discussões matemáticas que se promovem com os alunos deveria ser apanágio de todas as pesquisas no âmbito da formação (especializada) de professores. Discutimos a estrutura de um processo formativo que considera de forma imbricada as especificidades do conhecimento do professor; os contextos e as propostas formativas e a pesquisa que alimenta e é alimentada por esses contextos. Apresentam-se as Tarefas Formativas e seus elementos constituintes e a denominada Mandala de Conhecimento Especializado e, com base em propostas que formam parte da Coleção CIEspMat – Formação discutimos a essência da conceitualização e implementação de Tarefas para a Formação especializada.

Palabras clave. Tarefas para a Formação, MTSK, Mandala de Conhecimento Especializado.

Abstract.
Carrying out research aiming at improving the quality of teacher education proposals and of the mathematical discussions promoted with students should be the prerogative of all research within the scope of (specialized) teacher education. We present and discuss the structure of a teacher education process which considers in an intertwined manner the specificities of teacher's knowledge; the contexts and educational proposals and the research that feeds and is fed by these contexts. We present the Teacher Education Tasks and their constituent elements and the so-called Mandala of Perceived Specialized Knowledge and, grounded on proposals that form part of the CIEspMat Collection – Teacher Education, we will discuss the essence of the conceptualization and implementation of Tasks for specialized Teacher Education.

Keywords. Tasks for Teacher Education, MTSK, Mandala of Perceived Specialized Knowledge.

Ribeiro, M. y Silva, C. (2023). Tarefas para a formação e pesquisa especializada para uma formação especializante. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 35–38). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Uma breve introdução

Parece de certa forma óbvio, mas até o que é óbvio para aqueles que desenvolvem pesquisa e formação efetivamente especializada, muitas vezes necessita ser dito, escrito e repetido de modo que passe a ser óbvio para todos! Ao desenhar e estruturar uma formação de professores especializados, que buscam fazer o que ainda não foi feito – possibilitar que os alunos entendam matemática e passem a Pensar matematicamente (e.g., Ribeiro, 2021) torna-se necessário considerar as especificidades da nossa prática matemática enquanto professores; a centralidade das tarefas na prática do professor – e portanto, também na formação; as especificidades da formação que necessita desenvolver o Conhecimento Especializado e Interpretativo do professor (Carrillo et al., 2018; Di Martino et al., 2020) para efetivar essas práticas especializadas e as especificidades do conhecimento do formador.

Com esse fito, e por assumirmos a prática e a formação como origem e destino da pesquisa, desenvolvemos as denominadas Tarefas para a Formação – TpF (Ribeiro et al., 2021) de professores que consideram a pesquisa especializada de forma imbricada como modo de pensar e implementar as propostas formativas. Essas TpF são elementos de uma dimensão mais ampla (as Tarefas Formativas) no âmbito do grupo de Pesquisa e Formação CIEspMat[1] , e sempre consideram que para efetivar a transformação das práticas para a melhoria das aprendizagens matemáticas, conhecimento pedagógico não se ensina, mas vive-se.

Consideram-se as especificidades do conhecimento do professor na perspectiva do *Mathematics Teacher's Specialized Knoweldge* – MTSK (Carrillo et al., 2018) e do Conhecimento Interpretativo (Di Martino et al., 2020), e neste workshop iremos vivenciar diferentes etapas e processos envolvidos na preparação de Tarefas para a Formação e o papel da pesquisa especializada de forma a possibilitar generalizações nas formas de estruturar as TpF e as discussões associadas em cada tópico matemático.

Uma breve discussão teórica

Os alunos revelam dificuldades em vários (demasiados) tópicos matemáticos e essas dificuldades indicam áreas necessárias de formação especializada por parte dos professores que permita desenvolver o seu conhecimento para fazerem o que ainda não foi feito – que todos possam entender matemática e pensar matematicamente. Assim, a pesquisa com foco nas especificidades do conhecimento do professor deverá informar também quais as dimensões fundamentais a incluir em cada discussão em contextos formativos, de forma a sustentar uma prática especializada.

Assumimos os seis subdomínios do MTSK (Carrillo et al., 2018) de forma integrada, e o conteúdo de cada categoria contribui para refinar as questões a incluir nas Tarefas para a Formação – TpF (Ribeiro et al., 2021) e a direcionar o foco de atenção assumido em cada uma dessas Tarefas. Por assumirmos, de forma imbricada, pesquisa e formação, a TpF sempre tem associada uma questão de pesquisa que contribui para direcionar o foco de atenção prioritária e que obriga a uma discussão teórica prévia a conceitualização da tarefa; um documento com as cinco dimensões centrais para a implementação em sala de aula da tarefa dos alunos; um documento do professor e um documento do formador. Estes quatro documentos formam, em conjunto a Tarefa Formativa e buscam possibilitar que um formador que desenvolva pesquisa com foco no MTSK ou no Conhecimento Interpretativo possa implementar a TpF de modo a alcançar os objetivos formativos delineados.

(i) Tarefa para Formação (TpF) – corresponde a tarefa que vai sustentar as discussões no contexto formativo e é uma tarefa que sempre parte de uma situação da prática do professor e busca possibilitar regressar a essa prática melhorada. Tipicamente contém uma tarefa para os alunos (de introdução a algum tópico

[1] O CIEspMat é um grupo de Pesquisa e Formação que desenvolve trabalhos focados no desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e futuro professor de e que ensina matemática – desde a Educação Infantil ao Ensino Médio. www.ciespmat.com.br

matemático) e um conjunto de questões direcionadas a discutir e desenvolver algumas das dimensões do conhecimento especializado ou interpretativo do professor;

(ii) cinco dimensões para a implementação da tarefa do aluno – referem-se a um conjunto de indicações para que a tarefa dos alunos possa ser implementada associada a possibilitar que os alunos entendam e pensem matematicamente. As cinco dimensões referem-se a: **objetivo de aprendizagens matemáticas** que se persegue com a tarefa: indicação de qual o objetivo de aprendizagens matemáticas temos coma tarefa, ou seja, que conhecimento matemático se espera que os alunos desenvolvam durante a resolução e a discussão da tarefa; **habilidade da BNCC[2] associada à tarefa**: identificar qual habilidade, indicada pela BNCC, pretendemos desenvolver com a implementação desta tarefa – é algo bastante mais restrito que o objetivo de aprendizagens matemáticas; **recursos necessários e forma(s) de trabalho dos alunos**: considerar quais os recursos físicos e tecnológicos necessários para a implementação da tarefa da forma como esperamos que essa implementação ocorra; **maiores possíveis dificuldades dos alunos**: são entendidas aqui como quais as principais dificuldades específicas de matemática que os alunos podem revelar durante a implementação e a discussão da tarefa; **comentários para a implementação**: incluem "toda" a informação que se considera necessária e suficiente para permitir que qualquer professor, que tenha previamente participado das discussões associadas a desenvolver o seu conhecimento especializado no âmbito do tópico específico, possa implementar a tarefa ou a brincadeira associada ao objetivo matemático com o qual foi elaborada.

(iii) documento do professor – refere-se a uma síntese do conhecimento matemático especializado que se configura como necessário e suficiente para que o professor possa implementar a tarefa dos alunos. Este documento associa-se a um dos mais recentes resultados de pesquisa com foco no conhecimento dos alunos e do professor no âmbito do tópico específico em discussão e a sua elaboração relaciona-se a pesquisa que se realiza associada a cada TpF.

(iv) documento do formador – corresponde ao documento destinado ao formador e que, sendo este já conhecedor e pesquisador do conhecimento interpretativo e especializado do professor, mesmo que em outro tópico, possa implementar a TpF e desenvolver a formação associada aos objetivos formativos delineados para formação específica.

Estas ideias das especificidades das Tarefas Formativas associam-se a necessidade de um fazer diferente do que tem sido feito e, portanto, assumir uma perspectiva de inovação (Ribeiro y Silva, 2024) onde não basta uma discussão pedagógica geral, mas demanda considerar as especificidades do conhecimento matemático e pedagógico envolvido e requerido para as discussões em cada tópico e tema matemático. E quando falamos em formação com foco na melhoria da prática, pelo desenvolvimento do conhecimento do professor, sempre necessitamos estabelecer um ponto de partida que possa ser posteriormente comparável em distintos momentos. Com esse intuito desenvolvemos um instrumento para avaliar o conhecimento percebido pelos (futuros) professores no momento inicial e final de cada encontro ou formação. Essa conceitualização considera como base as ideias e representação pentagonal do modelo do MTSK e é denominada de Mandala de Conhecimento Especializado Percebido (Figura 1).

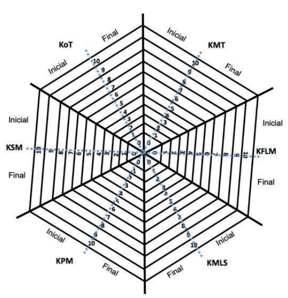


Figura 1. Mandala de Conhecimento Especializado Percebido

[2] Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o atual documento curricular oficial brasileiro.

Consideram-se os seis subdomínios do conhecimento especializado e, em cada um deles, 10 níveis de conhecimento e, por ser um contexto avaliativo (conhecimento percebido), considera-se o conhecimento percebido antes e depois da formação, o que possibilita efetuar comparações entre esses dois momentos e avaliar a própria formação e o desenvolvimento do conhecimento efetivado ao analisar conjuntamente os resultados da Mandala com os comentários e produções dos professores.

Um ponto de partida

Considerando as dificuldades dos alunos como gênese para as discussões, iremos assumir como ponto de partida as discussões em torno dos racionais e, a partir de uma Tarefa para os alunos iremos percorrer todas as etapas de conceitualização de uma TpF e dos demais documentos associados que configuram a Tarefa Formativa. Este é entendido como um contexto formativo especializante e as discussões buscam possibilitar que os participantes possam, posteriormente, implementar essas etapas em outros temas e tópicos matemáticos que estejam a pesquisa e que esse processo de conceitualização da TpF contribua para refinar também os instrumentos de coleta de informação para as pesquisas com foco nas especificidades do conhecimento matemático e pedagógico do (futuro) professor.

Agradecimentos

O presente trabalho forma parte do projeto de pesquisa financiado pelo CNPq “Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e suas relações com as Tarefas para a Formação no âmbito da Medida, e do Pensamento Algébrico, Geométrico e Estatístico” (404959/2021-0).

Referências

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilas-Gonzáles, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, C. (2018). The mathematics teacher’s specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Contreras, L. C., Montes, M., Muñoz-Catalán, M. C., y Joglar, N. (2017). Fundamentos teóricos para conformar un modelo de conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas. En J. Carrillo y L. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 11–25). CGSE.

Di Martino, P., Mellone, M., y Ribeiro, M. (2020). Interpretative knowledge. En S. Lerman (Org.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 424-428). 1ed.: Springer.

Ribeiro, M. (2021). *Pensar matematicamente envolvendo diferentes formas de ver e de contar e as conexões com o pensamento algébrico* (Vol. 4). Cognoscere.

Ribeiro, M., Almeida, A., y Mellone, M. (2021). Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. *Perspectivas da Educação Matemática, 14*(35), 1-32.

Ribeiro, M., y Silva, C. (2024, en prensa). Especificidades do Conhecimento Interpretativo do professor e das Tarefas para a Formação como elementos para práticas criativas e matematicamente inovadoras. *Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação, 18.*

(DES)HACIENDO MATEMÁTICA. LA COLABORACIÓN AL SERVICIO DEL DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA ENSEÑAR

(Des)Haciendo matemática: Collaboration as a tool for developing teaching mathematical knowledge

Soto, G.[a], Díaz, A. L.[a], Gómez, E. [a], Negrette, C. [a], Carrasco, L. [b], Espinoza, L.[b], Rodriguez, G. [b]

[a] Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Argentina
[b] Ministerio de Educación de la Provincia de Chubut, Argentina

Temática: 1 – MTSK en la formación docente

Resumen.
El conocimiento para enseñar es una herramienta de formación que tensiona constantemente con el conocimiento derivado de la propia práctica. Las comunidades de práctica son espacios naturales para identificar y analizar dichas tensiones. En este trabajo utilizamos el modelo MTSK para analizar las prácticas matemáticas de quienes integran una comunidad de práctica profesional para caracterizar los saberes matemáticos que conviven en la transición de la escuela primaria a la escuela secundaria.

Palabras clave. Comunidades de práctica profesional, MTSK, Colaboración, Transición entre niveles educativos.

Abstract.
Knowledge for teaching is a training tool that is constantly in tension with the knowledge derived from one's own practice. Communities of practice are natural spaces for identifying and analyzing such tensions. In this paper we use the MTSK model to analyze the mathematical practices of those participating in a community of professional practice to characterize the mathematical knowledge that coexists in the transition from primary school to secondary school.

Keywords. Professional learning communities, MTSK, Collaboration, Transitions between educational levels.

Soto, G., Díaz, A. L., Gómez, E. , Negrette, C. , Carrasco, L. , Espinoza, L. y Rodriguez, G. (2023). (Des)haciendo matemática. La colaboración al servicio del desarrollo del conocimiento matemático para enseñar. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 39– 46). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

La tarea docente se caracteriza por la constante toma de decisiones acerca de qué, cómo y para qué enseñar lo que se enseña, involucrando la especificidad de contenido, los contextos en los que tiene lugar la enseñanza y las características de los sujetos de aprendizaje. Enseñar hoy requiere poder desenvolverse cómodamente en aulas complejas e hiperconectadas, inmersas en un ecosistema alterado, que promueven emergentes individuales y colectivos difíciles de predecir (Maggio, 2023). Existe una demanda permanente de docentes en ejercicio profesional por aprender más matemática para mejorar sus prácticas y así poder enfrentar los desafíos de enseñar hoy. Sin embargo, sabemos que saber más matemática no implica buenas prácticas de enseñanza (Opfer y Pedder, 2011; Carrillo et al., 2018).

Los saberes profesionales que se ponen en juego en el acto de enseñar están determinados por la disciplina que se enseña (Montes et al., 2021), y se definen como las transformaciones que las personas que ejercen la docencia hacen del contenido en representaciones didácticas que utilizan para su enseñanza (Ma, 2010; Soto, 2015; González y Soto, 2019, Soto et al., 2019). La matemática escolar (ME) y la matemática académica (MA) forman parte de estos saberes (Gorgorió y Albarracín, 2019): la MA se define como un conjunto de saberes asociados a la construcción de un campo científico producido por matemáticos y reconocido como tal (David et al., 2013); la ME se define como un campo de saberes producto de la historia de las instituciones escolares en donde se las enseña (Moreira y David, 2005). Cuando los saberes profesionales se ponen en acción, surgen tensiones entre la MA y la ME que inciden directamente en las prácticas docentes (Soto et. al, 2017). El modelo del Conocimiento Especializado del profesor de Matemática (MTSK, por sus siglas en inglés) es una herramienta que permite estudiar y caracterizar los saberes que se ponen en juego durante el acto de enseñar. Este modelo relaciona la ME, la MA y las creencias de quien enseña respecto a la disciplina, su enseñanza y aprendizaje. Resulta evidente la importancia de estudiar, en espacios de formación adecuados, las tensiones entre la MA, la ME y las creencias en la construcción de saberes profesionales para enseñar a través del modelo MTSK, para poder utilizarlo como un recurso para el desarrollo profesional docente.

La tarea docente no se da en forma aislada, está contextualizada, se realiza en un contexto histórico y social determinado que le da una estructura y significado. Las comunidades de práctica son ambientes naturales para la reflexión sobre los saberes que subyacen a la práctica docente. En estas comunidades, la práctica docente es fuente de coherencia y cohesión, y se sostienen en el tiempo a través del compromiso mutuo de las personas participantes, la negociación de objetivos comunes y el desarrollo de recursos compartidos para dar significado a los aprendizajes que ocurren en dicha comunidad (Goos, 2020). Los saberes emergentes de la comunidad siempre se construyen y se modifican en la acción, suponiendo entonces un estado permanente de aprendizaje por parte de las personas integrantes, permitiendo desafiar el estatus quo tanto en la escuela como en la formación (Fiorentini, 2013). Una comunidad de aprendizaje profesional (PLC, por sus siglas en inglés) es una comunidad de práctica en donde el aprendizaje permite el empoderamiento profesional de las personas integrantes: adquieren seguridad y competencia en el uso del MTSK, y lo utilizan para justificar sus decisiones profesionales (Brodie, 2020).

El espacio “(Des)haciendo matemática de sexto a primero ESB” es una PLC creada en 2017, a partir de una iniciativa conjunta de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco y la Supervisión Técnica Seccional Región VI Educación Primaria del Ministerio de Educación de la Provincia de Chubut (Soto et al., 2020). El foco de esta PLC es discutir sobre el diseño e implementación de actividades que ayuden a los estudiantes a transitar el cambio de la escuela primaria a la escuela secundaria. En este trabajo presentamos resultados de nuestra investigación sobre las características de los saberes profesionales de docentes de primaria y secundaria, a partir de la resolución colaborativa de problemas de matemáticas.

Marco Teórico

Para poder describir el proceso de desarrollo profesional que ocurre en una PLC y comprender cómo evolucionan los saberes profesionales para enseñar, es necesario identificar elementos teóricos adecuados. Cualquier modelo o constructo teórico para analizar saberes para enseñar debe considerar los saberes, creencias y experiencias de práctica que los docentes han acumulado a lo largo de su carrera profesional (Opfer y Pedder, 2011). Matos y colaboradores (2015) destacan que “cualquier herramienta de desarrollo profesional debe basarse en las prácticas matemáticas de los docentes” (p. 169). En este sentido, utilizamos el modelo MTSK, desarrollado por Carrillo et al. (2018). Este modelo define dos dominios principales del conocimiento puesto en acción por docentes de matemática: el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido, cada uno de los cuales se subdivide en tres categorías (Figura 1).

El conocimiento matemático abarca el conocimiento docente de los tópicos/temas de matemática (KoT, por sus siglas en inglés), cómo se entienden y enseñan; el conocimiento de las estructuras (KSM, por sus siglas en inglés), se refiere a las relaciones que se establecen entre los tópicos que se enseñan; y el conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM, por sus siglas en inglés), se relaciona con el tipo de trabajo matemático que realizan quienes enseñan matemática. En cuanto al conocimiento didáctico del contenido, el modelo MTSK considera tres subdominios: el conocimiento de las características del aprendizaje de la matemática (KFLM, por sus siglas en inglés), referido al conocimiento sobre cómo se piensan y construyen conceptos e ideas matemáticas; el conocimiento de la enseñanza de la matemática (KTM, por sus siglas en inglés), se relaciona con el conocimiento individual o institucional de los paradigmas (teorías) de enseñanza de la matemática; y el conocimiento de los estándares de aprendizaje (KMLS, por sus siglas en inglés), que se refiere al conocimiento del currículum, los objetivos de aprendizaje y la promoción en los diferentes niveles educativos. Además, dado que las creencias sobre la matemática y su enseñanza influyen constantemente en la práctica docente, el modelo MTSK también incluye una dimensión de creencias que atraviesa todos los subdominios (Figura 1, panel izquierdo).

La complejidad de las interacciones profesionales y su impacto en la reflexión colectiva sobre la práctica profesional requiere identificar dimensiones que permitan caracterizar el aprendizaje en una PLC. Campbell (2009) identifica tres etapas que atraviesa el trabajo colaborativo en una PLC. En la etapa de colaboración, se presta atención a tres elementos que emergen de la interacción: las creencias sobre la colaboración, los valores, los objetivos y los roles compartidos. En la etapa de aprendizaje docente, se centra en la reflexión conjunta sobre la práctica basada en resultados y en el aprendizaje. Y en la etapa de aprendizaje especializado, se enfoca en el contenido, el uso de recursos para la práctica y el diseño e implementación de prácticas innovadoras.

En nuestra PLC, la resolución de problemas se ha convertido en un lenguaje común para dialogar profesionalmente sobre las tensiones entre la práctica profesional y los saberes para enseñar (Díaz et al., 2021), lo que nos ha permitido identificar dimensiones del MTSK en las etapas de aprendizaje colaborativo. En la etapa de colaboración, el enfoque de reflexión se centra en los acuerdos sobre las creencias de los miembros de la comunidad respecto a la matemática, su enseñanza y su aprendizaje (Carrasco et al., 2021). En la etapa de aprendizaje docente, los acuerdos se basan principalmente en el dominio del conocimiento didáctico del contenido en el modelo MTSK. Por último, en la etapa de aprendizaje especializado, el enfoque se centra en el dominio del conocimiento matemático del modelo MTSK.

Para la presentación de algunos resultados obtenidos en las implementaciones del dispositivo, usamos la conceptualización de la teoría de sistemas de actividad (Engeström, 2001). En la Figura 1 (panel derecho), el conocimiento especializado del profesor de matemática (nuestro objeto de estudio) promueve la actividad de los sujetos intervinientes (docentes que intervienen en la comunidad de práctica profesional). Esta actividad está mediada por la resolución de problemas (artefactos/instrumentos) que se realiza en una comunidad de práctica profesional, reglada por el principio de simetría (reglas/normas) y facilitada/moderada por el grupo de investigadores (división del trabajo). En esta configuración identificamos cuatro triángulos como fuentes de información, que servirán para construir los datos para su posterior análisis. El triángulo 1, llamado de producción, es la fuente de información respecto a las dimensiones del conocimiento matemático que las y los docentes intervinientes ponen en juego durante la resolución de problemas. El triángulo 2, llamado de intercambio, es fuente de información respecto a las creencias puestas de manifiesto respecto al conocimiento matemático y su enseñanza que se ponen en juego durante la reflexión sobre la resolución de problemas realizada (Soto et al., 2020). El triángulo 3, llamado de consumo, es la fuente de información respecto a las dimensiones del conocimiento pedagógico del contenido matemático que se manifiesta en la elaboración del cuaderno de observaciones y la presentación de los resultados de la implementación. El triángulo 4, asociado a la distribución de las tareas durante la actividad, no ha sido parte del objeto de estudio del presente proyecto.

Metodología

Realizamos la investigación con el propósito de modificar ideas previas, comprender y aprender de los aciertos y errores que observamos en nuestra práctica docente. La investigación del desarrollo es una forma de investigación-acción descrita por Goodchild (2008), que se compone de dos ciclos distintos: el ciclo de desarrollo y el ciclo de investigación, los cuales se alternan a lo largo de todo el proceso investigativo. Durante el ciclo de desarrollo, nos enfocamos en resolver problemas en la PLC y decidir de manera colectiva, su pertinencia para ser implementados en el aula. Estos problemas son seleccionados por un grupo de investigadores y facilitadores (autores del presente trabajo), que además tiene la tarea de gestionar la resolución de los problemas y mantener el principio de simetría en las discusiones en los encuentros sincrónicos. Se utilizan *cuadernos de observación* como herramientas para la planificación conjunta de la implementación de estos problemas, similares al guión de tareas presentado en Montes et al. (2021, p. 90), y los resultados de dichas implementaciones se presentan en la PLC para la reflexión colaborativa. A través de la negociación de significados inherentes al trabajo colaborativo, avanzamos hacia el ciclo de investigación, donde estudiamos los fundamentos teóricos relacionados con la forma en que los miembros de la comunidad se alinean críticamente dentro de ella (Jaworski et al., 2017). En este trabajo, utilizamos principalmente la observación no participante, directa y de enfoque cualitativo como herramienta principal para la recolección de información para construir los datos a analizar (Yuni y Urbano, 2014).

La implementación del dispositivo "(Des)haciendo matemática de sexto a primero ESB", fuente de información para la presente investigación, se desarrolla anualmente en un total de diez encuentros sincrónicos y participan docentes en ejercicio de los niveles primario y secundario. La convocatoria para participar del dispositivo es abierta, y en vista que cuenta con el aval ministerial, tenemos una participación constante de quince docentes en cada implementación del mismo.

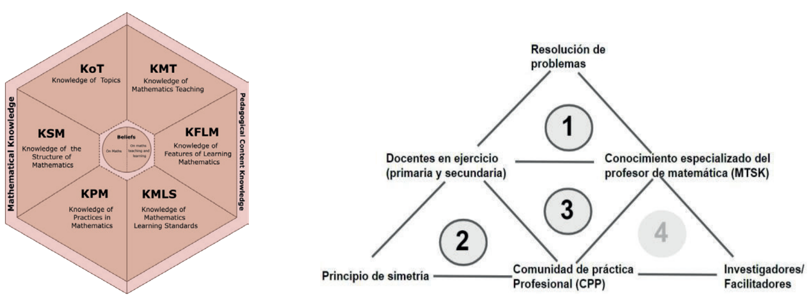


Figura 1. Panel izquierdo. Modelo MTSK, obtenido de Carrillo et al. (2018). Panel derecho. Conceptualización de las actividades a desarrollar en el dispositivo de desarrollo profesional.

Resultados

A continuación, presentamos resultados a partir del análisis de datos basados en la conceptualización descrita en la Figura 1 (panel derecho).

Caso 1: Problema de los vasos

Uno de los problemas que los docentes resolvieron fue el siguiente (Carrasco et al., 2021):

> Tres hombres reciben como pago por sus servicios veintiún vasos iguales, siete de ellos llenos de vino, otros siete medios llenos de vino y los restantes vacíos. ¿Cómo deben dividir los vasos de manera tal que cada uno de ellos reciba la misma cantidad de vasos y de vino?

Durante la resolución de este problema, el siguiente diálogo ocurrió entre DA (docente de primaria) y DS (docente de secundaria).

> 1.DA: Nosotros obtuvimos una solución gráfica ... dos hombres reciben cada uno tres vasos llenos, uno medio lleno y tres vacíos. El restante recibe un vaso lleno, cinco vasos medio llenos y un vaso vacío.
> 2.DS: No me parece correcta la respuesta. A mí me dio 3,5
> 3.DA: Ah... Entonces mi respuesta debe estar mal

El docente DS aseguraba la validez de su respuesta, y su actitud empoderada por la utilización de algoritmos y resultados matemáticos, causó que DA, a pesar de haber encontrado la solución, la desestimara. Los docentes de nivel secundario validan sus respuestas a partir del uso de algoritmos, cálculos, evidenciando el KoT, subdominio de experticia de docentes de este nivel. Mientras que los docentes de primaria, mediante el uso de ejemplos que sirvieron para justificar cada una de sus decisiones, reflejaron saberes asociados al dominio KPM. La situación descrita en el diálogo, cuya ocurrencia fue alta, pone de manifiesto que las creencias de docentes de primaria sobre el predominio del KoT, sobre el KPM pueden inhibir la colaboración.

Caso 2: Problema de los restos

A partir de la búsqueda de soluciones al siguiente problema (Soto et al., 2020),

> Encontrar un número que dividido por 2 tenga resto 1, que dividido por 3 tenga resto 2, que dividido por 4 tenga resto 3, que dividido por 5 tenga resto cuatro y que dividido por 6 tenga resto 5.

Se suscitó el siguiente diálogo entre una docente de primaria (DC) y uno de los facilitadores (DR) respecto al significado de los criterios de divisibilidad y sus posibles usos.

> DR: ¿Por qué usaron criterios de divisibilidad?
> DC: Porque lo usamos para hacer la división exacta.
> DR: Pero con 59, ¡no hay división exacta! ¿Por qué se pueden usar los criterios de divisibilidad?

Los docentes de nivel primario, a partir de la búsqueda de números que satisfagan las condiciones del problema (subdominio KPM), encontraron en los criterios de divisibilidad una herramienta que tornó esta búsqueda más eficiente. En contraste, los docentes de secundaria intentaban formular ecuaciones o encontrar algoritmos (subdominio KoT) que les permitieran hallar una solución. Esto permitió a los facilitadores visibiliza relaciones entre estos subdominios. Más aún, la discusión respecto a la unicidad de la solución movilizó saberes asociados al subdominio KSM.

Caso 3: Problema de la representación gráfica de operaciones

La aparición de dos resoluciones distintas para el problema (Díaz et al., 2021)

> Representar gráficamente la operación 4/9x3,

una representación asociada al resultado de la cuenta (12/9) y otra asociada a la operación (4/9+4/9+4/9), se constituyó en un indicador de las diferencias en los saberes de las prácticas matemáticas (KPM) que se ponen en juego en la escuela primaria y secundaria. A partir de la reflexión colaborativa alrededor de las distintas representaciones surgidas, se diseñaron colaborativamente tres problemas para implementar (triángulo 3, Figura 1, panel derecho), cuyo objetivo era analizar qué representaciones aparecían en las producciones de estudiantes en el aula:

> Una fábrica tiene tres tanques de agua. De cada uno se consume 4/9 de su capacidad por día. ¿Cuánto se consume en total diariamente?
> Una fábrica tiene un tanque de agua que consume 4/9 de su capacidad diariamente. ¿Cuánto se consume por tres días?
> Una fábrica tiene un tanque de agua que consume 4/9 de su capacidad diariamente. ¿En cuántos días se vaciará?

El análisis de las producciones de los estudiantes de los docentes participantes (tanto de secundaria como de primaria) puso en evidencia que el sentido de la multiplicación como sumas repetidas, dominante en la escuela primaria, prevalece sobre otros sentidos de la multiplicación en el nivel secundario. Esto llevó a los docentes de nivel secundario a reflexionar sobre sus prácticas debido a que el sentido geométrico de la multiplicación (asociado a áreas de rectángulos) no aparecía en las producciones de sus estudiantes.

Comentarios finales

Los cambios en las prácticas se producen cuando los docentes se involucran activamente en la tarea (Opfer y Pedder, 2011). El dispositivo '(Des) Haciendo Matemática desde sexto a primero ESB' se ha consolidado como una PLC, innovadora en su origen ya que surgió desde una demanda puntual de un grupo de docentes en ejercicio para el diseño de actividades para la transición que los estudiantes experimentan desde el nivel primario al secundario en el sistema educativo argentino (Attard, 2010, Robutti et al., 2016). A lo largo de su implementación, se ha observado un alineamiento crítico de los miembros de esta PLC pues los saberes emergentes se vuelven parte de sus identidades profesionales, similar a la idea de la concientización de Paulo Freire, pero en comunidades de práctica. El principio de simetría ha promovido el intercambio profesional, donde todos tienen derecho a expresar sus opiniones en un ambiente seguro y confiable para construir conocimiento para enseñar (Climent et al., 2020).

El uso del modelo MTSK nos ha permitido caracterizar las prácticas matemáticas que conviven en la transición entre la escuela primaria y la escuela secundaria: la búsqueda de casos particulares, ejemplos y contraejemplos es la práctica matemática típica de la escuela primaria para resolver problemas (subdominio KPM). Por otro lado, la búsqueda de resultados matemáticos para la resolución de problemas es una práctica típica de la escuela secundaria (subdominio KoT). Estas diferencias en los saberes provocan discontinuidades en las trayectorias escolares y nos han permitido visibilizar la ausencia del modelo geométrico de la multiplicación en la escuela secundaria, disparando discusiones acerca del subdominio KMT del MTSK.

Finalmente, deseamos destacar el coraje de aquellos que han participado en este dispositivo de formación, superando las coyunturas culturales e institucionales, con el fin de reflexionar y construir colectivamente innovaciones que impactan en nuestras prácticas. De esta manera, navegamos junto a colegas y estudiantes, afrontando sin contratiempos los desafíos que nuestra apasionante profesión nos presenta a diario.

Referencias

Attard, C. (2010). Students' experiences of mathematics during the transition from primary to secondary school. En L. Sparrow, B. Kissane y C. Hurst (Eds.), *Shaping the Future of Mathematics Education* (pp. 53–60). MERGA Inc.

Brodie, K. (2020). Resources For and From Collaboration: A Conceptual Framework. En H. Borko y D. Potari (Eds.), *The Twenty Fifth ICMI Study. Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups* (pp. 37-48). National and Kapodistrian University of Athens.

Campbell, M. (2009). Mathematics teachers and professional learning communities: understanding professional development in collaborative settings. En L.S. Swars, D.W. Stinson y S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 956-964). Georgia State University.

Carrasco, L., Díaz, A.L., Espinoza, L., Gómez, E., Negrette, C., Rodriguez, G. y Soto, G. [Canal Gabriel Rubén Soto] (12 de septiembre de 2021). Caracterización de las prácticas matemáticas en la transición de la escuela primaria a la escuela secundaria [Archivo de video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=dwkBjJ3CDyY

Carrillo-Yañez, J., Climent, C., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, R., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Climent, N., Codes, M. y Carrillo, J. (2020). Mathematics teachers' professional development: principles and challenges in a collaborative setting. En H. Borko y D. Potari (Eds.), *The Twenty-Fifth ICMI Study. Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups* (pp. 270-277). National and Kapodistrian University of Athens.

David, M.M., Moreira, P. y Tomaz, V. (2013). Matemática escolar, matemática acadêmica y matemática do cotidiano: uma teia de relações sob investigação. *Acta Scientiae, 15*(1), 42-60.

Díaz, L., Gómez, E., Negrette, C. y Soto, G. [Canal La profe Lu] (11 de septiembre de 2021). Oportunidades de aprendizaje colaborativo docente en la transición de la Escuela Primaria a la Secundaria [Archivo de video]. YouTube. https://qrcd.org/3jhK

Engeström, Y. (2001). Expansive Learning at Work: toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work, 14*(1), 133-156. https://qrcd.org/3jgd

Fiorentini, D. (2013). Learning and professional development of the mathematics teacher in research communities. *Sisyphus: Journal of Education, 1*(3), 152-181.

González, M. y Soto, G. (2019). La construcción del conocimiento matemático para enseñar en la formación del profesorado. En N. Sgreccia (Comp.), *Memorias Primeras Jornadas de Práctica Profesional Docente en Profesorados Universitarios de Matemática* (pp. 76-88). Asociación de Profesores de la Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario.

Goodchild, S. (2008). A quest for "good" research. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The Mathematics Educator as a Developing Professional* (pp. 201-220). Sense Publishers.

Goos, M. (2020). Communities of Practice in Mathematics Teacher Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education.* Second Edition (pp. 107-110). Springer.

Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2019). El conocimiento matemático previo a la formación inicial de los maestros: necesidad y concreción de una prueba para su evaluación. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (Eds.), *Investigación Sobre el Profesor de Matemáticas: Formación, Práctica de Aula, Conocimiento y Competencia Profesional* (pp. 111-132). Ediciones Universidad Salamanca.

Jaworski, B., Chapman, O., Clark-Wilson, A., Cusi, A., Esteley, C., Goos, M., Isoda, M., Joubert, M. y Robutti, O. (2017). Mathematics teachers working and learning through collaboration. En G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 261-276). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3_1

Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* (2a Ed.). Routledge.

Maggio, M. (2023). *Híbrida: enseñar en la Universidad que no vimos venir.* (2a Ed.). Tilde Editora.

Matos, J., Powell, A. y Sztajn, P. (2015). Mathematics Teachers' Professional Development: Processes of Learning in and from Practice. En R. Even y D.L. Ball (Eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics* (pp. 167-183). Springer.

Montes, M., Pascual, M. I. y Climent, N. (2021). Un experimento de enseñanza en formación continua estructurado por el modelo MTSK. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 24*(1), 83-104. https://doi.org/10.14482/INDES.30.1.303.661

Moreira, P. y David, M.M. (2005). O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. *Revista Brasileira de Educação, 28*(1), 50-61.

Opfer, V. y Pedder, D. (2011). Conceptualizing teacher professional *learning. Review of Educational Research, 81*(3), 376-407.

Robutti, O., Cusi, A., Clark-Wilson, A., Jaworski, B., Chapman, O., Esteley, C., Goos, M., Isoda, M. y Joubert, M. (2016). *ICME International Survey on Teachers Working and Learning Through Collaboration: June* 2016. *ZDM -Mathematics Education,* 48(5), 651–690. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0797-5

Soto, G. (2015). Matemática para enseñar o para enseñar: el caso de las fracciones. En R. Patrick y A. Ruiz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas. Volumen 3: Formación Continua* (pp. 341-350). Comité Interamericano de Educación Matemática.

Soto, G., Villagra, N. y Correa, F. (2017). La importancia de las relaciones en la práctica profesional docente. Un estudio de casos. *Yupana*, 11, 75-85.

Soto, G., Negrette, C. y Díaz, A.L. (2019). Matemática a enseñar o para enseñar: el caso del cálculo de áreas de figuras planas. *Revista Suma,* 91, 9-14.

Soto, G., Negrette, C., Díaz, A.L. y Gómez, E. (2020). I Don't Know! What Do You Think? Why? Collaborative Work Between Primary and Secondary School Teachers. En H. Borko y D. Potari (Eds.), *The Twenty-Fifth ICMI Study. Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups* (pp. 420-426). National and Kapodistrian University of Athens.

Yuni, J. y Urbano, C. (2014). *Técnicas para investigar: recursos metodológicos para la preparación de proyectos de investigación*. Brujas.

DISEÑO DE TAREAS FORMATIVAS PARA DESARROLLAR LA COMPETENCIA MIRADA PROFESIONAL

Design of training tasks to develop noticing in high school teachers

Campos-Cano, M.[a], Flores-Medrano, E. [b]

[a] Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México
[b] Universidad Complutense de Madrid, España

Temática: 1 – MTSK en la formación docente

Resumen.
Actualmente se percibe una preocupación por mejorar las estrategias de enseñanza del profesor de matemáticas, lo que implica movilizar competencias profesionales y especializadas que le permitan desarrollar su práctica. El conocimiento especializado del profesor de matemáticas respecto a la formación y seguimiento de los profesores de matemáticas es un área que está siendo explorada en la Matemática Educativa por lo que resulta de interés. Desde hace algún tiempo se viene reconociendo que el estudio de las funciones ha generado conflictos en cuanto a su enseñanza y aprendizaje por parte de los profesores y estudiantes, respectivamente. De esta manera nos proponemos diseñar tareas formativas para profesores en formación permanente de matemáticas de nivel medio superior en el tema de funciones racionales con la intención de movilizar la competencia mirada profesional.

Palabras clave. Tareas formativas, Noticing, MTSK, Función racional, Formación permanente.

Abstract.
Currently, there is a concern to improve the teaching strategies of mathematics teachers, which involves mobilizing professional and specialized competencies that allow them to develop their practice. The specialized knowledge of mathematics teachers regarding the training and support of mathematics teachers is an area that is being explored in Mathematics Education, making it of interest. For some time now, it has been recognized that the study of rational functions has generated conflicts in terms of their teaching and learning by teachers and students, respectively. In this way, we aim to design formative tasks for in-service mathematics teachers at the high school level, focusing on the topic of rational functions, with the intention of enhancing their professional knowledge and competence.

Keywords. Formative taks, Noticing, MTSK, Rational function.

Campos-Cano, M. y Flores-Medrano, E. (2023). Diseño de tareas formativas para desarrollar la competencia mirada profesional. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 47–54). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

Desde hace algún tiempo se viene reconociendo que el estudio de las funciones, y en especial el de las racionales, ha generado conflictos en cuanto a su enseñanza y aprendizaje por parte de los maestros y estudiantes, respectivamente. Diversas investigaciones (Grueso y González, 2016; Noreña, 2013) dejan ver problemáticas que atañen a las funciones racionales y en general a las funciones. Estas van desde el reconocimiento del dominio y el rango de las funciones, el comportamiento asintótico, hasta la resolución de problemas donde la función cobra un carácter de covariación.

El estudio de las funciones racionales en educación media superior en México[1] viene enmarcado en diversos programas de estudio. Por ejemplo, el programa de estudios de componente básica del marco curricular se abordan conceptos como las asíntotas, dominio, rango, gráficas de las funciones racionales. Refiriéndonos al contenido viene un apartado donde se menciona que el estudiante debe demostrar y argumentar la existencia de asíntotas en una función racional. Es importante implementar metodologías y/o actividades que permitan a los profesores conocer, desarrollar y reflexionar sobre los conocimientos y competencias profesionales que exponen en su práctica.

El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas ha sido un foco de investigación en los últimos años (Lin y Rowland, 2016). Se han realizado trabajos respecto a la formación de profesores de matemáticas tanto en formación inicial como en formación continua (Sánchez-Matamoros et al., 2015, Montes et al., 2021). Sin embargo, en formación continua hay escazas investigaciones. Las investigaciones que se han hecho de formación continua (Carrillo et al., 2020; Montes et al., 2021) han propuesto atender a la reflexión del profesor en las prácticas tanto del conocimiento matemático como del didáctico, donde los métodos usados en formación inicial y continua pueden tener paralelismos.

Existen trabajos que se han centrado en la competencia de mirada profesional (Choy et al. 2017; Dietiker et al., 2018), la cual es considerada una componente de la práctica experta. Esta competencia llamada así por la traducción de la palabra noticing se ha definido de diversas maneras, pero el tema común es cómo los maestros procesan los eventos complejos del aula (Masón, 2002; van es y Sherin, 2008). Un enfoque particular es que, los profesores noten el pensamiento matemático de los estudiantes conceptualizado como prestar atención a las estrategias de los estudiantes, interpretar la comprensión matemática de los estudiantes y decidir cómo responder sobre la base de la comprensión de los estudiantes. En este contexto, se ha hecho un énfasis en la necesidad de que los profesores basen sus decisiones de enseñanza en las características de aprendizaje de los contenidos matemáticos de sus estudiantes.

En este trabajo presentamos una propuesta de tarea formativa para desarrollar la competencia mirada profesional en profesores de nivel medio superior en el tema de funciones racionales. Cabe destacar que los profesores no están insertos en algún programa de formación, se pretende que esta tarea esté contenida en un diplomado de formación permanente.

Tareas formativas

Algunos autores (Climent y Montes, 2019) mencionan que las tareas formativas pueden ser actividades que promueven el desarrollo de competencias matemáticas vinculadas con el proceso de autoevaluación y reflexión de sus conocimientos previos. Así como su conocimiento matemático, las estrategias que pueden o deben implementar y de qué manera aplicarlas. Este tipo de tareas formativas favorecen el desarrollo de competencias profesionales que permiten gestionar situaciones

1 El sistema Educativo Nacional Mexicano está compuesto por los tipos: básico, medio superior y superior. La educación media superior en México dura tres años, la edad de los estudiantes promedio es desde los 11 años a 14 años.

de clase de matemáticas, así como comprender el potencial de los recursos utilizados, entre otros elementos. Además, permiten integrar el conocimiento matemático y el conocimiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, componentes esenciales del conocimiento especializado (Carrillo et al., 2020).

Goñi (2011) propone tres tipos de tareas formativas: *tareas de observación activa* (consiste en acompañar a un profesional experto y observar activamente de qué manera resuelve los problemas, así como la gestión de la clase de matemáticas); *tareas de intervención* (tienen como objetivo que los participantes aborden su labor profesional como protagonistas), finalmente, *tareas de reflexión, recapitulación y autoevaluación* (pueden intercalarse en el proceso formativo para organizar una espiral compuesta por tareas de observación e intervención, de reflexión y posteriormente una propuesta de mejoramiento. Asimismo, retomar la observación e intervención de los procesos mejorados, y nuevamente realizar el mismo procedimiento. Finalmente, se puede pensar en una tarea de recapitulación como fase final del proceso formativo).

En los trabajos de Climent y Montes (2019) y en Barrera-Castarnado et al. (2019) se propone una forma de diseñar tareas formativas por medio de un análisis con MTSK para profesores de formación inicial (Figura 1). Se utilizó esta propuesta para la realización de la tarea formativa presentada en este trabajo para profesores en formación permanente.

Figura 1. Proceso de diseño de una tarea formativa

Competencia mirada profesional

La competencia docente mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas es considerada una componente de la práctica profesional de los profesores de matemáticas (Mason, 2002). Está ligada a cómo los docentes utilizan sus conocimientos de matemáticas al realizar diferentes tareas profesionales como: seleccionar y diseñar tareas, analizar e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes e iniciar y orientar el discurso matemático durante las interacciones de clase (Llinares, 2013).

El marco de aprendizaje para notar de van Es y Sherin proviene de años de trabajo (van Es y Sherin, 2008, 2021), el cual tiene dos categorías principales: lo que notan los maestros y cómo notan los maestros. La primera categoría, captura a quien los maestros notan en el vídeo y el tema de su análisis (cuestiones que identifican, comentarios centrados en las estrategias pedagógicas, comportamiento o el pensamiento matemático), acerca de si el grupo se enfoca en la clase como un todo, los estudiantes como grupo, estudiantes en particular, el maestro en el vídeo o ellos mismos como participantes.

Ahora bien, en segunda dimensión se refiere a cómo los profesores analizan lo que notan, incluyendo tanto sus posturas analíticas (el enfoque que adoptan los profesores para analizar los episodios del aula y si los profesores se involucran en una indagación productiva de la enseñanza aprendizaje) como sus niveles de profundidad. También captura si se evalúa (emitir juicios desinformados sobre lo que estuvo bien o mal o lo que debería haberse hecho de otra manera) o interpreta lo que observa (los esfuerzos para razonar sobre lo que observa para comprender las raíces de una idea y para explicar lo que significa una declaración, dibujo, gesto o expresión en particular).

Para cada categoría, van Es y Sherin (2008) colocan niveles de cómo notan los maestros: nivel 1 (asisten a un evento, pero con poca o ninguna evidencia utilizada en su análisis, comportamiento de la clase, participación); nivel 2 (prestan atención al pensamiento matemático de los estudiantes, identifican hechos notables, evalúan lo que han observado, adoptan una postura interpretativa, pero son inconsistentes al elaborar y proporcionar detalles de sus análisis); nivel 3 (presentan discusiones en estudiantes específicos y su pensamiento matemático, razonan a través de lo que han observado y realizan inferencias acerca de la comprensión de los estudiantes, y, nivel 4 (examinan detalles del pensamiento matemático de los estudiantes, considerando una variedad de explicaciones o interpretaciones, utilizan lo observado para apoyar sus ideas, consideran relaciones entre el pensamiento de los estudiantes y la pedagogía del profesor, proponen enfoques de enseñanza alternativos sobre las bases de sus análisis).

El marco learning to notice elaborado por van Es y Sherin (2002) es nutrido y modificado por las mismas autoras en su trabajo van Es y Sherin (2021) donde proponen una tercera dimensión llamada shaping que se relaciona con la interacción para acceder a información adicional sobre el pensamiento de los estudiantes, que pueden convertirse en objeto de mayor atención e interpretación (Tabla 1). Estas dimensiones se refieren a diferentes aspectos de la capacidad de un maestro para observar y reflexionar sobre su práctica.

Tabla 1
Dimensiones y procesos del learning to notice framework

Dimensión	**Procesos**
Attending	Identificar las características notables de las interacciones en el aula. Ignorar determinadas características de las interacciones en el aula
Interpreting	Utilizar los conocimientos y experiencias propias para dar sentido a lo que se observa. Adoptar una postura de indagación.
Shaping	Construir interacciones y contextos que den acceso a información adicional.

Fuente: Traducción de López y Zakaryan (2021) de Van Es y Sherin (2021, p.19)

Relaciones del noticing y el modelo MTSK

El modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) constituye un modelo de análisis de conocimiento especializado usado para explorar las diferentes naturalezas de conocimiento que el profesor de matemáticas presenta en su práctica profesional. La elección de este modelo teórico responde a su utilidad para el diseño de tareas formativas y para la estructuración de asignaturas completas (Carrillo et al., 2020). Usaremos por tanto dicho modelo (Figura 2) como elemento estructurador implícito de las tareas formativas. Este modelo estudia el conocimiento del profesor de matemáticas para interpretar, analizar y categorizar el conocimiento especializado.

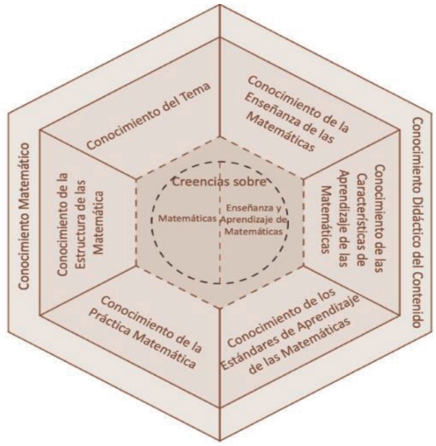


Figura 2
Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)

Por otro lado, López y Zakaryan (2021) comienzan a describir las relaciones de cada dimensión con el modelo MTSK. Respecto a ‘attending’ (identificar eventos dignos de mención) el profesor debe prestar atención a lo que hacen y dicen los estudiantes, cómo piensan sobre el tema, qué representaciones utilizan para transmitir ideas y las experiencias que pueden ofrecer para implicar a los estudiantes en el aprendizaje (van Es y Sherin, 2002). En esta dimensión, se observan las características del entorno del aula, así como ignorar otros aspectos del entorno. López y Zakaryan asumen que el interés del profesor hacia algo que le llama la atención tiene relación con las creencias que tiene. De esta manera, el noticing se ve afectado por las creencias del profesor y es la primera instancia de donde parte el noticing.

La segunda dimensión, ‘interpretating’ que se refiere a utilizar lo que sabe acerca del contexto para razonar sobre las interacciones en el aula, usar su conocimiento de la materia y de cómo los estudiantes piensan los conceptos. También, se debe tomar una postura de indagación para averiguar lo que los estudiantes quieren decir (van Es y Sherin, 2021). De esta manera, para que el profesor pueda interpretar las interacciones se necesita de KFLM el cual permite interpretar el proceso de comprensión de los estudiantes, reconocer el lenguaje utilizado, las fortalezas y debilidades, estrategias usuales y decidir si debe crear o no nuevas formas de interacción.

López y Zakaryan (2021) mencionan que para identificar los elementos matemáticos que se observan en las interacciones con los estudiantes se presenta el KoT, KSM y KPM cuando el profesor interprete lo observado a través de aspectos fenomenológicos, definiciones, ejemplos, propiedades, registros de representación para encontrar conexiones entre conceptos más elementales con más avanzados y viceversa; así como las conexiones transversales o auxiliares entre contenidos matemáticos, y, gestionar razonamientos matemáticos de los estudiantes.

La tercera dimensión, ‘shaping’ implica que los profesores construyan interacciones a través de preguntas o acciones para acceder a información adicional sobre el pensamiento de los estudiantes para apoyar el noticing previo y que le permita interpretar de manera más precisa. El profesor necesita KMT que le permita dar forma a partir de teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático, a las características de recursos didácticos, estrategias y técnicas para la enseñanza que permitan decidir si la primera comprensión es suficiente o si requiere establecer nuevas interacciones. También se requiere de KMLS pues permite ubicar lo atendido en un tiempo, nivel educativo y currículo especifico y de esta manera el profesor tener un referente sobre decidir si requiere profundizar más en el pensamiento del estudiante.

Diseño metodológico

Primero se comenzó a revisar literatura sobre noticing y acerca de las conexiones entre el MTSK y noticing. Una vez revisada la literatura y siguiendo el proceso de diseño de tareas formativas de Barrera-Castarnado et al. (2019), se prosiguió al diseño de vídeo-viñetas considerando las conexiones entre el MTSK y noticing propuesta por López y Zakaryan (2021). Cabe destacar que estas vídeo-viñetas están sustituyendo al paso "selección de fragmentos" evocadas por conocimiento especializado sobre el que se podrá reflexionar. También el modelo MTSK y los niveles de van Es y Sherin (2002) permitirá el enriquecimiento de estas (generación del caso) junto con actividades diseñadas para posteriormente analizar los elementos de conocimiento especializado que fueron movilizados por los profesores de medio superior en formación permanente.

La tarea formativa presentada en este trabajo está encaminada a que los profesores desarrollen noticing en su práctica profesional. Esta tarea es una propuesta, se pretende que esté contenida en un curso a futuro para profesores de nivel medio superior en formación permanente. En el diseño del curso se proyectarán las video viñetas y se trabajarán las tareas formativas que se están diseñando.

Propuesta de tarea formativa

A continuación, se detalla un ejemplo de tarea formativa. El tema es dominio de funciones racionales cuyo objetivo es reflexionar y discutir sobre la naturaleza y usos de los ejemplos y definiciones dados en clase. Analizar las respuestas de los estudiantes para distinguir razonamientos y dificultades. Estos objetivos están relacionados con los subdominios KoT, KPM y KFLM del MTSK. De esta forma se generaron dos vídeo viñetas que a continuación detallamos en cuanto a contenido.

Contenido vídeo viñeta 1.

Acto 1. El profesor Alfredo presenta una clase "correcta", típica de dominio de funciones racionales, donde su intención es buscar la facilidad para los estudiantes.
El profesor no da una definición formal de dominio, simplemente menciona que basta con observar cuando se hace cero el denominador.
Acto 2. El profesor da una explicación de por qué no puede haber un cero en el denominador (intentando dar una explicación "profunda").
(Corte en el vídeo y otro fragmento)
Acto 3. El profesor da unos ejercicios para que resuelvan los estudiantes. Por ejemplo

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+2)}, \qquad g(x) = \frac{x^2+2x}{3x+1}$$

(Finaliza el vídeo)

Contenido vídeo viñeta 2.

Acto 1. El profesor Pablo comienza su clase. Recalca que ya se ha visto con anterioridad el concepto de dominio de una función racional y que van a trabajar algunos ejercicios en clase con los estudiantes.
Acto 2. El profesor selecciona ciertas funciones que son interesantes al trabajar en clase.

$$f(x) = \frac{1}{2x}, \qquad g(x) = \frac{2x}{(x-1)(x+3)}, \qquad h(x) = \frac{x-2}{(x-2)(x+4)}$$

Acto 3. El profesor pregunta sobre el dominio de las primeras dos funciones. Los estudiantes comentan, coincidiendo en sus respuestas.
Acto 4. El profesor pregunta acerca de la función h. Los estudiantes dan respuestas. Se presenta una discusión por los argumentos del dominio de esa función de los estudiantes. Ya que unos comentan

que no está definida en 2 y 4, mientras otros cancelan factores y dicen que se anula sólo en 4.
Acto 5. El profesor pregunta cuál será la respuesta correcta. Propone otros ejemplos y preguntas que conduzcan a la solución correcta.

Con un análisis con MTSK se pueden apreciar elementos de conocimiento presentados en estas vídeo viñetas. Se puede apreciar que el profesor en la vídeo viñeta 1 presenta algunos ejemplos enfocados en que el denominador no se anule para calcular el dominio, mientras que en la vídeo viñeta 2 el profesor coloca ejemplos diferentes. Lo cuál nos condujo a generar el caso. Una vez que los profesores de matemáticas han visto las dos vídeo viñetas. Se les realiza una serie de actividades.

Actividad 1.

¿Qué fue lo que más te llamó la atención del vídeo 1?
¿Qué fue lo que más te llamó la atención del vídeo 2?
¿Qué diferencia encuentras en los ejercicios planteados en clase para los dos vídeos?
¿Cuáles son las ventajas y desventajas de los ejemplos presentados por el profesor Alfredo y por Pablo?
¿Por qué es importante que se trabajen este tipo de ejercicios en el curso de funciones?

Actividad 2.

1. Describe la definición de dominio de función racional.
2. Propón algunos conceptos anteriores que tienen relación con el dominio de una función racional.
3. ¿Qué otros argumentos crees que podrían haber tenido los otros estudiantes para dar sus respuestas del dominio de la función h en la clase del profesor pablo?
4. En la clase del profesor Pablo, ¿cuál crees fue el razonamiento que condujo al estudiante a obtener que el dominio de la función h son los reales menos el 4?
5. Enlista los conocimientos matemáticos para cada uno de los profesores.
6. Enuncia algunos otros ejemplos que colocarías en tu clase.
7. Describe por qué los ejemplos anteriores.

Conclusiones

La investigación que se presenta se basa en las conexiones de MTSK con noticing para la generación de vídeo viñetas y seguir el proceso de generación de tareas formativas para el desarrollo de noticing en profesores de nivel medio superior en formación permanente.

Se espera que esta tarea junto a otras que se están diseñando sean parte del curso que se ofertará a futuro para profesores de nivel medio superior el cual evoque el desarrollo de la capacidad para dirigir la atención hacia aspectos críticos de las interacciones en el aula, identificar momentos clave en que se presentan dificultades o estrategias de los estudiantes para las funciones racionales. Así como analizar las respuestas y acciones de los estudiantes, reflexión acerca del tiempo que se utiliza para dar conceptos, adaptar estrategias de enseñanza para abordar diferentes dificultades de los estudiantes, así como diseñar actividades que promuevan la comprensión y el desarrollo de habilidades en el tema de funciones racionales.

Referencias

Barrera-Castarnado, V J., Liñán-García, M. M., Muñoz-Catalán, M. C. y Contreras, L. C. (2019). El uso de MTSK en el diseño de tareas formativas para estudiantes para profesor de educación primaria. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (110-118). Universidad de Huelva.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2020). Using Professional Development Contexts to Structure Prospective Teacher Education. En S. Llinares y O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2* (pp. 393-419). Brill.

Choy, B. H., y Dindyal, J. (2017). Noticing affordances of a typical problem. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh, y B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 2* (pp. 249-256). PME.

Climent, N. y Montes, M. A. (2019). Taller 2: diseño de tareas para la formación de profesores de matemáticas a partir de MTSK. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (60-68). Universidad de Huelva Publicaciones.

Dietiker, L., Males, L. M., Amador, J. M., y Earnest, D. (2018). Research commentary: Curricular noticing: a framework to describe teachers' interactions with curriculum materials. *Journal for Research in Mathematics Education, 49*(5), 521-532.

Fernández, C., Llinares, S., y Valls, J. (2011). Características del desarrollo de una mirada profesional en estudiantes para profesor de matemáticas en un contexto b-learning/Characteristics of the development of professional vision from mathematics teacher students in b-learning context. *Acta Scientiae, 13*(1), 9-30.

Goñi, J. (2011). Desarrollo de una guía para la realización del prácticum. En J. Goñi (Ed.), *Matemáticas: investigación, innovación y buenas prácticas* (pp. 161-174). GRAÓ.

Grueso, R., González, G. (2016). *El concepto de función como covariación en la escuela* [Tesis de maestría, Universidad de Valle].

Lin, F. L., y Rowland, T. (2016). Pre-service and in-service mathematics teachers' knowledge and professional development. In *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 481-520). Brill.

López, L. M. y Zakaryan, D. (2021). Relacionando el conocimiento especializado del profesor de matemáticas con la competencia noticing. En J. G. Moriel Junior (Ed.), *Actas de V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 349-356). Congresseme. https://cdn.congresse.me/ho20198vnz5ar0pp4l3wt33iit5t

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing.* Routledge.

Montes, M., Pascual, M., y Climent, N. (2021). Un experimento de enseñanza en formación continua estructurado por el modelo MTSK. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 24*(1), 83-104.

Noreña, R. A. (2013). *Funciones racionales en el desarrollo de pensamiento variacional* [Tesis de licenciatura, Universidad de Valle].

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers'noticing of students'understanding of the derivative concept. *International journal of science and mathematics education, 13*(6), 1305-1329.

Van Es, E. A., y Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and teacher education, 24*(2), 244-276.

Van Es, E. A., y Sherin, M. G. (2021). Expanding on prior conceptualizations of teacher noticing. *ZDM–Mathematics Education, 53*(1), 17-27.

APLICACIÓN DEL MODELO MTSK EN EL DISEÑO DE SECUENCIAS DIDÁCTICAS CON PROBLEMAS DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Application of model MTSK in the design of didactic sequences with problems of mathematical modelling

Gamboa-Araya, R.[a], Chavarría-Vásquez, J. [a]

[a] Escuela de Matemática, Universidad Nacional, Costa Rica

Temática: 1 – MTSK en la formación docente

Resumen.
El objetivo propuesto consiste en mostrar una secuencia didáctica para docentes en formación inicial en la Enseñanza de la Matemática, basada en la estructura del MTSK para contenidos de una tarea relacionada con modelización matemática. Fue desarrollada con 20 docentes en formación inicial de la carrera Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional en Costa Rica, y sus resoluciones fueron analizadas con base en una rúbrica de evaluación definida a partir de indicadores en el desarrollo o alcance de habilidades específicas definidas para cada fase del ciclo de modelización matemática. Como parte de los resultados, se determinó que los profesores de matemáticas en formación inicial evidencian un abordaje básico en problemas de modelización, se les dificulta evidenciar la conexión entre la situación real y el modelo matemático y a realizar generalizaciones.

Palabras clave. Secuencia Didáctica, Modelización Matemática, Formación Docente, MTSK.

Abstract.
The proposed objective is to show a didactic sequence for teachers in initial training in the Teaching of Mathematics, based on the MTSK structure for contents of a task related to mathematical modeling. It was developed with 20 teachers in initial training of the Mathematics Teaching career of the National University in Costa Rica, and their resolutions were analyzed based on an evaluation rubric defined from indicators in the development or scope of skills. Defined for each phase of the mathematical modeling cycle. As part of the results, it was determined that mathematics teachers in initial training show a basic approach modeling problem, it is difficult for them to show the connection between the real situation and the mathematical model and to generalize.

Keywords. . Didactics Sequence, Mathematics Modelling, Teacher training, MTSK.

Gamboa-Araya, R. y Chavarría-Vásquez, J. (2023). Aplicación del modelo MTSK en el diseño de secuencias didácticas con problemas de modelización matemática . En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 55–62). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

La dinámica social actual requiere de un ciudadano capacitado en diferentes áreas y con diferentes habilidades. Para ello, la Educación Matemática debe promover el desarrollo de estas habilidades en diferentes contextos. Un elemento primordial para esto es la incorporación de la modelización matemática en la formación docente, donde los contenidos matemáticos adquieran sentido en procesos de resolución de problemas y sirvan para comprender distintas situaciones de la vida real (Forero, 2020). En este sentido, Florensa et al. (2020) indican que distintos investigadores y profesionales enfatizan en la importancia de la modelización matemática en la enseñanza y aprendizaje de la disciplina, pues permite una visión de esta como una materia útil y pertinente para el análisis de problemas reales.

Así, la modelización matemática puede ser considerada como una estrategia en la que se enfatice en la necesidad de usar, construir, validar, interpretar y comprender modelos para resolver problemas reales, por lo que se deben crear programas que desarrollen tales conocimientos y habilidades en el profesorado (Sánchez-Cardona et al., 2021).

Por esta razón, y con el objetivo de desarrollar en los docentes habilidades relacionadas con la modelización matemática, se propuso una secuencia didáctica dirigida a docentes en formación inicial. Para el diseño de secuencias didácticas con problemas de modelización se utilizaron tres fundamentos teóricos: lo establecido en el Modelo MTSK (siglas en inglés de Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas-Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) para el contenido de tareas; los elementos de la metodología de secuencias didácticas por competencias bajo un enfoque socioformativo y para el problema significativo del contexto, se trabajó con lo referente a la modelización matemática.

Marco conceptual

En este apartado se expondrán los fundamentos teóricos de la modelización matemática, la metodología de secuencias didácticas bajo el enfoque socioformativo y el modelo MTSK.

Modelización Matemática

Un modelo matemático se conceptualiza como una imagen abreviada y formal de una parte del mundo real, la cual se podría representar por medio de una tripleta (D, M, f) que consta de un dominio D del mundo real, un subconjunto M del mundo matemático y una aplicación f de D a M (Niss et al., 2007, citado por Blum, 2015).

La construcción de un modelo implica comprender y analizar la situación dada, según el contexto real, y expresar matemáticamente las relaciones que se observan en él. Según Blum (2015) esto implica un proceso de comprensión del fenómeno, su simplificación o estructuración, matematizar las relaciones entre las variables o cantidades involucradas en el fenómeno, trabajo matemático con base en conocimientos disciplinares, la interpretación, validación y presentación de los resultados y el análisis de posibles conexiones con otras situaciones o modelos. Este proceso, llamado ciclo de modelización, Blum (2015) lo resume en siete (Figura 1).

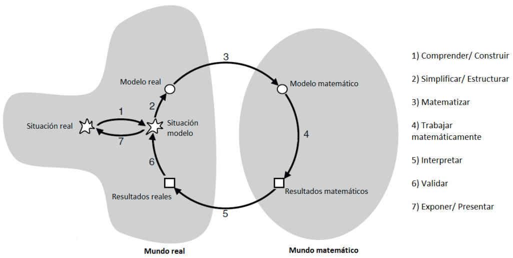


Figura 1. Siete pasos del ciclo de modelización según Blum (2015)

En la educación secundaria existe una demanda de actividades que potencien el desarrollo de habilidades en el estudiantado y favorezcan la construcción del conocimiento y el aprendizaje significativo; además, que impliquen la aplicación y uso de la matemática. (Gallar et al., 2019; Sandoval y Cea, 2020). En este contexto, los autores citados anteriormente indican, que la modelización matemática posee un rol importante como un medio para la conexión con la realidad y la conceptualización de los contenidos matemáticos.

El uso de la modelización matemática exige que el docente posea habilidades relacionadas con esta para definir claramente los objetivos que pretende alcanzar con su uso y ser un guía en el proceso; le implica trabajar competencias relacionadas con la resolución de problemas reales, seleccionar y diseñar tareas apropiadas al desarrollo cognitivo del estudiantado, que contemplen el ciclo de modelización, y definir los criterios de evaluación (Gallar et al., 2019; Sandoval y Cea, 2020).

Por dicha razón, el profesorado de matemáticas en formación inicial, debe experimentar con estas tareas y su mediación para ser aplicadas en la educación secundaria. Por ello, Zaldívar et al. (2018) apuntan que la aplicación de modelización matemática en el proceso de enseñanza y aprendizaje exige un docente preparado y dispuesto para el desarrollo de este tipo de actividades, por lo que una deficiente formación profesional y una ausencia de capacitación continua en esta área imposibilitaría el desarrollo de este tipo propuestas didácticas.

Aunado a lo anterior "Diversos investigadores indican que, si se pretende que los futuros profesores diseñen actividades de modelización para sus clases en la escuela secundaria, es necesario que tengan experiencias de modelización durante su formación inicial" (Villarreal, 2019, p. 219).

Secuencia Didáctica

Según Tobón et al. (2010), las secuencias didácticas corresponden a articulados de actividades de aprendizaje y evaluación, en las cuales se cuenta con la mediación de un docente y pretenden el logro de metas educativas claramente definidas, con el uso de determinados recursos. En el modelo por competencias, Tobón et al. (2010) definen secuencias didácticas como:

> Una metodología relevante para mediar los procesos de aprendizaje en el marco del aprendizaje o refuerzo de competencias; para ello se retoman los principales componentes de dichas secuencias, como las situaciones didácticas (a las que se debe dirigir la secuencia), actividades pertinentes y evaluación formativa (orientada a enjuiciar sistemáticamente el proceso). Con ello se sigue una línea metodológica que permite a los docentes que ya trabajan con esta metodología una mejor adaptación al trabajo por competencias en el aula. (pp.20-21)

La diferencia entre otras definiciones de secuencias didácticas y esta que se plantea, radica en el desarrollo de competencias para desenvolverse en la vida, de manera que el énfasis no está en el aprendizaje de contenidos, aunque definitivamente en el desarrollo de las competencias indiscutiblemente será necesario la apropiación de contenidos.

Dado que existen diversas metodologías para abordar las secuencias didácticas desde el enfoque por competencias, se seleccionó para este estudio el enfoque socioformativo, el cual centra su atención en:

> La socioformación integral y el proyecto ético de vida, la resolución de problemas significativos situados, la articulación de las actividades en torno a esos problemas, el proceso metacognitivo y la evaluación por medio de niveles de dominio en matrices (rúbricas). (Tobón et al., 2010, p.21)

Los componentes de una secuencia didáctica, desde el enfoque socioformativo están dados por: una situación problema del contexto, las competencias a desarrollar, las actividades propuestas, la evaluación, los recursos y un proceso metacognitivo.

A partir de estos componentes, se relaciona de manera natural esta metodología para la secuencia didáctica con la modelización matemática, puesto que la situación problema del contexto, desde la cual parte la secuencia didáctica, será un problema de modelización matemática contextualizado.

MTSK: Contenido de una Tarea

Según Montes et al. (2019), el objetivo principal del modelo MTSK no es comparar y evaluar los conocimientos que poseen los docentes y determinar el contenido de la formación inicial, sino reflexionar sobre los elementos que constituyen el conocimiento existente y orientan el contenido de la formación inicial. Esto a partir de tres dominios de conocimiento: matemático, didáctico del contenido matemático y creencias y concepciones; los cuales a su vez se subdividen en subdominios.

Carrillo et al. (2017) definen los subdominios del conocimiento matemático como: conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de la estructura matemática (KSM) y conocimiento de la práctica matemática (KPM). Los subdominios del conocimiento didáctico del contenido matemático son el conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT), el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS). Tanto los dominios como los subdominios pueden visualizarse en la Figura 2.

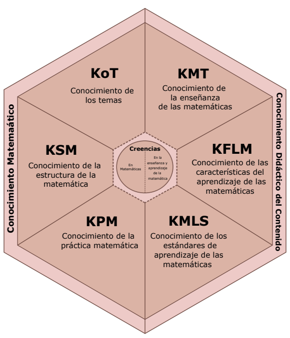


Figura 2. Modelo MTSK

En el diseño de secuencias didácticas, se consideraron los diferentes subdominios del MTSK, de manera que, con la resolución del problema de modelización matemática, se determinen: los conocimientos matemáticos que se ponen en juego en la resolución, la estructura matemática implicada y relacionada con los conocimientos matemáticos, la simplificación del modelo real, la construcción del modelo matemático y la validación del modelo propuesto en el confronte con la situación real.

En lo que corresponde al conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, se incluyeron en la secuencia los recursos necesarios para la resolución de la situación de modelización matemática planteada y las actividades propuestas en relación con dicha resolución.

Respecto al conocimiento de las características del aprendizaje matemático, se determinaron los indicadores de logro del aprendizaje obtenido en la resolución de la situación planteada, y los posibles errores y obstáculos que pueden ser enfrentados en la resolución. Finalmente, la secuencia didáctica incluyó el conocimiento de los estándares de aprendizaje matemático relativo al programa de formación en relación con la modelización matemática.

Metodología

El estudio es de enfoque cualitativo, de tipo descriptivo, y tuvo como objetivo determinar las habilidades matemáticas que poseen los docentes en formación inicial al enfrentarse a la resolución de problemas de modelización matemática.

En la investigación participaron 20 profesores de matemáticas en formación inicial de la Universidad

Nacional en Costa Rica (UNA) matriculados durante el primer semestre del 2022 en los cursos *MAC417 Didáctica de la Estadística y Probabilidad y MAC 418 Didáctica del Álgebra y el Análisis,* que habían aprobado materias académicas relacionadas con el análisis real en una variable, geometría, estadística y probabilidad entre otros, los cuales eran relevantes pues incluían contenidos necesarios para la resolución de los problemas propuestos.

La participación de estos 20 docentes fue a través de un módulo de formación complementaria en el tema de modelización matemática. En todo momento se contó con la anuencia de las y los docentes participantes de la investigación, a través de un consentimiento informado; en el cual se detalló sobre la confidencialidad de la información, sin evidenciar casos particulares.

En una de las sesiones de dicho módulo, se les brindó a los participantes la secuencia didáctica , la cual resolvieron en papel pero para su entrega se realizó en digital. La secuencia didáctica incluyó el siguiente problema:

¿Qué medidas debe tener una lata de refresco de 710 ml para que su fabricación sea lo más barata posible?
Determine si empresas nacionales que utilizan este tipo de lata cumplen con estas dimensiones, en caso contrario, realice hipótesis o consultas sobre la razón de peso para no utilizarlas y calcule el beneficio económico que tendría para una empresa la fabricación de este tipo de lata.

Para registrar la solución por favor considerar las siguientes preguntas:

1) ¿Qué pasos se siguieron para la resolución del problema?
2) ¿Qué supuestos o qué condiciones fueron consideradas para la resolución del problema?
3) ¿Qué otras preguntas se podrían plantear a partir de los datos obtenidos?
4) ¿Qué consideraciones adicionales se le podrían hacer el problema?
5) ¿Qué otras situaciones problema se podrían diseñar a partir del problema dado?

Para el cual se indicó el contexto del mismo, las competencias matemáticas que se pretendían y el área de conocimiento, con el propósito de que los profesores tuvieran lo necesario para situarse en la problemática planteada.

Una vez presentado el problema, se abrió un espacio para discutir estrategias de resolución y se les brindó ocho días para presentar de forma escrita las mismas.

Se obtuvieron 18 resoluciones, a partir de las cuales se efectuó el análisis de las habilidades matemáticas reportadas para cada fase del proceso de modelización matemática . Para analizar los resultados obtenidos en la aplicación de la secuencia didáctica, se construyó una rúbrica que incluye las distintas fases en el ciclo de modelización: modelo real, modelo matemático, validación; considerando el dominio de conocimientos matemáticos (KoT) y habilidades o procesos matemáticos alcanzados por los docentes en formación en cada fase (KPM).

Resultados

Los resultados serán presentados considerando, en primer lugar, el conocimiento de los temas (KoT) y las habilidades en la construcción del modelo real, en la construcción del modelo matemático y en la validación del modelo.

Conocimiento de los temas (KoT)

Con respecto al uso de definiciones, propiedades o representaciones matemáticas en la construcción del modelo matemático se destaca, en cuanto a definiciones , el uso y mención al cilindro, altura, área lateral, área basal y volumen de un cilindro, radio y circunferencia. En cuanto a las propiedades, se utilizan propiedades del área y volumen de un cilindro.

Respecto a las habilidades mostradas por los profesores de matemáticas en formación inicial en cuanto a los conocimientos matemáticos: 12 profesores hacen referencia a definiciones o propiedades de forma adecuada, a pesar de no mencionar a la totalidad de las definiciones o las propiedades requeridas. Por ejemplo, un docente hace alusión a la necesidad de utilizar la fórmula del área total del cilindro, pero no menciona la necesidad de utilizar el volumen.

Por otra parte, 2 profesores no se refirieron a definiciones o propiedades matemáticas para resolver el problema; 4 profesores utilizaron algunas definiciones o propiedades, pero presentaron errores en las mismas, por ejemplo, respecto al área lateral del cilindro, un profesor indica que se calcula mediante la circunferencia de una base más el doble de la altura.

Conocimiento de la práctica matemática (KPM) para la construcción del modelo real, del modelo matemático y el proceso de validación

Con respecto al modelo real, específicamente al uso de datos, un docente considera en el análisis, el área del cilindro circular recto y su volumen; no obstante, en el momento de determinar el modelo matemático no consideró el volumen y 14 profesores plantearon de forma adecuada la fórmula para el volumen del cilindro e hicieron uso correcto de los datos dados en el problema.

Por su parte, 2 profesores no reflejaron un uso o simplificación de los datos aportados. Por ejemplo, un docente indica: “Además de considerar el precio, es necesario el costo de fabricación”, pero no identifica los datos relevantes.

Al continuar con el análisis de las habilidades mostradas por los profesores en este problema, un profesor realizó una interpretación incorrecta de los datos al momento de plantear la función a optimizar. El docente concretamente iguala la fórmula para calcular el área lateral del cilindro (expresada en forma incorrecta), al volumen dado e indica que: “Se podría derivar y con ello optimizar la fórmula del área total del cilindro en función de la altura y el radio”.

Dentro del modelo real, pero en lo que corresponde a la identificación de variables, 14 de los profesores identificaron todas las variables y parámetros requeridos para el modelo matemático, aunque algunos con errores matemáticos en su uso; 4 profesores no identificaron variables ni parámetros para la construcción del modelo. Además, los 18 docentes no definen con claridad las variables o parámetros identificados.

Finalmente, en cuanto al reconocimiento de patrones y planteamiento de supuestos, 9 profesores identificaron el patrón en los datos, de manera que les permitió realizar adecuadamente las funciones de optimización. Además, 4 profesores no reconocieron ningún patrón en los datos, 3 profesores reconocen que existen ciertas características comunes pero no logran identificar el patrón y 2 profesores identifican parcialmente la relación de los datos.

Al analizar el modelo matemático generado por los profesores en formación inicial, se determinaron dos criterios: el establecimiento de patrones entre las cantidades y variables interrelacionadas y las conexiones entre ellas, así como, la expresión matemática que describa la situación problema.

Con respecto al establecimiento de relaciones entre cantidades y variables, 9 profesores lograron expresar matemáticamente y de manera adecuada la relación matemática, estableciendo no sólo la relación entre el volumen y el área del cilindro, sino encontrando la función a optimizar; 6 profesores no lograron expresar la relación entre variables y datos involucrados; 1 profesor estableció una relación, pero ésta es incorrecta, tal y cómo se evidencia en la Figura 3.

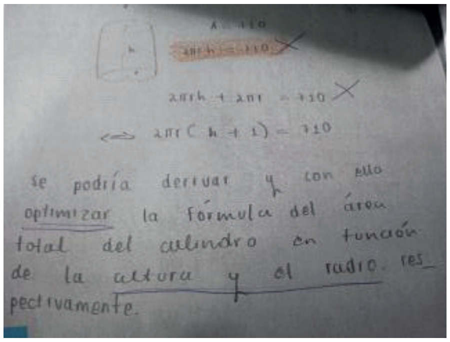


Figura 3. Relación matemática establecida por uno de los docentes participantes

Dos profesores expresaron una relación, pero no consideraron todas las variables o datos implicados.

En este problema, 9 de los 18 docentes lograron expresar de forma adecuada la relación matemática. Sin embargo, sólo un profesor, se devolvió a contrastar lo obtenido con el modelo real, realizando hipótesis sobre la no utilización de la forma de la lata que optimiza el material empleado, tal y cómo se evidencia en la Figura 4.

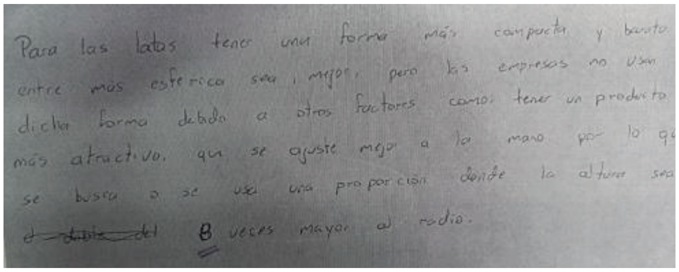


Figura 4. Interpretación de resultados establecida por uno de los docentes participantes

En este problema los profesores mostraron un desarrollo de competencia adecuado en la determinación del modelo matemático y el proceso de resolución matemática, esta situación puede deberse a la naturaleza del problema, siendo un problema cerrado. No obstante, no se muestra rigurosidad matemática y no llevaron a cabo un proceso de validación o contrastación de resultados con la situación real. Esto último, probablemente, porque requería de un proceso de investigación, generación de hipótesis y contrastación de estas, para lo cual no mostraron evidencias de la aplicación de estas competencias.

Reflexiones Finales

El problema propuesto a los profesores de matemáticas en formación inicial en este estudio se considera semiabierto debido a que en su resolución se deben considerar conocimientos matemáticos y otros elementos que requerían de un proceso de indagación extraclase por parte de los sujetos de investigación. El objetivo de la resolución de este tipo de problema era identificar qué habilidades de modelización matemática poseían los docentes.

A pesar de que los participantes mostraron capacidad para manejar y dar sentido a datos relevantes para la resolución del problema, hemos detectado algunos elementos que pueden ser mejorables, tales como los siguientes: (1) la capacidad para la búsqueda de información fue limitada, pues no profundizaron en datos requeridos que implicaban indagación, (2) la capacidad para la determinación y definición de variables y parámetros que describen las relaciones a partir de los datos generados según el problema fue limitada en los procesos de resolución y (3) se denota ausencia de un proceso de validación de resultados y del establecimiento de conexiones con otros problemas o modelos matemáticos.

Consideramos que los elementos de mejora señalados anteriormente podrían ser un indicador que este tipo de actividades no son familiares en su proceso de formación inicial como profesores de matemáticas y que, por lo tanto, se debe insistir en el desarrollo de capacidades para enfrentarse a problemas de modelización que impliquen un proceso adicional al proceso de matematización.

Referencias

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: *What do we know, what can we do?* En S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 73-96). Springer.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L. C. y Climent, N. (2017). El conocimiento del profesor desde una perspectiva basada en su especialización: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Revue internationale de didactique des mathématiques*, (22), 185-205.

Florensa, I., García, F. y Sala, G. (2020). Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática: Estudios de caso en distintos niveles educativos. *Avances de investigación en Educación Matemática, 17*, 21-37.

Forero, A. (2020). Procesos de modelación matemática en formación de profesores de matemáticas. *Revista de la Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia, 9*(2), 66–79. https://doi.org/10.15446/rev.fac.cienc.v9n2.86884

Gallar, C., Ferrando, P. y García, Ll. (2019). Modelización matemática en la educación secundaria: manual de uso. *Modelling in Science Education and Learning, 12*(1), 71-86. http://polipapers.upv.es/index.php/MSEL/article/view/10955

Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Linan-Garcia, M. M. y Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 157-176). Ediciones Universidad Salamanca.

Sandoval, K. y Cea, D. (2020). Impacto de la metodología de estudio de casos en la formación de profesores en la habilidad de modelamiento matemático [Tesis de licenciatura, Universidad de Concepción]. Repositorio Biblioteca Ude. http://repositorio.udec.cl/handle/11594/647

Sánchez-Cardona, J., Rendón-Mesa, P. y Villa-Ochoa, J. (2021). Proyectos de modelación matemática como estrategia de evaluación formativa en un curso para futuros profesores de matemáticas. *Revista Meta: Avaliação, 13*(40), 543-570. https://revistas.cesgranrio.org.br/index.php/metaavaliacao/article/view/3243

Tobón, S. T., Prieto, J. H. P. y Fraile, J. A. G. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias*. Pearson Educación.

Villarreal, M. (2019). Experiencias de modelización en la formación de futuros profesores de matemática1. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,* 18, 219-234. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/2860

APROXIMAÇÃO DO CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR DE EDUCAÇÃO INFANTIL PARA ENSINAR O PENSAMENTO ALGÉBRICO – CLASSIFICAÇÃO

Approaching the Specialized Knowledge of the early education teacher to teach Algebraic Thinking – Classification

Alencar, E. S.[a], Muñoz–Catalán, M. C. [b], Liñán- García, M. M. [b]

[a] Universidade Federal da Grande Dourados, Brasil
[b] Universidad de Sevilla, España

Temática: 1 – MTSK na formação docente

Resumo.
Esta comunicaçao tem como objetivo apresentar uma primeira reflexão sobre os elementos dos conhecimentos necessários ao professor em formação inicial para se ensinar cómo promover o pensamento algébrico na Educação Infantil com especificidade do conteúdo de classificação. Para sua execução realizamos leituras de investigação, manuais para a formação de professores e contamos com as experiências das formadoras. Utilizamos ainda como referencial teórico e apoio de nossas reflexóes o modelo analítico Mathematics Teachers' Specialised Knowledge. Apresentamos como resultados possíveis conhecimentos necessários a formação dos professores de Educação Infantil para promover o pensamento algébrico com especificidade no conteúdo de classificação.

Palavras-chave. MTSK, Formação do professor, Educação Infantil , Pensamento Algébrico

Abstract.
This communication aims to present a first reflection on the elements of knowledge necessary for teachers in initial training to teach how to promote algebraic thinking in Early Childhood Education with specificity of the classification content. For its execution, we carry out research readings, manuals for teacher training and rely on the experiences of trainers. We also used as a theoretical reference and support for our reflections the analytical model Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) by Carillo et al. (2018). We present as results possible knowledge necessary for the training of Early Childhood Education teachers to promote algebraic thinking with specificity in the content of classification.

Keywords. MTSK, Teacher Training, Early Childhood Education, Algebraic Thinking

Alencar, E. S., Muñoz–Catalán, M. C. y Liñán- García, M. M. (2023). Aproximação do conhecimento especializado do professor de educação infantil para ensinar o pensamento Algébrico–classificação. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 63-70). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Considerações Iniciais

Esta comunicação tem como objetivo apresentar uma primeira reflexão sobre os elementos dos conhecimentos necessários ao professor em formação inicial para se promover o pensamento algébrico na Educação Infantil com especificidade no conteúdo de classificação. Este trabalho é parte de um projeto de investigação mais amplo no qual pretendemos desenhar tarefas formativas para os futuros professores de Educação Infantil sobre o pensamento algébrico com especificidade na classificação e compreender como constrõem o conhecimento especializado a respeito do tema. Para esse fim, vamos começar realizando uma aproximação do conjunto de elementos do conhecimento especializado que consideramos que os futuros professores de Educação Infantil devem aprender para desempenhar sua futura ação docente. Respondemos esse objetivo com base em leituras de investigação, manuais para a formação de professores e nossas experiências como formadoras.

Apesar das reflexões sobre o pensamento algébrico terem iniciado na investigação LaCampagne et al (1995) e no documento do National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000) e logo após com mais intensidade com a investigação de Clements e Sarama (2009), muitas ainda são as indagações a serem realizadas. Percebe-se que uma década se passou, mas que pouco se avançou quanto as investigações. Ao consultarmos o dossiê específico mais recente com a temática pensamento algébrico na Educação Infantil, realizado no *Journal for the Study of Education and Development* encontramos somente dois artigos destinados a essa área de investigação (Muñoz-Catalán et al, 2021 e Carraher e Schliemann, 2019) sendo que o último reflete ações para os estudantes. Nota-se que os demais artigos apresentam propostas para os anos iniciais e finais do Ensino Fundamental. Este aspecto reafirma a necessidade de realizarmos investigações com essa temática, tendo em vista sua pouca exploração.

Após uma década pesquisadores como Muñoz-Catalán et al. (2021) ainda reafirmam a pouca atenção dada o desenvolvimento do pensamento algébrico na Educação Infantil e para isso analisam revisões feitas por Parks e Wager (2015) que demonstra que dos 15 anos de investigação analisados pouco se tem feito na área da formação à professores de Educação Infantil.

Segundo documento da NCTM (2000) e as investigações de Lee et al. (2016) e Acosta e Alsina (2020), relatam que o pensamento algébrico tem sido mencionado nos últimos anos nos documentos curriculares. Percebe-se este fato também no documento curricular brasileiro publicado no ano de 2017, o que confirma a importância de reflexões sobre o pensamento algébrico e sua relação com a formação do professor que irá ensinar este conteúdo matemático.

Assim, as reflexões iniciais dessa investigação basearam-se no estudo de Muñoz-Catalán et al. (2018) que mencionam a importância de desenvolver o conhecimento especializado específico aos professores da Educação Infantil e que por tanto, esta ação se difere da formação dos demais segmentos escolares. Ademais, os autores percebem a escassez de investigações para o desenvolvimento do ensino que realmente reflita sobre a Matemática e suas reflexões para a formação de professores na Educação Infantil. Trazem indícios sobre quais conhecimentos são necessários para se ensinar a subtração utilizando como base o modelo Mathematics Teachers' Specialised Knowledge (MTSK) de Carillo et al. (2018). Nessa proposta de comunicação trazemos as reflexões sobre o desenvolvimento pensamento algébrico com especificidade no conteúdo de classificação.

Considerando estudos prévios realizados pela equipe do MTSK, que nos últimos anos veem desenvolvendo tarefas e investigações sobre quais conhecimentos especializados são necessários para se ensinar Matemática é que o elegemos como referencial de análise. É que justificamos a escolha do modelo Mathematics Teachers' Specialised Knowledge (MTSK) de Carillo et al. (2018), por considerá-lo o mais adequado para a proposta de reflexão para a temática. Consideramos que este é um modelo que permite por em foco a atenção em aspectos que até agora não haviam permanecido fora do alcance do profissional desta etapa, sobretudo com aqueles que tem a ver com o domínio matemático, o conhecimento da estrutura matemática e o conhecimento da pratica matemática.

Diante do exposto, organizamos esta comunicação apresentando o estudo teórico sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico na Educação Infantil e a proposta para refletirmos sobre os conhecimentos necessários ao professor em formação inicial para se ensinar o pensamento algébrico, com especificidade na classificação.

O pensamento algébrico na educação infantil

Alguns pesquisadores internacionais têm feito aprofundamento dos estudos para compreender quais os conhecimentos são inerentes ao pensamento algébrico na Educação Infantil.

O documento NCTM (2000, p. 90) indica que deve ser trabalhado desde a Educação Infantil :

> princípios y propriedades gerais de certas operações como a comutatividade, utilizando números específicos e representações concretas, pictóricas e verbais, para o desenvolvimento do conhecimento das noções simbólicas. (NCTM, 2000, p. 90)

Carraher et al. (2021, p. 500) mencionam em uma análise geral do pensamento algébrico sobre os documentos do NCTM (2000), que os estudantes para o desenvolvimento do pensamento algébrico devem: (a) compreender padrões, relações e funções ; (b) representar e analisar situações e estruturas matemáticas utilizando símbolos matemáticos; (c) utilizar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e (d) analisar as transformações de diversos contextos.

No entanto nota-se que o autor anterior não aprofunda sobre quais seriam os conhecimentos inerentes ao pensamento algébrico na Educação Infantil. Observamos que Muñoz-Catalán et al. (2021) avança nas análises quanto a especificidade do que compõe o pensamento algébrico. Os autores baseiam-se em Jacobs et al. (2007), Kaput (1998), Socas (2011), Kieran (2004), Carpenter et al. (2003) e mencionam que o pensamento algébrico é composto por generalização e formalização de padrões, regularidade numérica, relações , manipulação de simbolismo, relacionamento funcionais e modelagem. Assim, considera-se as tarefas que incluem relações entre quantidades identificação de estruturas, generalização, resolução de problemas, modelagem, prova e previsão. Consideram ainda, que o pensamento algébrico não deva se limitar a representação algébrica mas ter a compreensão de outras representações como a gráfica e a linguagem natural (Muñoz-Catalán et al., 2021, p. 39).

Assim, consideramos o pensamento algébrico na Educação Infantil os conteúdos de designação, simbolização, conjunto, classificação, seriação, composição e decomposição de um número, reflexões sobre as operações matemáticas, generalizações, modelagem, provas, previsões de resoluções. Utilizando-se para isso de diferentes recursos que promovam a reflexão como materiais concretos, desenhos e oralidade.

Para que haja um maior aprofundamento sobre os conhecimentos que o professor deve possuir para ensinar o pensamento algébrico, selecionamos a classificação por considerarmos um dos conteúdos mais utilizados tanto em ações do cotidiano como em ações didáticas em sala de aula. Este fato nos faz inferir ao refletirmos sobre a classificação pela proximidade de ações já realizadas e poderemos facilmente contribuir no desenvolvimento de tarefas que efetivamente cheguem em sala de aula e permita o desenvolvimento do pensamento algébrico com especificidade na classificação.

Cabe salientar que a classificação é considerada um dos conteúdos do pensamento algébrico, pois refere-se a ação de agrupar, utilizando para isso critérios, supondo uma organização por elementos que tem em comum. Assim, considera-se a classificação parte das ações que formam o pensamento algébrico, pois esta é consequência da ideia de equivalência aplicada a um conjunto . Portanto um conjunto organizado por classificação deve cumprir as três propriedades de equivalência : reflexiva, simétrica e transitiva. Assim, por desenvolver reflexões sobre as propriedades de equivalência , a classificação é um dos conteúdos que compõem o pensamento algébrico.

Ademais, a classificação proporciona a construção de padrões , pois é por meio da classificação que se iniciam as primeiras observações das características dos objetos e cria-se critérios de classificação.

Na próxima seção apresentaremos uma proposta para refletir sobre os conhecimentos necessários para ensinar a classificação.

Proposta para refletir sobre os conhecimentos para se promovera classificação.

Ao tratarmos sobre o conhecimento para o ensino de classificação identificamos a dissertação de Doiche (2021) que apresenta reflexões sobre a classificação em uma tarefa para polígonos. Notamos que apesar da investigadora abordar a classificação e os conhecimentos necessários para o professor ensiná-la, não é descrito na dissertação sua relação com o pensamento algébrico, no entanto está nos auxiliou para refletirmos sobre os conhecimentos especializados dos professores da Educação Infantil. Assim, tentamos ampliar as reflexões sobre quais conhecimentos são necessários para se promover o pensamento algébrico com especificidade no conteúdo de classificação.

Considerando o que Doiche (2021) apresenta como conhecimentos necessários aos docentes para ensinar classificação, o ampliamos utilizando Chamorro (2005) e Muñoz-Catalán et al. (2018). Assim, consideramos pertinente a questão de saber definir o que é uma coleção, saber definir o que é uma relação, as características dos objetos e suas relações binárias. Além disso, as autoras indicam a importância de identificar propriedades dos objetos, comparar objetos e coleções (semelhanças e diferenças), além de relacionar o mundo exterior para o desenvolvimento da coerência lógica, perceber atributos dos objetos que o definem.

Assim, com o intuito de reunir todos os nossos esforços em compreender quais são os conhecimentos para se ensinar nessa na área de investigação apresentamos o quadro 1 a seguir:

Quadro 1 – Os conhecimentos especializados aos professores para se ensinar classificação

Subdomínio	Conhecimentos
KoT	-Saber que para estabelecer uma relação se debe definir o conjunto sobre o qual atua - A designação precisa de um conjuntos por extensão e por compreensão para favorecer a compreensão dos conceitos matemáticos - conhecer que a classificação matemática, entendida como resultado da aplaicação de uma relação de equivalencia, tem suas características proprias: gera classes de equivalência, os elementos de cada clase são equivalentes, implica processos de identificação e compração e de arbitraria, no sentido de que não veem dada se não que depende da relação de equivalencia que se defina em um conjunto determinado. - Saber que a classificação resulta da aplicação de uma relação de equivalência a um conjunto -Conhecer as propriedades que uma relação binária deve cumprir para ser uma relação de equivalência (propriedades reflexivas, simétricas e transitivas) -Conhecer as características das propriedades das relações binárias. -Saber o que é uma relação binária -Conhecer as condições necessárias e suficientes para que uma relação binária seja cumprida e suas propriedades -Saber que a classificação está subjacente ao sentido numérico (O sistema de numeração decimal) -Saber que a classificação permite conhecer o mundo organizando-o na tipologia dos elementos que o constituem, o que evolui para a compreensão desta ciência (e de qualquer outra) -Saber que existem diferentes classificações baseadas: no número de critérios a considerar, na aplicação simultânea de critérios (classificações cruzadas) e na relação entre classes (categorização)
KSM	Os conhecimentos pré-numéricos como precursores do pensamento algébricos
KPM	-A designação como prática de identificação de atributos dos objetos, precursora da classificação -O papel da designação precisa de um conjunto por extensão e por compreensão para favorecer a compreensão de conceitos matemáticos -O papel da simbolização e da linguagem formal para expressar uma relação binária e o significado de necessário e suficiente nessa relação -A comparação dos elementos do conjunto para estabelecer semelhanças e diferenças

KMT	- Saiba que as tarefas relacionadas à elaboração de listas promovem a constituição do acervo. -Conhecer tarefas para promover a relação entre objetos de um conjunto ou entre conjuntos (como comparação para identificar semelhanças e diferenças). -Saber que o trabalho de classificação deve partir de critérios de natureza perceptiva e progressivamente avançar para critérios de natureza mais abstracta (igualdade, diferença ou quantidade). -Saber que é importante propor tarefas em que os alunos apliquem diferentes critérios ao mesmo conjunto de objetos e observar que um objeto pode ou não ser equivalente a outro dependendo dos critérios estabelecidos. -Conhecer quais teorias e caminhos usar para ensinar, percebendo as trajetorias de aprendizagem.
KFLM	- Saiba que antes de operar um conjunto, o aluno tem que concebê-lo -Saber que o centramento e a acomodação são dois processos cognitivos envolvidos na conceptualização da classificação (Formas de interação). -Saber que o desenvolvimento do pensamento algébrico implica ajudar o aluno a estabelecer relações entre elementos de um conjunto ou entre conjuntos. - Saber que a classificação dá coerência ao pensamento lógico-matemático. - Saiba que uma confusão habitual do aprendiz costuma ser feita entre o objeto e a aula a que pertence, pois a aula é uma abstração resultante de uma construção mental, que não existe no mundo real. - Esteja atento às dificuldades que alguns alunos podem apresentar, como por exemplo a confusão da turma com um elemento da mesma. Compreender como os alunos podem construir suas classificações. Identifique as relações e comparações que alguns de nós estabelecem. Conhecer a dificuldade que a polissemia da classificação das palavras pode gerar para um aluno.
KMLS	Saber o nível de desenvolvimento desejado que alguém tem para resolver tarefa Conhecer a sequência de tópicos anteriores e posteriores por ano de escolaridade. Identificação da classificação como conhecimento matemático no currículo Saber que a classificação é um conhecimento relacionado ao pensamento algébrico típico desta etapa Saiba que a classificação tratada nesta etapa é o conhecimento prévio relacionado à relação de equivalência que será tratada em disciplinas posteriores. Investigue como as crianças se classificam em diferentes idades para estabelecer essa sequência. Verifique se a classificação é tratada no Educação Infantil apenas porque é o conhecimento do número ou por outra coisa.

Fonte: autoria própria

Diante dos conhecimentos abordados no quadro 1, podemos iniciar algumas reflexões sobre o ensino de simetria e como poderemos elaborar futuras tarefas formativas.

Considerações iniciais

Esta comunicação teve como objetivo apresentar uma primeira reflexão sobre os conhecimentos necessários ao professor em formação inicial para se promover o pensamento algébrico na Educação Infantil com especificidade no conteúdo de classificação.

Para isso utilizamos como base o modelo analítico teórico MTSK de Carrillo et. al. (2018). Considerando o estudo pertinente para refletirmos sobre o que é classificação, suas definições e os conhecimentos para seu ensino, complementamos os conhecimentos apresentados, mas em uma perspectiva de conhecer mais sobre os conhecimentos para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Notamos a importância do subdomínio do MK com ênfase no KoT e KPM. Além disso, observa-se que as práticas matemáticas emergidas são consideradas práticas matemáticas pedagógicas emergidas em Wasserman (2022) por que nos faz refletir sobre "os tipos de coisas que os matemáticos fazem e podem, de fato, ser pedagógicos - que eles podem, e às vezes devem, informar as práticas pedagógicas para o ensino da matemática (p. 30)".

Consideramos ainda, que esta proposta inicial servirá de base para estudos futuros sobre a formação de professores para o desenvolvimento do pensamento algébrico com a especificidade do conteúdo classificação.

Referências

Acosta, Y. y Alsina, Á. (2020). Learning patterns at three years old: Contributions of a learning trajectory and teaching itinerary. *Australasian Journal of Early Childhood, 45*(1), 14-29. https://doi.org/10.1177/1836939119885310.

Carraher, D. y Schliemann, A. D. (2019) El pensamiento algebraico temprano y los estándares matemáticos en la Educación Primaria (6–12 años) en Estados Unidos. *Infancia y Aprendizaje, 42*(3), 479-522. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638570

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Clements H. D. y Sarama J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge.

Chamorro, M.ª del C.(Coord.). (2005). *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil.* Pearson Educación.

Doiche, E. D. J. (2021) *Conhecimento Especializado do Professor da Educação Infantil no âmbito da classificação* [Dissertação Mestrado em Educação Escolar, Universidad Estadual de Campinas].

LaCampagne, C. B., Blair, W., y Kaput, J. J. (Eds.). (1995). *The algebra initiative colloquium: Vol 1: Plenary and reactor papers.* Department of Education, Office of Educational Research and Improvement. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED385436.pdf

Lee, J., Collins, D.,y Melton J. (2016). What does algebra look like in early childhood? *Childhood Education, 92*(4), 305–310. https://doi.org/10.1080/00094056.2016.1208009

Muñoz-Catalán, M. C., Liñán García, M. del M., y Ribeiro, M. (2018). Conocimiento Especializado Para Enseñar la Operación de Resta en Educación Infantil. *Cadernos De Pesquisa, 24*(esp.), 4–19. https://doi.org/10.18764/2178-2229.v24n.especialp4-19

Muñoz-Catalán, M.C., Ramírez-García, M., Joglar-Prieto, N. y Carrillo-Yáñez, J. (2021), Early childhood teachers' specialised knowledge to promote algebraic thinking as from a task of additive decomposition *(El conocimiento especializado del profesor de educación infantil para fomentar el pensamiento algebraico a partir de una tarea de descomposición aditiva). Journal for the Study of Education and Development, 45*(1), 37-80. https://doi.org/10.1080/02103702.2021.1946640.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, National Council of Teachers of Mathematics. Retrieved from https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-andStandards/Algebra/

Parks, A. N., y Wager, A. A. (2015). What knowledge is shaping teacher preparation in early childhood mathematics? *Journal of Early Childhood Teacher Education, 36*(2), 124–141. https://doi.org/10.1080/10901027.2015.1030520

Wasserman, N.H. (2022). Re- exploring the intersection of mathematics and pedagogy. *For the learning of Mathematics, 42*(3), 28-33.

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO MOVILIZADO DURANTE UNA TAREA FORMATIVA SOBRE UN PROBLEMA DE GENERALIZACIÓN

Specialized knowledge mobilised during a teacher-training task on a generalisation problem

Chico, A. [a], Sánchez-Cerrejón, A.[a], Climent, N.[a], Contreras, L.C.[a], Gómez-Hurtado, I.[a]
[a] Universidad de Huelva, España

Temática: 1 – MTSK en la formación docente

Resumen.
El presente estudio describe el conocimiento movilizado durante el desarrollo de una tarea sobre resolución de problemas en la formación inicial de maestros. La tarea propone el análisis de producciones de alumnado de Primaria resolviendo un problema de generalización. A partir de la observación y videograbación de su implementación, se analiza el conocimiento especializado movilizado respecto al conocimiento esperado en el diseño de la tarea. El análisis de los resultados muestra una predominancia de evidencias de conocimiento sobre dificultades y estrategias de los estudiantes de primaria (KFLM) destacando además la ausencia de algunos subdominios, como KMT, respecto al conocimiento especializado esperado en el diseño.

Palabras clave. Resolución de problemas, Generalización, Primaria, conocimiento del profesor.

Abstract.
This study describes the specialized knowledge mobilized during the development of a problem-solving task in a perspective teacher training session. The task proposes the analysis of primary students' generalising process. The observation and videorecording of the task implementation allows for analyze prospective teachers specialized knowledge mobilized with respect to the expected one in the task design. The analysis of the results shows a predominance of evidence of knowledge about difficulties and strategies of primary school students (KFLM) but it is also highlighted the absence of some subdomains, such as KMT, with respect to the specialized knowledge expected in the design of the training task.

Keywords. Problem-solving, generalisation, primary education, teacher specialized knowledge

Chico, A., Sánchez-Cerrejón, A., Climent, N., Contreras, L.C. y Gómez-Hurtado, I. (2023). Conocimiento especializado movilizado durante una tarea formativa sobre un problema de generalización. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 71-78). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

Para trabajar la resolución de problemas en el aula de educación primaria, los docentes no solamente necesitan adquirir habilidades como resolutores, sino también conceptualizar y comprender las dificultades y limitaciones vinculadas al proceso de resolución, junto con las metodologías que impulsen las competencias del propio alumnado al resolver problemas (Chapman, 2015).

En este estudio nos centramos en una tarea de formación inicial de estudiantes para maestro de educación primaria (en adelante EPM), en la Universidad de Huelva. Tras resolver un problema de generalización se les presenta a los EPM fragmentos del proceso de resolución que llevaron a cabo niños autistas de tercer ciclo de primaria al afrontar el mismo problema. El objetivo de la tarea de formación es analizar las estrategias observadas en la resolución de los niños y discutir sobre las limitaciones y potencialidades de los materiales utilizados para resolver el problema. Hacemos uso de los subdominios del modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) para describir qué conocimiento se moviliza durante el curso de esta tarea de formación inicial, respecto al pretendido en su diseño.

Marco teórico

Abordar problemas de generalización en el aula de primaria, entendiendo este proceso como el descubrimiento de regularidades que se observan dentro de un conjunto de casos (Callejo y Zapatera, 2017), implica acercar a los estudiantes al lenguaje algebraico (Radford, 2002), considerando distintas expresiones y representaciones, como verbal, simbólica, gestos, movimientos o dibujos (Chico, Climent, Gómez-Hurtado y Polo-Blanco, en prensa) que beneficien la diversidad de habilidades que puedan presentar los estudiantes. El rol del docente, como guía y facilitador del aprendizaje, requiere de un conocimiento especializado en estrategias didácticas en la resolución de problemas de generalización, con objeto de considerar las dificultades y obstáculos que pueden frenar el proceso de resolución.

Estudiamos la implementación de una tarea de formación inicial, respecto al conocimiento didáctico del contenido y el conocimiento de los temas que necesita un EPM al trabajar la resolución de problemas. Nuestra investigación se enmarca en el sistema de subdominios y categorías del modelo MTSK (Carrillo et al., 2018), para identificar el conocimiento implicado en el desarrollo de tareas formativas.

Partimos del diseño de una tarea de formación inicial basada en situaciones de aprendizaje en un taller de resolución de problemas de generalización con alumnado Síndrome de Asperger (Chico, Climent, Gómez-Hurtado y Polo-Blanco, en prensa). El alumnado con Síndrome de Asperger o grado 1 del espectro autista (DSM-V) suele presentar dificultades relacionadas con la organización, comprensión o autorregulación del propio proceso de resolución, entre otras necesidades relacionadas con la función ejecutiva (Klaren et al., 2017) que pueden ser compartidas con alumnado con desarrollo típico en el aula ordinaria y que el docente necesita conocer (conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas, KFLM). El proceso de resolución de problemas puede ser abordado de diferentes formas según estas dificultades, pero también en función de las habilidades de los estudiantes, lo que plantea, por un lado, conocer el contenido que involucra el generalizar en esta etapa educativa (conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas, KMLS) y por otro, la necesidad de ahondar en las posibilidades de registro y representación para afrontar los procesos de generalización, desde el uso de dibujos, representaciones gráficas o tabulares (conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, KMT). La investigación de Lannin et al. (2006) aporta un marco de referencia atendiendo a las estrategias desarrolladas por niños y niñas de 5º de primaria y dan un papel especial al material manipulativo y al uso de dibujos al generalizar, al disminuir los errores que acarrea el empleo del registro algebraico. Estos investigadores plantean que, al generalizar, pueden confluir diversas estrategias, como el conteo como herramienta de visualización y comprensión del patrón, el descubrimiento de la regularidad recursiva o multiplicativa o la transición desde casos concretos hacia la una regla general. En este sentido, la posibilidad de introducir distintos medios de comunicación, por ejemplo, a través de apoyo visual o el uso de recursos, se presenta como una herramienta didáctica (KMT) que además va en consonancia con los principios del Diseño Universal de Aprendizaje en términos de uso de distintos registros que involucren a todos los estudiantes y sus características (Rose y Gravel, 2010) (KMT teorías de enseñanza) y que, desde la perspectiva metacognitiva de Schoenfeld en la resolución de problemas, puede beneficiar la autorregulación del propio proceso de resolución, tan relevante en el contexto de enseñanza con niños que pueden mostrar afectada esta función ejecutiva (Ozonoff, 1997).

Al abordar una tarea formativa con estudiantes del Grado en Educación Primaria, partimos de la pregunta de investigación: ¿Qué conocimiento especializado se manifiesta durante una sesión de resolución de problemas de generalización y análisis de situaciones de enseñanza con estudiantes para maestro?

Metodología

Se ha seguido una metodología de tipo investigación de diseño mediante el diseño, implementación y evaluación de una tarea formativa realizada por 141 EPM de primer año del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Huelva y que cursaban una asignatura orientada hacia la resolución de problemas de generalización, entre otros heurísticos. Este estudio de caso se centra en una tarea de formación que gira sobre el problema de "La arqueóloga" (Figura 1), llevado a cabo durante un taller de resolución de problemas con niños de quinto y sexto de primaria durante el curso 2021-2022 en colaboración con la Asociación Onubense de Síndrome de Asperger, AOSA, y el proyecto INCLUREC[1] de la Universidad de Huelva. El problema de la Arqueóloga fue adaptado al contexto de enseñanza de alumnado con Síndrome de Asperger, empleando un enunciado secuenciado y estructurado y material TEACCH (Figura 2), de manera que los niños debían relacionar las alturas de los dinosaurios con el número de cajones.

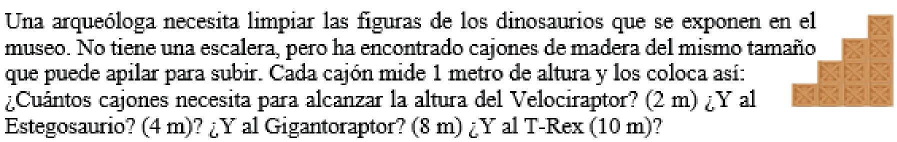

Una arqueóloga necesita limpiar las figuras de los dinosaurios que se exponen en el museo. No tiene una escalera, pero ha encontrado cajones de madera del mismo tamaño que puede apilar para subir. Cada cajón mide 1 metro de altura y los coloca así: ¿Cuántos cajones necesita para alcanzar la altura del Velociraptor? (2 m) ¿Y al Estegosaurio? (4 m)? ¿Y al Gigantoraptor? (8 m) ¿Y al T-Rex (10 m)?

Figura 1. El problema de La Arqueóloga

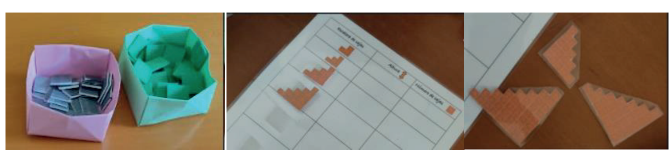


Figura 2. Material TEACCH: piezas de gomaeva, organizador gráfico y pictogramas de escalera de diferentes alturas

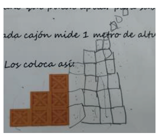
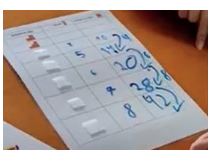
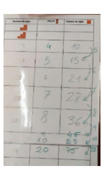
La tarea de formación en el aula de EPM se desarrolló en tres fases. Durante la primera fase los estudiantes para maestro se enfrentaron a la resolución del problema de La Arqueóloga con el condicionante de emplear estrategias que pudieran trabajarse en educación primaria. Se les propuso evaluar la validez de sus estrategias en el caso de un dinosaurio de 20 o 30 metros de altura. En la segunda fase, se discuten y valoran en el aula formativa las distintas estrategias desarrolladas por los EPM y su posible translación al aula primaria, considerando las dificultades esperadas al resolver el problema. En la tercera fase se contextualiza el desarrollo del problema con niños de tercer ciclo

1 El proyecto INCLUREC es un proyecto-taller permanente de creación y adaptación de recursos para alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo

de educación primaria, desde la presentación y posible uso del material (Figura 2) hasta el análisis de los procesos de resolución de dos alumnos: Isaac (sexto de primaria) e Iván (quinto de primaria). En esta última fase, los EPM cuentan con un enunciado (Tabla 1) que contiene 4 situaciones de aprendizaje que se complementan con la visualización de un vídeo de la resolución de Iván y una guía con preguntas sobre los cuatro fragmentos. Destacamos que, aunque las situaciones de aprendizaje reflejan resoluciones de niños diagnosticados con Síndrome de Asperger, el foco de la tarea reside en discutir la diversidad de estrategias, representaciones y dificultades vinculadas a la resolución del problema de la arqueóloga y no en características específicas asociadas al Síndrome.

La videograbación de la sesión se transcribe, y junto con las producciones de los EPM, se obtienen unidades de información que se analizan atendiendo a los descriptores asociados a los subdominios y categorías del MTSK (Carrillo et al., 2018), de acuerdo con el marco teórico y la pregunta de investigación. Para el análisis se recurre al conocimiento esperado de las actividades, descrito en Chico, Climent y Gómez-Hurtado (en prensa), que se organiza y concreta para cada pregunta del enunciado de los EPM, con el objetivo de establecer una comparación entre el conocimiento esperado y el conocimiento movilizado durante la sesión con los estudiantes del Grado en Educación Primaria.

Tabla 1. Enunciado de la tarea formativa

 *Figura 3: Escalones flotantes de Isaac*	**Situación 1.1:** Isaac comienza resolviendo de manera autónoma, aplicando el conteo sobre el dibujo del enunciado mediante cálculo mental. Cuando se le pregunta por su estrategia, habla sobre "apilar las cajas". Para resolver el caso del Gigantorraptor (8m), decide modelar el ejemplo, pero solamente dibujando las cajas superiores de cada columna (figura 3). Cuando aplica esta nueva estrategia, se da cuenta de algunos errores que había cometido en el conteo, de manera que los corrige.
 *Figura 4: Estrategia de flechas*	**Situación 1.2:** Retamos a Isaac a averiguar cuántas cajas necesitaría la arqueóloga para alcanza un dinosaurio de 20 metros (tras preguntarle por algunos ejemplos de especies, ya que le encantan). Para ello, se le proporciona el organizador. Después de unos instantes de silencio, se le repite la pregunta, esta vez incidiendo en los ejemplos anteriores sobre los 4, 5 y 6 metros. Isaac de nuevo vuelve a contar para completar el organizador. De modo que la profesora le sugiere encontrar una estrategia más rápida. "Saltar", contesta Isaac. Comienza a "saltar" utilizando el organizador, y registrando la información para cada nuevo escalón. Después de "saltar" hasta los 8 metros, Isaac comienza a dibujar flechas en el organizador (Figura 4) para conectar verticalmente los números de cajas. Hasta este momento, él había ido calculando todo de memoria, lo que le hacía olvidar los datos y cometer errores de cálculo.
 *Figura 5: El caso de 20 metros*	**Situación 1.3:** Respondidas todas las preguntas del enunciado, volvemos a proponerle el reto del dinosaurio de 20 metros. Isaac escribe "20" en la columna altura y la correspondiente flecha con un "20" para calcular el término de la secuencia (Figura 5).
	Después de ser retado igual que Isaac, Iván propone encontrar cuántas cajas necesitaría la arqueóloga para alcanzar un dinosaurio de 30 metros ("¡Vamos a hacerlo de cabeza!). Para ello, tras consultar su organizador realiza una suma de los números consecutivos con los que ya había trabajado, partiendo del 55 (N=10): 55+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20. Obtiene 210 y lo multiplica por 30.

Resultados y discusión

Los resultados se organizan respecto al conocimiento especializado esperado basándonos en el diseño de la tarea (Chico, Climent y Gómez-Hurtado, en prensa), y el manifestado por los EPM, utilizando las cuestiones del enunciado como guía para el análisis y discusión (tabla 2).

Tabla 2. Comparación entre el conocimiento especializado esperado y el manifestado en cada pregunta del enunciado de los EPM

1. ¿Qué heurísticos se observan en las situaciones 1 y 2?	
CONOCIMIENTO ESPERADO	**CONOCIMIENTO MANIFESTADO Y EVIDENCIA**
KPM – Fases en la RP y heurísticos. Resolución de problemas de generalización. *KFLM – formas de interacción:* Cómo resuelven problemas estudiantes de generalización: estrategias de resolución de problemas de generalización: de conteo, recursivas, …; uso de representaciones.	*KPM – Heurístico:* Ensayo y error “Comienza a añadir cajas y se da cuenta que se equivoca y vuelve, dando a lugar al método". *KFLM – modos de interacción:* “Isaac realiza el problema a través de una representación gráfica, en la que dibuja las cajas aplicando la técnica del conteo”
2. Describe la estrategia de Isaac para resolver los casos del Gigantorraptor y el dinosaurio de 20 metros (situaciones 1.1 y 1.2). Compara estas dos estrategias para identificar similitudes y diferencias. ¿Qué papel tienen estas estrategias para la generalización?	
KMT – estrategias: estrategias de resolución de problemas de generalización como el conteo, recursivas… y el uso de la representación gráfica y tabular. *KFLM – modos de interacción.*: Cómo el alumnado afronta el proceso de resolución que le aproxima a la generalización.	*KFLM – modos de interacción:* “Para concluir podemos decir que Isaac ha implementado una estrategia que consiste en saltar de cajas en cajas obteniendo el número final de cada línea y así sumarlas para saber el número de esa fila, obteniendo así una suma más rápida”.
3. Describe las diferentes formas de representación de Isaac y sus potencialidades y limitaciones para el proceso de resolución del problema.	
KMT – recursos: El uso del dibujo y organizador tabular, sus potencialidades y limitaciones para resolver el problema. KFLM – modos de interacción: Cómo el alumnado emplea sus propias estrategias de representación para abordar el problema. *KMT – Teorías de Enseñanza:* Diseño Universal de Aprendizaje, teoría de las representaciones semióticas, teoría de las situaciones de aprendizaje.	*KMT – recursos*: “empleado la representación, es decir, los cubos para poder hacerlo de forma visual. Esta forma puede ser fácil, e incluso difícil a la vez, ya que, a la hora de contar puedes tener errores”. *KFLM – modos de interacción:* “Las diferencias son que en una dibuja cajas y por lo tanto se va a equivocar menos y en la otra al utilizar números tiene más posibilidades de fallar porque calcula mentalmente”.
4. Evalúa cómo el organizador tabular puede influenciar el proceso de resolución de Isaac (situaciones 1.2 y 1.3), en términos de sus potencialidades y limitaciones.	
KMT – recursos: Recursos de enseñanza inclusiva de RP: organizadores gráficos y tablas. *KMT – estrategias:* Estrategias de enseñanza inclusiva de RP: aprendizaje secuenciado, uso de representaciones y material manipulativo. *KFLM – fortalezas y dificultades:* habilidades y obstáculos del alumnado en el proceso de generalización, como el registrar, organizar y relacionar los datos, cálculos o buscar regularidades gráfica y aritméticamente.	*KMT – recursos:* “El organizador puede ayudarlo a ver las conexiones entre variables de manera más clara. Aunque también puede confundirle, le falta espacio”. *KFLM – fortalezas y dificultades:* “El organizador es una herramienta de apoyo que él utiliza para dejar de retener los cálculos de memoria, expresarlos e identificar sus errores”.
5. Describe las estrategias de Iván e Isaac para afrontar el caso del dinosaurio de 20 m. (situaciones 1.3 y 2). Compara las dos estrategias identificando las similitudes y diferencias. ¿Qué papel tienen estas estrategias para la generalización?	
KFLM – fortalezas y dificultades: dificultades relacionadas con las operaciones multiplicativas y con la comprensión del problema y la propia estrategia de resolución. Habilidades de visualización y cálculo. *KFLM – modos de interacción:* cómo los dos alumnos abordan la generalización en términos lejanos y no consecutivos de la secuencia.	*KFLM – fortalezas y dificultades:* “Para hallar el de 30, Iván usa una multiplicación. Decidió multiplicar 210 por 30. Ambos piensan igual para ahorrar tiempo, pero uno suma y otro multiplica. Los dos están equivocados en sus métodos, por lo que vemos que intentan buscar un método rápido de hacerlo”. *KFLM – modos de interacción:* “Iván ha decidido escribir todos los cálculos uno a uno para no equivocarse e Isaac ha decidido acortar y calcular de memoria”.

6. Observa la resolución de Isaac (situaciones 1.1, 1.2 y 1.3). Identifica las posibles fases de con respecto a la teoría de Polya	
KPM – fases en la RP	*KPM – fases en la RP:* "En la situación 1.1. comprende y planifica el problema de una manera gráfica. Al realizarlo, lo ejecuta y luego lo revisa dándose cuenta de los errores".

Fuente: Elaboración propia partiendo de la propuesta de tarea formativa de Chico, Climent y Gómez Hurtado (en prensa)

Centrándonos en las tareas propuestas, a continuación, reflexionaremos sobre el subdominio que esperábamos encontrar con el conocimiento que finalmente se movilizó en dichas tareas formativas. Por ello cabe destacar que, en la primera cuestión, aparecen de forma testimonial estrategias heurísticas y/o fases de la resolución de problemas (KPM), que era aquello que preguntábamos, dando lugar a que los argumentos de los EPM giren alrededor del modo de pensamiento de los dos estudiantes (KFLM), entre otras: "La estrategia que utiliza es la mental y lo hace con ayuda de un organizador que se le facilita al alumnado". Después, cuando se pregunta por las estrategias seguidas por Isaac en las dos primeras situaciones, los EPM no mencionan posibles estrategias de enseñanza inclusivas en la resolución de problemas (KMT) sino que le dan más importancia a cómo experimenta Isaac el proceso de resolución (KFLM), siendo un elemento que destacar porque movilizan un subdominio que, en un principio, no se esperaba. En tercer lugar, cuando se pregunta a los EPM sobre las potencialidades y limitaciones de las diferentes representaciones de Isaac, mencionan los recursos inclusivos en la resolución de problemas (KMT): "Ha usado organizadores (tablas) y flechas tanto para realizar la segunda forma como para realizar la tercera, ya que, a simple vista ambos son similares, aunque planteados de distintas maneras". Asimismo, lo relacionan a cómo el estudiante interactúa con el propio problema (KFLM), pero de ningún modo con posibles métodos inclusivos en la resolución de problemas o el uso de distintos registros (KMT). Esto deja en evidencia que los EPM no han tenido en cuenta la posibilidad de materiales inclusivos. En la cuarta, quinta y sexta pregunta, el conocimiento que se movilizó era el esperado. En la cuarta cuestión, los EPM despliegan los subdominios esperados, es decir, toman el organizador tabular como un recurso con potencial suficiente, que facilita la búsqueda de estrategias (KMT y KFLM). En quinto lugar, la descripción de las estrategias seguidas por Iván e Isaac se centran en cómo se ocupan del problema, teniendo en cuenta las dificultades que acarrea. Finalmente, los EPM se limitan a relatar las fases de Polya, intentando relacionarlo con el proceso de resolución de Isaac: "En el 1.1., comienza a comprender el ejercicio, después en el 1.2., planifica la estrategia y finalmente en el 1.3., ejecuta y revisa la estrategia".

Aunque en la fase 1 y 2 de la tarea los EPM resolvieron el problema de la arqueóloga y discutieron las posibles dificultades asociadas al problema y su proceso de resolución en un aula de primaria, se han encontrado obstáculos al trasladar las ideas a la discusión sobre la resolución de Iván e Isaac en la fase 3. Una de ellas es que los EPM se han centrado en las características que mostraban los alumnos y los errores que evidenciaban en sus estrategias (KFLM modos de interacción y habilidades y dificultades), pero que no llegaban a conectar con el pensamiento matemático de los estudiantes, clave en el proceso de resolución (Wilson et al., 2013): "En la primera estrategia, Isaac usa el conteo y la representación mediante el dibujo. Comienza a apilar cajas, pero finalmente solo dibuja los cajones superiores que marcan la altura". Ejemplo de ello es que encontraran dificultades para conectar las 3 estrategias de Isaac, lo que sugiere tener una visión de la resolución de problemas lineal y homogénea, es decir, sin saltos en el proceso (Piñeiro et al., 2019). Sí que se encuentran evidencias de conocimiento sobre estrategias de enseñanza y recursos (KMT) cuando se explicitan cuestiones sobre las representaciones de Isaac y el uso del organizador tabular (preguntas 3 y 4 del enunciado). Durante la discusión de estas cuestiones se manifiestan relaciones entre el rol de resolutor y rol del docente, estableciendo conexiones entre sus propios métodos de resolución y las dificultades que han manifestado los dos niños: "Al principio, Isaac lo ha hecho gráficamente, como lo hemos hecho nosotros" o "Lo ha hecho más o menos igual que nosotros, ha sumado 1+2+3... hasta +20, pero ha fallado en los cálculos".

El diseño inicial de la tarea pretendía ahondar en los aspectos de la enseñanza inclusiva de la resolución de problemas, pero las limitaciones de tiempo han condicionado el desarrollo de esta perspectiva de enseñanza. Sin embargo, durante las tres fases de la tarea se han evidenciado aspectos como la potencialidad de encontrar diversidad de estrategias y recursos que beneficien el proceso de resolución tanto de los niños como de los EPM.

Conclusiones

Este estudio se basa en el modelo MTSK para analizar y describir el conocimiento especializado que se moviliza en una tarea de formación inicial sobre resolución de problemas de generalización basada en situaciones reales de aprendizaje de estudiantes de educación primaria. Aunque en un primer diseño, se esperaban abarcar distintos subdominios relacionados con el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido, las limitaciones de tiempo durante la sesión condicionaron la implementación de la tarea con los EPM. Estas limitaciones han influido también en el abordaje de la tarea desde la perspectiva inclusiva, considerada en el propio diseño. Los resultados muestran cómo los EPM no han considerado ningún aspecto del enunciado y la resolución del problema de la arqueóloga vinculado a estrategias de enseñanza y teorías del aprendizaje relacionadas con la diversidad de características del aula de primaria, mostrando que para que sea considerado, por los EPM, los aspectos ligados a la inclusividad deben estar de forma explícita. Esto queda en evidencia cuando no proponen el uso de materiales TEACCH o referencias al Diseño Universal de Aprendizaje.

Considerando que el conocimiento didáctico sobre resolución de problemas de los EPM es principalmente teórico (Piñeiro et al., 2019), desarrollar tareas de formación inicial centradas en situaciones de aprendizaje de educación primaria puede propiciar la experiencia de los futuros profesores en identificar e interpretar las respuestas de los estudiantes (Callejo y Zapatera, 2017), y por consiguiente impulsar su conocimiento profesional. Usar vídeos de situaciones reales de educación primaria puede impulsar un conocimiento más significativo sobre las habilidades y dificultades de los niños y su manera de aproximarse a la resolución del problema (Climent et al., 2016). Los resultados han mostrado que los EPM evidencian principalmente KFLM, ya que su mirada está centrada en el aprendizaje de los niños más que en los recursos que se les han facilitado. La percepción de las dificultades y actuaciones del alumnado de primaria puede ser un punto de partida para construir conocimiento sobre la enseñanza de la resolución de problemas. Esto nos lleva a continuar esta línea de investigación empleando grabaciones de aulas de educación primaria como fuente de tareas de formación inicial, trasladando el foco de análisis y discusión a las acciones del docente en la resolución de problemas.

Agradecimientos

Este estudio ha sido realizado en el marco de un contrato predoctoral FPU20-05070 del Gobierno de España, del Centro de Investigación COIDESO de la Universidad de Huelva y del grupo de investigación DESYM (HUM-168), impulsado por el Proyecto de Innovación “Resolución de problemas desde la perspectiva inclusiva” de la Universidad de Huelva y el proyecto de investigación PID2021-122180OB-I00.

Referencias

Callejo, M.L. y Zapatera, A. (2017). Prospective primary teachers’ noticing of students’ understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*, 309–333. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9343-1

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers’ knowledge for teaching problem solving. LUMAT: International *Journal on Math, Science and Technology Education, 3*(1), 19–36. https://doi.org/10.31129/lumat.v3i1.1049

Chico, A., Climent, N., y Gómez Hurtado, I., (en prensa). Designing tasks for prospective teachers: specialised knowledge on the inclusive teaching of problem-solving. *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME13). ERME.

Chico, A., Climent, N., Gómez-Hurtado I, y Polo-Blanco, I. (en prensa). Resolución de un problema de generalización por un alumno de 5º de primaria con Síndrome de Asperger. *Investigación en Educación Matemática XXVI*. SEIEM.

Climent, N., Montes, M.A., Contreras, L.C., Carrillo, J., Liñan, M.M., Muñoz-Catalán, M., Barrera, V.J y León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las matemáticas a través del análisis de videos. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 9,*85 -103.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Klaren, M., Pepin, B., y Thurlings, M. (2017). Autism and mathematics education. In A. Bikner-Ahsbahs, M. Haspekian, A. Bakker, y M. Maracci (Eds.), *Proceedings of the CERME 10* (pp. 629–636). CERME.

Lannin, J., Barker, D. y Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal, 18*(3), 3-28. https://doi.org/10.1007/BF03217440

Ozonoff, S. (1997). Components of executive function in autism and other disorders. En J. Russell (Ed.), *Autism as an executive disorder* (pp. 179–211). Oxford University Press.

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E., y Castro, E. (2019). Primary teachers' conceptions and beliefs about mathematical problems, its resolution and teaching. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, 16, 57–72. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i16.253

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14-23.

Rose, D.H. y Gravel, J.W. (2010). *Universal Design for Learning. In International Encyclopedia of Education* (Third Edition). Elselvier.

Wilson, P. H., Mojica, G., y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: supporting teachers' understanding of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior,* 32, 103–121.

DECISIONES DIDÁCTICAS EN ESTADÍSTICA ¿DE QUÉ MANERA INFLUYE EL MTSK PARA SU CONCRECIÓN?

Didactic decisions in statistics
¿how does the MTSK influence its concretion?

Lizarde-Flores, E.[a], Reyes-Camacho, A.[a], Hernández-Gutiérrez, F.[a], Monreal-Reyes, J.[a], Loera-Serrano, S.[a], Ayala del Villar, E.[a], Alonso-Segovia, C.[a]

[a] Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos", México

Temática: 1 – MTSK en la formación docente

Resumen.
En el marco de un programa de maestría profesionalizante se planteó el diseño colaborativo de un proyecto de investigación en estadística escolar y su aplicación en un grupo de 1º grado de educación primaria, en términos del diseño metodológico de un "experimento de enseñanza"; derivado de ello presentamos un análisis del conocimiento especializado que manifiestan tres maestras que aplicaron el mismo proyecto en diferente grupo y las decisiones diferenciadas que tomaron. Encontramos que el conocimiento especializado (MTSK) que manifiestan y ponen en juego en su clase contribuye en las decisiones y elecciones de la fenomenología considerada (ámbitos contextuales), las estrategias didácticas utilizadas (devoluciones, tareas y ejemplos), las definiciones (tablas, gráficas y encuestas) y procedimientos que favorecen y, en general, las prácticas específicas de lo que significa hacer estadística.

Palabras clave. Didáctica, Matemáticas, Estadística, MTSK.

Abstract.
Within the framework of a professional master's program, a collaborative design of a research project in school statistics and its application in a group of 1st grade of primary education was proposed, in terms of the methodological design of a "teaching experiment"; derived from this, we present an analysis of the specialized knowledge manifested by three teachers who applied the same project in different groups and the differentiated decisions they made. We find that the specialized knowledge (MTSK) they manifested and put into play in their class contributes to the decisions and choices of the considered phenomenology (contextual domains), the didactic strategies used (returns, tasks and examples), the definitions (tables, graphs and surveys) and procedures that favor and, in general, the specific practices of what it means to do statistics.

Keywords. . Didactics, Mathematics, Statistics, MTSK.

Lizarde-Flores, E., Reyes-Camacho, A., Hernández-Gutiérrez, F., Monreal-Reyes, J., Loera-Serrano, S., Ayala del Villar, E. y Alonso-Segovia, C. (2023). Decisiones didácticas en estadística ¿De qué manera influye el MTSK para su concreción? . En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.79-86). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

En México, el trabajo con el conocimiento estadístico se ha visto muy limitado, curricularmente hablando (Cfr. Rojano Ceballos y Solares Rojas, 2017; Martínez Blancarte y García Ulloa, 2021), y ello ha impactado en su tratamiento al interior del salón de clase, sobre todo porque existe la tendencia en el magisterio de seguir fielmente los planteamientos de los programas de estudio, traducidos en lecciones en los libros de texto.

Cuando Lizarde (2020) se preguntó ¿al terminar sexto grado de educación primaria los niños están preparados para interpretar y analizar la información estadística que presenta a diario el subsecretario de salud, de México, en torno a la pandemia de COVID-19?, de manera directa está asumiendo un cuestionamiento respecto a la formación estadística de las nuevas generaciones; ante ello nos surgen varias preguntas, ¿los profesores tienen los conocimientos estadísticos adecuados/pertinentes para el trabajo didáctico con estos temas en la educación primaria?, ¿cuáles son éstos?, ¿de qué manera los manifiestan en situaciones donde se tienen que poner en juego? Todas ellas difíciles de responder, pero importantes en su tratamiento.

En este trabajo no pretendemos dar respuesta completa a las preguntas anteriores, pero si le aportamos a la caracterización del conocimiento especializado que los profesores manifiestan en una situación muy concreta, el diseño y aplicación de un proyecto de investigación en estadística escolar, es decir, hacemos objeto de estudio la pregunta ¿cuál es el conocimiento especializado y las decisiones didácticas que manifiestan tres profesoras al diseñar y aplicar el mismo proyecto de investigación en estadística escolar en un grupo de primer grado (6 años de edad) de educación primaria?

Con estas preguntas, en esta comunicación hacemos objeto de estudio el análisis del conocimiento especializado (Carrillo et al., 2017) que manifiestan tres maestras quienes, como parte de un programa profesionalizante de maestría en docencia para la educación básica, diseñaron en conjunto un proyecto de investigación en estadística escolar para un grupo de 1º grado de educación primaria, lo desarrollaron (dieron las clases) y lo analizaron generando un informe analítico reflexivo de su propia práctica.

Conocimiento especializado del profesor para la enseñanza de la estadística

La literatura sobre educación matemática y en particular investigaciones sobre el conocimiento del profesor, gradualmente ha focalizado la atención en variables cada vez más específicas que han generado un continuo desde Shulman (1987), Ball et al. (2008), Carrillo et al. (2017) e incluso la propuesta de Vidal-Szabó y Estrella (2020), transitando desde el "conocimiento base para la enseñanza", "el conocimiento matemático para la enseñanza", "el conocimiento especializado del profesor de matemáticas" y "el conocimiento especializado del profesor de estadística".

Aunque la intencionalidad de Vidal-Szabó y Estrella (2020) es centrar la mirada específica en el conocimiento especializado del profesor de estadística, dado que "en palabras de Cobb y Moore (1997), 'al igual que la economía y la física, la estadística hace un uso intensivo y esencial de las matemáticas, sin embargo, tiene un territorio propio que explorar y conceptos centrales propios para guiar la exploración' (p. 814). Asimismo, Zieffler et al. (2018) afirman que la educación estadística ha desarrollado autonomía e independencia respecto de la educación matemática" (Citado en Vidal-Szabó y Estrella, 2020, p. 136), para fines del análisis de los datos que presentamos consideramos pertinente seguir recuperando el MTSK (El conocimiento especializado del profesor de matemáticas, por sus siglas en inglés) porque las clases que analizamos contienen más elementos que pueden ser evidenciados en la puesta en juego de éste que desde el campo propio de la estadística como disciplina autónoma de la educación matemática.

Ahora bien, dado que el MTSK ha tenido una divulgación y uso muy amplio, como se manifiesta en Carrillo, et al. (2022) aquí sólo vamos a describirlo brevemente en atención al uso que le damos en nuestra investigación, como modelo analítico del conocimiento del profesor cuando enseña un tema de estadística.

El modelo MTSK se configura en la Universidad de Huelva, España; en esencia es un modelo analítico que se propone con la finalidad de caracterizar los componentes del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Es muy importante precisar que en las intenciones pioneras para la estructuración del modelo, está presente la idea de la formación del profesor de matemáticas, a ello obedece la marcada precisión de que en éste sólo se consideran, en cada uno de sus subdominios, lo específico a matemáticas, no porque se desconozca o se descalifique el resto del conocimiento del profesor (por ejemplo, conocimientos de pedagogía en general o de psicología en general), sino sobre todo por el énfasis en lo especializado para la formación del profesor de matemáticas.

De manera semejante a como lo precisaba Shulman (1987), el MTSK, como marco teórico para caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Carrillo et al. 2017), considera tres grandes dominios (figura 1): el Conocimiento matemático (MK), como disciplina científica que se utiliza por parte del docente en un contexto escolar; el Conocimiento didáctico del contenido (PCK), que se refiere a los aspectos relacionados con el contenido matemático como objeto de los procesos de enseñanza y aprendizaje; y el dominio de las creencias en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

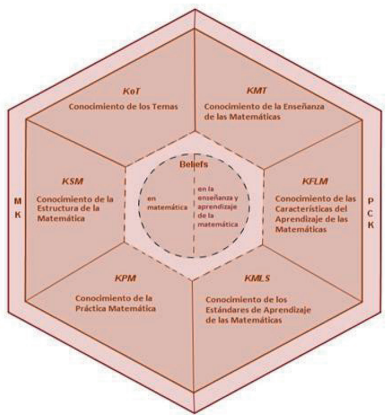


Figura 1. Modelo MTSK (Carrillo et al., 2017)

Estos tres dominios cuentan, a su vez, con subdominios. El MK se subdivide en Conocimiento de los temas matemáticos (KoT), se relaciona con el conocimiento que el docente tiene sobre los contenidos que desarrolla con sus alumnos, así como las relaciones intraconceptuales, por ejemplo, la importancia del ordenamiento y el conteo, así como su manifestación cardinal para ubicar la frecuencia estadística; en este subdominio se consideran cuatro categorías: Procedimientos (¿cómo se hace? ¿cuándo se puede hacer? ¿por qué se hace así? Y características del resultado); Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Registros de representación; Fenomenología y aplicaciones.

Conocimiento de la estructura matemática (KSM), contempla el conocimiento que le posibilita al profesor enseñar los temas matemáticos como fundamentación para su complejización posterior, es decir las conexiones con contenidos anteriores y posteriores. Se distinguen cuatro categorías: conexiones de complejización, conexiones de simplificación, conexiones transversales y conexiones auxiliares.

El tercer subdominio del dominio de conocimiento matemático es denominado Conocimiento de la práctica matemática (KPM), establece la relación entre el conocimiento de los temas matemáticos y los procedimientos y prácticas que se realizan para su construcción. Para este subdominio se han propuesto cuatro categorías: Conocimiento de la práctica de demostrar; Conocimiento de la práctica de definir; Conocimiento de la práctica de resolver problemas; y Conocimiento del papel del lenguaje matemático (Delgado-Rebolledo et al., 2022).

En el dominio PCK se establecieron tres subdominios, en un primer momento, presentamos el Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), respecto a las características de aprendizaje de los contenidos específicos de las matemáticas, donde se encuentran como categorías teorías de aprendizaje, fortalezas y dificultades, formas de interacción con el contenido matemático y aspectos emocionales del aprendizaje de la matemática.

Un segundo subdominio es el Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT), incluye las teorías de enseñanza, los recursos materiales y virtuales, tareas, estrategias didácticas y metodológicas respecto a cómo se presenta el contenido.

Por último, se ubica el Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), que se enfoca a la intencionalidad y conocimiento del profesor sobre los niveles de logro y de desarrollo conceptual y procedimental en los aprendizajes de los alumnos, considerando el momento escolar determinado, su secuenciación con temas anteriores y posteriores, así como el conocimiento de expectativas de aprendizaje en función del currículo nacional o internacional.

Experimentos de enseñanza, una alternativa para la investigación didáctica

En términos metodológicos, desde una perspectiva cualitativa, para el diseño del proyecto de investigación estadística y la recuperación de la información consideramos la idea de "experimentos de enseñanza" en la terminología de Steffe y Thompson (2000), bajo la consideración de que un experimento de enseñanza implica una secuencia de episodios de enseñanza (Steffe, 1983). Un episodio de enseñanza incluye un agente de enseñanza, uno o más estudiantes, un testigo de los episodios de enseñanza y un método de registrar lo que sucede durante el episodio. Estos registros, si están disponibles, se pueden utilizar para preparar episodios posteriores, así como para realizar un análisis conceptual retrospectivo del experimento de enseñanza (p. 273).

Por otra parte, Molina et al. (2011) recuperan las aportaciones de Barab y Squire (2004), así como Cobb et al. (2003) para señalar que, los experimentos de enseñanza, ocurren en diferentes contextos de la vida real donde se gestiona un aprendizaje, por lo cual, se pueden encontrar diferentes tipos. Así, en este trabajo destacamos uno de ellos, cuando un grupo de tres maestras investigadoras participantes en un programa de maestría profesionalizante, diseñan de manera colaborativa un proyecto de investigación en estadística escolar con énfasis en "La pandemia del COVID -19 y sus efectos emocionales y sociales", mismo que, se aplicó en tres grupos diferentes de 1º grado de educación primaria. Además, participa un formador de profesores para promover conjuntamente el desarrollo de una comunidad profesional desde la mirada del MTSK. De esta manera, se justifica la participación de diferentes agentes que aportan experiencias diversas, lo cual, enriquece el diseño, la recuperación de información y su análisis para lograr calidad en el desarrollo de la investigación (Steffe y Thompson, 2000).

En relación con la ejecución de los experimentos de enseñanza se destacan tres fases: 1) preparación del experimento, 2) experimentación para promover el aprendizaje y 3) ejecución del análisis retrospectivo de los datos (Cobb y Gravemeijer, 2008). En la primera fase participaron las tres docentes investigadoras y un formador. En la segunda fase como las tres investigadoras, donde ellas mismas videograbaron las clases. Por último, en la tercera fase, nuevamente las maestras investigadoras analizaron sus clases y, es justo sus transcripciones y sus análisis lo que nos permite aplicar un metaanálisis como ejercicio comparativo para evidenciar el MTSK manifestado y puesto en juego.

Mismo proyecto y situación didáctica ¿cuál es el MTSK que se manifiesta en su aplicación?

El diseño del proyecto de investigación estadística recuperó el ciclo citado en Alsina (2021) en el que se rescata el planteamiento del problema (en el que se problematizó con los alumnos sobre la forma en que podíamos saber cuántos de sus compañeros de la escuela se habían enfermado de COVID), la planificación (vía una encuesta), la recolección de datos y, análisis y las conclusiones, en las que interpretaron los datos obtenidos; al momento de su diseño se partió de la consideración de que el trabajo con pequeñas investigaciones o proyectos permiten no tan solo mejorar la comprensión de los contenidos involucrados en el estudio de la estadística a través de un aprendizaje más motivador y dotado de sentido, sino que también permiten favorecer el desarrollo de la alfabetización estadística, al mejorar la percepción hacia la utilidad de ésta, además de fomentar una actitud positiva hacia su estudio. Bajo estas consideraciones ¿cuáles son algunas de las decisiones didácticas que fueron tomando las maestras y de qué manera podemos inferir el MTSK que las soporta y permite su concreción?

En primer término es importante involucrar a los alumnos en el desarrollo de proyectos sencillos en los que tengan que recoger datos a partir de la observación y la encuesta, en tal sentido, los dos fragmentos de registro siguientes dan cuenta de ello y, a la vez, manifiestan la articulación entre dos subdominios del MTSK que se influyen y complementan para tomar decisiones de actuación: el KoT permite reconocer un contexto fenomenológico de interés para los alumnos, en el entendido de que "sin contexto, el modelado estadístico no puede ocurrir" (Pfannkuch et al., 2018, p. 1115) y el KMT define la estrategia que generará las condiciones didácticas necesarias; al momento de decidir dónde aplicar la encuesta, en el primer caso observamos que se limitó al contexto escolar:

> Ma[1] -Si vamos a buscar. Cuando salgamos a recreo nos vamos a ir a almorzar, cuando terminemos, vamos a buscar como investigadores a dos niños, y vamos a preguntar, mmm ¿Qué les podemos preguntar?
> Aa- Del COVID
> Aa- ¿Qué si le ha dado el COVID? (Dan2[2])

En el segundo caso, el contexto se amplía hacia la comunidad,

> [...] no olviden por favor que ustedes son los investigadores y que van a traer la información para saber cuántos enfermos hubo en su comunidad. ¿Están de acuerdo?, ¿no tienen alguna duda? ¿a ver qué van a hacer?
> Aa. Vamos a preguntarle a tres personas las preguntas que vienen ahí y mañana vamos a contar las respuestas (Mar1)

De manera general reconocemos que el contexto es fundamental para provocar la actitud estadística de escepticismo al analizar el comportamiento de los datos, al cuestionar las limitaciones o explicaciones que pueden conformar la conclusión al problema, sin embargo, en los caso que aquí se ejemplifican, sólo lo están usando para dotar de sentido, significado y funcionalidad al trabajo matemático con la estadística; asumimos como una oportunidad para la construcción del conocimiento especializado del KoT-Fenomenología el reconocimiento de diferentes ámbitos contextuales para hacer estadística, con énfasis en el contexto social como fuente privilegiada, por ello es fundamental resaltar las diferencias en las decisiones en torno al marco contextual al cual referir a los estudiantes para la recolección de la información: del ámbito propiamente escolar, al ámbito comunitario.

Por otro lado, en estos dos breves fragmentos también es importante resaltar dos cuestiones, cuando

---

[1] Utilizaremos la simbología Ma para indicar las participaciones de la maestra; Aa= alumna; Ao= alumno y Aos= varios alumnos
[2] Mar1, Dan2 y Adr3 son los nombres con los cuales ubicamos a nuestras informantes

ambas maestras, en los fragmentos de registro anteriores, se refieren a los niños como "investigadores" están denotando elementos del KFLM y del KPM, en el primer caso porque esa consideración le confiere un papel activo al alumno como constructor de sus conocimientos, en el segundo caso (KPM) se está denotando una forma particular de hacer estadística: ir al campo a recuperar información (sea la escuela o la comunidad) como estrategia para resolver un problema estadístico.

Otro elemento importante que queremos resaltar en cuanto a las decisiones didácticas que tomaron las maestras, vinculado con el KoT y el KPM, es el momento en que, aunque son alumnos de 1º grado, se van construyendo algunas definiciones:

> Ma- Cierto, tenían que hacer una encuesta, y si ustedes ayer hicieron una encuesta ¿Entonces qué es una encuesta?
> Ao- Que nos contesten las preguntas.
> Aa- Preguntar.
> Ma- A, entonces la encuesta es una serie de preguntas que se le hacen ¿a quiénes?
> Aa- A los niños.
> Ma- A varias personas, entre ellos sí, pueden ser a los niños. (Dan2)

Evidentemente, al ser alumnos de 1º grado de primaria, la definición se construye de manera muy elemental, en un primer momento, según vemos en el registro anterior, en torno al instrumento de recuperación de la información; de manera semejante, en el caso de Adr3, la atención para la construcción de una definición está enfocada en el instrumento de registro de los datos, con la finalidad de organizar la información, tal y como vemos en el siguiente fragmento de registro:

> Ma. Entonces estos datos obtenidos si corresponden a la cantidad de niños que asistieron, ese es nuestro total de respuestas registradas. Muy bien niños, bueno y ¿para qué nos sirvió hacer esta tabla? ¿para qué nos sirve organizar los datos?
> Ao. Para saber lo que necesitamos
> Ao. Para contar las respuestas
> Ma. Así es nos sirve para organizar la información (Adr3)

Por su parte Mar1 centra su atención en un conocimiento estadístico más fino, aunque aún de manera muy inicial, las gráficas y sus partes; es importante resaltar cómo, en lugar de darles la definición, les devuelve, mediante preguntas, la responsabilidad para que vayan ellos interiorizando y comprendiendo lo que son las gráficas y sus elementos constitutivos

> Ma. Muy bien Zoé, justamente eso es lo que representa la gráfica, los datos que les dieron las personas que encuestaron, esa gráfica niños, tiene partes, cada una de sus partes tiene un nombre específico, por ejemplo, esta gráfica ¿cómo le llamaríamos? ¿qué título le pondríamos…?, ¿qué es lo que estábamos preguntando? ¿sobre qué? ¿estábamos preguntando sobre los juegos?
> Ma. Entonces todo esto que ven aquí al centro que es pues (la maestra señala el cuerpo de la Gráfica)
> Ao. Cuerpo, cuerpo
> Ma. El cuerpo de la Gráfica verdad
> La maestra muestra una nueva tarjeta
> Ma. Este dato como dice aquí (los alumnos lo leen)
> Aos. Valores
> Ma. ¿Dónde creen que son los valores?
> Los alumnos señalan en varios lugares específicamente el título y el lugar de los valores
> Ma. Arriba ¿aquí con el título?
> Un alumno señala el lugar de los valores.
> Ma. ¿Por qué aquí?

Ao. Porque veo que ahí está el número de personas que nos dijeron que sí o no se enfermaron, cuales fueron los síntomas y las veces que se repiten por esos son los valores (Mar1)

En este fragmento vemos cómo la manifestación del KMT-estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, le permite a la maestra orientar a los alumnos para que logren los aprendizajes estadísticos en congruencia con el nivel educativo (KLMS) en el que sabe que está trabajando (1º grado de educación primaria).

Conclusiones

Aunque Burrill y Biehler (2013) denunciaron debilidades formativas en el conocimiento estadístico de los profesores, en el sentido de que "los profesores carecen de una educación estadística y no tienen una preparación especial" (p. 40) sobre cómo enseñar los temas estadísticos, atribuible a diversos factores, consideramos que en escenarios formativos de programas profesionalizantes se pueden atender y con mayor razón cuando se logra centrar la mirada en los componentes del MTSK al trabajar los temas estadísticos; en esta comunicación, de manera breve, apreciamos la importancia de la recuperación de diferentes fuentes de información como las transcripciones de las clases y su análisis, donde identificamos cómo desde el KMT-teorías de enseñanza se toma conciencia del papel activo que como "investigador" tiene el niño al hacer estadística y aceptar la devolución de una práctica matemática traducida en la construcción de definiciones sencillas (encuesta, informante, tabla, gráfica, elementos de una gráfica) que, al provocarlas las maestras, gradualmente van configurando un escenario para su objetivación.

La decisión que toman las informantes para incorporar definiciones, como cierre del proceso didáctico está mediada por el KoT y el KPM que manifiestan para completar las ideas que van construyendo los niños como producto de su gestión didáctica, pero a la vez el KMT posibilita el enfoque que permite que sean los alumnos, en un proceso de devolución dosificada, quienes vayan de la escritura de las preguntas de la encuesta, a su aplicación en el contexto escolar y comunitario, para llegar finalmente a la institucionalización provisional de algunas definiciones.

El análisis de los datos nos lleva a pensar que, aunque el diseño sea el mismo, el conocimiento especializado que manifiesten y pongan en juego al momento de llevarlo a la práctica, será el que lleve a tomar decisiones didácticas diferenciadas y delimite el enfoque de enseñanza, el papel activo o no de los alumnos, las definiciones matemáticas que se construyan y, en general, las concepciones sobre lo que es hacer estadística que gradualmente se objetiven en los niños de la educación primaria.

Referencias

Alsina, Á. (2021). Estadística en contexto: desarrollando un enfoque escolar común para promover la alfabetización. *Tangram, 4*(1), 71-98.

Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? In *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389 – 407. DOI: 10.1177/0022487108324554

Burrill, G. y Biehler, R. (2013). *Les idées statistiques fondamentales dans le curriculum scolaire. Statistique et Enseignement, 4*(1), 5-24. http://www.statistique-etenseignement.fr.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L. C., y Climent, N. (2017). El conocimiento del profesor desde una perspectiva basada en su especialización: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 22, 185-206.

Carrillo, J., Montes, M. y Climent, N. Eds.(2022). *Investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino.* Dykinson.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes, en Kelly, A.E., Lesh, R.A. y Baek, J.Y. (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 68-95). Lawrence Erlbaum Associates.

Delgado-Rebolledo, R., Zakaryan, D., y Alfaro-Carvajal, C. (2022). El conocimiento de la práctica matemática En J. Carrillo, M. A. Montes, y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 57-69). Dykinson.

Lizarde, E. (2020). Rediseño de libros de texto: crisis y oportunidad. *Revista Nexos.* https://educacion.nexos.com.mx/rediseno-de-libros-de-texto-crisis-y-oportunidad/

Martínez Blancarte, A. M. y García Ulloa, L. A. (2021). El MTSK en la enseñanza de la estadística en segundo y cuarto grado de primaria. En J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 36–43). Congresseme

Molina, M., Castro, E., Molina, J., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias, 29*(1), 75-88.

Pfannkuch, M., Ben-Zvi, D. y Budgett, S. (2018). Innovations in statistical modeling toconnect data, chance and context. *ZDM Mathematics Education, 50*(7), 1113-1123. https//doi.org/10.1007/s11858-018-0989-2

Rojano Ceballos, M. T. y Solares Rojas, A. (Coords.) (2017). *Estudio comparativo de la propuesta curricular de matemáticas en la educación obligatoria en México y otros países.* INEE-CINVESTAV.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard educational review,* 57, 1-22.

Steffe, L., y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Lawrence Erlbaum.

Vidal-Szabo, P. y Estrella, S. (2021). Conocimiento Estadístico Especializado en Profesores de Educación Básica, basado en la taxonomía SOLO. *Revista Chilena de Educación Matemática, 13*(4), 134-148.

UN MODELO PARA OBSERVAR LA PRÁCTICA EDUCATIVA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA

A model to observe the educational practice of the mathematics teacher

Ramos-Rodríguez, E.[a], Vásquez, C.[b], Valenzuela, M.[c], Ruz, F.[a]

[a] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
[b] Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[c] Universidad Alberto Hurtado, Chile

Temática: 1 – MTSK en la formación docente

Resumen.
Instrumentos que permitan observar la Práctica Educativa son escasos, mostrando la necesidad de planteamientos claros en relación con la enseñanza de la matemática. El objetivo de este estudio es aportar con un modelo que permita observar la Práctica Educativa en profesores de matemática. Se emplea una metodología mixta que comprende dos fases, una teórica y otra empírica. Se proponen dimensiones que emergen de los constructos conocimiento del profesor y reflexión, según tres fases: para, de y sobre la práctica. Contar con tales modelos facilitará comprender la práctica educativa del profesor de matemática permitiendo a diferentes agentes educativos (docente, directivos, formadores de profesores, entre otros) centrar la mirada en qué elementos desarrollar para mejorar la docencia y en consecuencia los aprendizajes de sus alumnos.

Palabras clave. Práctica educativa, Conocimiento, Reflexión, Profesor, Matemática.

Abstract.
Instruments that allow observing the Educational Practice are scarce, showing the need for clear approaches in relation to the teaching of mathematics. The objective of this study is to contribute with a model that allows observing the Educational Practice in mathematics teachers. A mixed methodology is used that includes two phases, one theoretical and the other empirical. Dimensions that emerge from the constructs of teacher knowledge and reflection are proposed, according to three phases: for, from and about practice. Understanding the educational practice of the mathematics teacher would allow different educational agents (teachers, managers, teacher trainers, among others) to focus on what elements to develop to improve teaching and consequently the learning of their students.

Keywords. Educational Practice, Knowledge, Reflection, Teacher, Mathematics.

Ramos-Rodríguez, E., Vásquez, C., Valenzuela, M. y Ruz, F. (2023). Un modelo para observar la práctica educativa del profesor de matemática. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.87-94). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

La Práctica Educativa (PE) incluye tanto el antes como el después de la práctica real de impartir clases (Coll, 1999). En consecuencia, su análisis no puede realizarse únicamente observando lo que ocurre en el aula. Un abordaje integral requeriría tener en cuenta elementos externos a la clase propiamente dicha (Coll, 1999), por ejemplo, los relacionados con la planificación de la clase, o la reformulación de la clase. Sin embargo, la investigación al respecto es escasa y muestra la necesidad de planteamientos claros respecto de qué es una buena EP, de manera que permita a los docentes potenciar su desempeño y trasladar su práctica a nuevas situaciones (Zavalza, 2013).

Ante esta necesidad, el objetivo de este estudio es, pues, avanzar en esta área desde una perspectiva teórica, proporcionando un modelo que permita definir los indicadores que debe contener un instrumento de observación de la PE en profesores de matemáticas, y respondiendo a preguntas como: ¿qué elementos debe tener? ¿cómo se relacionan o vinculan estos elementos?

Marco de referencia

Los elementos que configuran el marco de referencia de este estudio aportan a responder la pregunta ¿qué elementos caracterizan la PE de un profesor de matemática? para dar respuesta a esta pregunta nos situamos desde cuatro aristas: a) la diferencia entre PE, de enseñanza y pedagógica; b) el papel de la reflexión en la PE; c) el conocimiento del profesor en la PE; y e) los modelos existentes para observar la PE.

La distinción entre PE (Figura 1), práctica de enseñanza y práctica pedagógica, se realiza con base en la literatura (Gutiérrez-Anguiano et al., 2020; García-Cabrero et al., 2008).

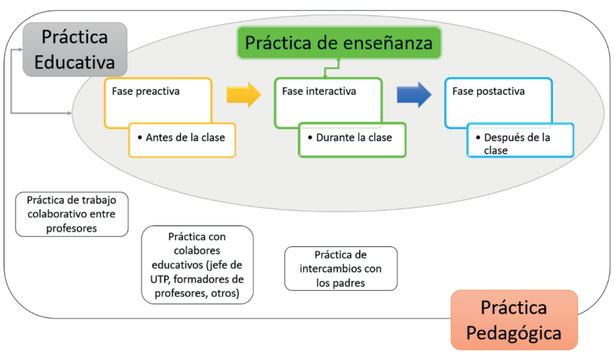


Figura 1. Diferenciación entre la práctica pedagógica, de enseñanza y educativa.

Existen diversos criterios utilizados para observar o evaluar la PE. Por ejemplo, la planificación de la enseñanza, el desarrollo de la enseñanza y cómo los resultados obtenidos son considerados. Estas dimensiones están interrelacionadas y deben ser abordadas de manera integral (García-Cabrero et al., 2008).

Por su parte, la noción de reflexión en, de y sobre la práctica puede ayudar a definir una buena PE (Schön,1983). Una buena práctica se refleja en un docente que actúa profesionalmente y valora la reflexión en su proceso de crecimiento profesional (Keazer, 2014; Masón y Klein, 2013). Los conceptos de reflexión para, en y después de la práctica se relaciona con las fases previas, durante y posteriores a la acción (Figura 2).

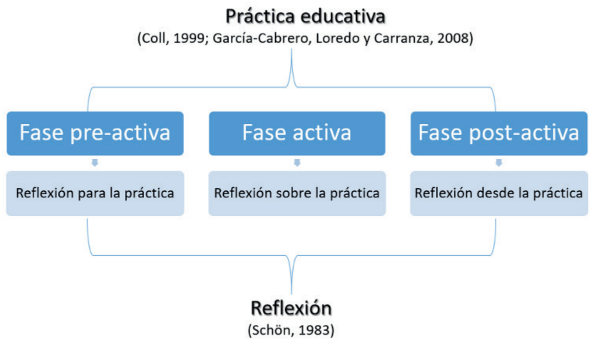


Figura 2. Relación entre reflexión y práctica educativa.

La práctica del docente está supeditada al conocimiento que este posee. Por tanto, amerita preguntarse si existe una relación entre la buena PE y el conocimiento del profesor. Diversos autores aluden a esta relación de diferentes ópticas. Entre ellos, Shulman (1987) afirma que a medida que se aprenda más sobre la docencia (y en particular sobre la buena docencia) se podrá reconocer qué conocimientos "base" debe tener un profesor para enseñar. Así, los profesores expertos (con un conocimiento acabado del contenido a enseñar) son capaces de definir, describir y reproducir una buena enseñanza.

Para conceptualizar el conocimiento profesional del profesor existe una amplia variedad de modelos teóricos, impulsados principalmente después de los aportes de Shulman (1987). En este estudio nos situamos desde el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) (Carrillo et al., 2018) dada su especificidad con la matemática. Este modelo permite contar con la mirada amplia del conocimiento para la enseñanza del profesor, facilitando la elección y coherencia de indicadores observables de la PE, los cuales se clasifican, en parte, de acuerdo con los distintos dominios de conocimiento que presenta este modelo, por lo que se hace necesario especificar a continuación sus elementos principales.

En la construcción de un modelo para observar la PE de profesores de matemática se hace necesario indagar en lo que plantean otras investigaciones al respecto. Desafortunadamente en el ámbito de la educación matemática, no se hallan estudios que apunten a observar la PE en todas sus fases (antes, durante y después), sino más bien permite observar el aula *in situ,* es decir, la práctica de enseñanza. Aun así, los modelos que subyacen a la observación de esta práctica pueden aportan con elementos basales para desarrollar una propuesta de modelo para observarla. Dada la inexistencia de modelos explícitos que guíen la observación de la práctica de enseñanza del profesor de matemática, más bien se cuenta con instrumentos de observación de esta, se ha identificado las dimensiones que están presenten en estos instrumentos de observación, que nos permiten deducir el modelo que lo subyace. En este sentido, Vásquez et al. (2019) realizan una minuciosa revisión al respecto, presentando un resumen de los elementos que están presentes en los instrumentos de observación de clases de matemática. Complementamos el resumen de Vásquez et al. (2019), con instrumentos diseñados a la luz del contexto chileno o aquellos sustentados en el modelo MTSK (Tabla 1).

Tabla 1
Dimensiones presentes en instrumentos de observación en matemática (Ramos et al. 2020)

Instrumento	Finalidad	Dimensiones
Martínez et al. (2019)	Observar las clases de matemática, la retroalimentación al docente y el diseño de planes de desarrollo profesional docente.	- Organización y planificación - Interacciones en el aula - Presentación del contenido matemático - Gestión matemática
Preiss et al. (2014)	Identificar episodios de la clase en que se observan buenas prácticas docentes.	- Estrategias de enseñanza de la matemática - Ambiente de la clase
Palomares et al. (2020)	Observar las prácticas de enseñanza de profesores de matemáticas de Educación Secundaria grabadas en vídeo.	- Contenido matemático - Didáctica del contenido matemático - Gestión del aula

No hay consenso en las dimensiones que subyacen a las propuestas existentes para observar la práctica de enseñanza en el docente de matemática (Vásquez et al., 2019). Pero la principal finalidad es observar holísticamente interacciones entre profesor, contenido matemático y estudiantes.

A partir de Vásquez et al. (2019) y la Tabla 1, se aprecia que la interacción profesor y contenido matemático (relacionado con el conocimiento de la disciplina del profesor) es una dimensión clave en todas las propuestas. También, muchas de ellas, hacen énfasis en la interacción profesor y estudiante a partir de la gestión o clima del aula. Además, se consideran dimensiones relativas a la implementación de la enseñanza o el trabajo con los estudiantes y las matemáticas conectando las prácticas de aula con las matemáticas (relacionado con el conocimiento didáctico del profesor). Se aprecia tres componentes: conocimiento matemático y didáctico, y clima o ambiente para el aprendizaje.

Método de investigación

Esta investigación sigue un enfoque mixto, cuya componente cualitativa se desarrolla en el proceso de construcción del modelo de observación de la PE en matemáticas donde se incluye sus dimensiones e indicadores, mientras que la componente cuantitativa se desarrolla con una validación de contenido del modelo resultante desde juicio de expertos.

Antes de llevar a cabo el proceso de validación de contenido por juicio de expertos, el modelo (con sus dimensiones e indicadores) es evaluado por tres expertas en didáctica, las cuales dos son expertas en el modelo MTSK y la tercera es experta en el diseño de instrumentos para observa el aula. En esta evaluación, las expertas manifiestan unánimemente la complejidad de observar la cuarta dimensión: la reflexión, por las dificultades que implican su observación en antes, durante y después de la práctica, sin contar con diversos instrumentos de recogida de datos. Además, ellas realizan sugerencias para mejorar los indicadores. La propuesta de modelo que surge de las reformulaciones realizadas a partir de este proceso es la que se valida bajo un análisis de juicio de expertos.

Una vez establecida esta versión del modelo de observación de la PE en matemáticas, este fue sometido a un proceso de validación de contenido por medio del juicio de expertos. Se consideraron ocho expertos (1 de Colombia, 4 de Chile, 2 de España y 1 México), cuya área de investigación es la didáctica de la matemática. Ellos son especialistas en el modelo MTSK y algunos han trabajado en el diseño de pautas de observación de aula. Valoraron la claridad, coherencia y relevancia de cada uno de los indicadores considerados, mientras que lo referido a la suficiencia valoró el grado en que los indicadores permiten describir la dimensión en que fueron propuestos.

Finalmente, en cuanto a análisis realizados a las valoraciones resultantes del juicio por expertos, comenzamos con una exploración de cada dimensión, para lo cual utilizamos las puntuaciones medias entre los indicadores que conforman cada una. Utilizamos el índice V de Aiken (Aiken, 1985), para cuantificar el grado de acuerdo o concordancia entre las puntuaciones asignadas por los expertos. En la práctica Aiken (1985) recomienda como adecuados o aceptables valores puntuales de V superiores a 0,7; mientras que al considerar estimaciones en intervalos al 95% de confianza se aceptan umbrales superiores a 0,5 en los límites inferiores.

Resultados

De acuerdo con los antecedentes formulados, es posible aportar con un modelo que permita observar la PE en profesores de matemática. Se plantean dimensiones que emergen de la literatura orientadas a observar la práctica de enseñanza. En ellas se ha dado presencia a las dimensiones “clima del aula o ambiente para el aprendizaje” y “conocimiento”, este último se ha materializado a través del modelo MTSK y sus dimensiones “conocimiento matemático” y “conocimiento didáctico”.

Estas dimensiones parecen no ser suficientes para observar el antes y después de la práctica, por lo que se hace necesario complementar la propuesta con el constructo reflexión, desde la reflexión para, de y sobre la practica (Schön, 1983) materializada en la caracterización de profesor reflexivo planteada por Ramos et al. (2017). Estas se conjugan en un modelo que se ha denominado Modelo MathTEP, de acuerdo con las siglas de Mathematics Teacher Educative Practice (se ha considerado las siglas en inglés para globalizar su uso). Las dimensiones del modelo se detallan a continuación.

La dimensión conocimiento matemático: Esta extensión se centra en el conocimiento disciplinario que debe poner en juego el profesor en su PE, considerando toda su extensión, es decir, el conocimiento de los conceptos matemáticos, de la fenomenología, de los registros de representación, entre otros. Asimismo, involucra la puesta en juego del conocimiento sobre explicitación de los procesos de razonamiento de los alumnos y las Conexiones de ampliación o simplificación de contenidos.

La dimensión conocimiento didáctico: Esta dimensión se refiere al conocimiento de enseñanza, incluyendo formas de enseñar, manejo de errores y dificultades en el aprendizaje, uso de recursos creativos, organización de la clase, trabajo colaborativo y elementos curriculares.

La dimensión ambiente propicio para el aprendizaje: Esta dimensión se enfoca en evaluar si el profesor reconoce y motiva a sus alumnos, su participación en el proceso de enseñanza-aprendizaje y la participación espontánea de los estudiantes. Además, se observa cómo el docente utiliza la comunicación no verbal y considera la diversidad de los estudiantes.

La dimensión reflexión para, en y desde la práctica: en esta dimensión se considera las distintas disposiciones que debe poseer un profesor reflexivo, entre ellas, poder: percibir situaciones entorno, explicitar y eliminar elementos condicionantes (como las creencias), recurrir a fuentes externas, traspasar límite de zonas de bienestar y tomar conciencia de la complejidad de la práctica.

La propuesta de modelo que surge de las reformulaciones realizadas a partir de ese proceso considera tres dimensiones, D1: conocimiento del contenido, D2: conocimiento didáctico y D3: clima del aula. Se comienza explorando la distribución de puntuaciones medias asignadas por los expertos en cada dimensión (D1, D2 y D3), diferenciando según los cuatro criterios considerados. Al respecto, como se muestra en la Figura 3, la mediana de las valoraciones globales para cada dimensión supera los 3,5 puntos en la mayoría de los casos (salvo en la D1 respecto a la claridad que es de 3,3 puntos), lo que refleja un alto grado de acuerdo entre el juicio de los expertos participantes.

Los criterios mejor valorados fueron los relativos a relevancia (verde) y coherencia (rojo), donde al menos 75% de las puntuaciones medias superaron los 3,3 puntos para coherencia y los 3,7 puntos para relevancia, considerando que la puntuación máxima fue de 4 puntos. Respecto a la suficiencia, la valoración mínima fue de 3 puntos, mientras que al menos el 40% de los jueces valoró con cuatro puntos las primeras dos dimensiones (D1 y D2) y más del 70% asignó esta máxima puntuación en la dimensión 3 (D3). A su vez, en lo referido a la claridad, se nota mayor variabilidad en las respuestas, aunque en todos los casos las valoraciones medias mínimas fueron cercanas a los 3 puntos, en orden decreciente las puntuaciones medianas fueron de 3,7 (D3), 3,5 (D2) y 3,3 puntos (D1). En términos de las dimensiones, las valoraciones fueron mayores respecto a los cuatro criterios en la dimensión 3 (D3), mientras que las otras dos (D1 y D2) reflejan un mismo patrón para la suficiencia, pero en cuanto a la claridad, coherencia y relevancia, las valoraciones en la segunda dimensión fueron superiores a la primera. No obstante, en términos generales, en todos los casos el percentil 25 es de al menos 3 puntos, lo que refleja que la mayoría de los expertos consultados (al menos el 75%) valoran positivamente los indicadores en cada dimensión.

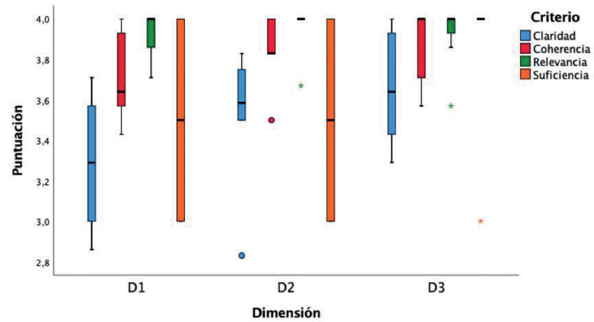


Figura 3. Distribución de puntuaciones medias de expertos según dimensión y criterio.

Posteriormente, se determinó el índice V de Aiken para cada indicador que conforma las dimensiones, con el interés de cuantificar el grado de acuerdo entre las valoraciones de los expertos e identificar aquellos que necesiten ajuste a partir de los comentarios incluidos en el juicio. En general, el índice V puntual fue superior al límite recomendado de 0,7, en la mayoría de los indicadores analizadas según todos los criterios considerados, salvo en cinco casos, donde este valor fue cercano (por encima o por debajo) del valor de corte. Esto se refuerza con los IC asociados a estos índices puntuales, que únicamente en estos casos tuvo un límite inferior cercano a 0,5. Por ello, destacamos positivamente el alto grado de acuerdo entre las valoraciones de los expertos.

La valoración sobre la claridad de los indicadores tuvo mayor variabilidad y cuatro casos con índices descendidos. Atendimos estos casos e implementamos modificaciones a su contenido a partir de los comentarios incluidos en el informe asociado a la valoración de cada experto. De la misma forma se atendió la coherencia y la relevancia. Sobre el criterio de suficiencia, se destaca índices aceptables para las tres dimensiones, lo que permite concluir que los indicadores de cada dimensión son suficientes en el modelo desarrollado.

Al analizar los resultados del juicio de expertos, se aprecia que los indicadores tenían buen comportamiento en la relevancia y en coherencia, pero que ameritaba revisar en muchos casos la claridad. Su análisis llevó a reformular aquellos indicadores donde el índice V de Aiken fue menor a 0,83. De las observaciones de los evaluadores, se evidenció que aquellos indicadores que estaban ubicados en la dimensión "Ambiente propicio para el aprendizaje" se asocian con la dimensión "conocimiento didáctico" desde el punto de vista del modelo MTSK, dentro del dominio KFML en la categoría "aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas". El análisis realizado redujo de tres a dos dimensiones (Figura 4). Se aprecia cómo las tres dimensiones están en torno a la PE, en sus tres momentos, antes, durante y después de la práctica. Se ha puesto como dimensiones basales y en el mismo nivel, el conocimiento didáctico y matemático del profesor, de manera de enfatizar su importancia en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Ejemplos de indicadores para la dimensión 1, Conocimiento Matemático, son D1.1. relacionar con lo cotidiano (KoT, fenomenología y aplicaciones): El profesor articula de forma coherente el contenido de la clase con los fenómenos o significados que dan sentido al objeto matemático; y D1.2 explicitación de los procesos de razonamiento (KPM, prácticas particulares del quehacer matemático, formas de validación y demostración). El profesor explicita su razonamiento matemático para el tratamiento de los temas. Para la dimensión D.2 Conocimiento Didáctico: D2.1 Uso de las producciones matemáticas de los estudiantes (KMT, teorías sobre enseñanza, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). El profesor utiliza las producciones matemáticas (respuestas escritas o verbales) de los estudiantes, interpretando y empleando sus razonamientos, para la toma de decisiones del proceso de enseñanza; y D2.10 Comunicación no verbal y corporal (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). El profesor utiliza la gestualidad, el tono de voz o el cuerpo como un andamio para el aprendizaje de la matemática. Los restantes indicadores están en Ramos et al. (2022).

Figura 4. Modelo MATHEP (Ramos et al., 2022).

Discusión y conclusiones

El propósito fue plantear un modelo que observe la PE del profesor de matemática. Surge uno, el cual gira en torno al conocimiento y la reflexión del profesor. Resulta ser un primer acercamiento para observar las PE de profesores de matemática. Se aprecia el papel del modelo teórico MTSK (Carrillo et al., 2018) para la construcción de las dimensiones e indicadores del modelo MathEP. Los dos dominios del conocimiento (matemático y didáctico) y sus categorías fueron claves para definir dos de las dimensiones y sus indicadores. Esto también permite diferenciar las dimensiones de este modelo con las que subyacen a los instrumentos de observación del aula que se han estudiado (Vásquez et al., 2019; Martínez et al., 2019; Preiss et al., 2014), ya que estos separan en muchas ocasiones los elementos didácticos en varios componentes. En este sentido, este estudio es un aporte a la educación matemática dado que sus hallazgos se basan en un referente teórico robusto de la didáctica de la matemática, como lo es el modelo MTSK.

Reconocemos una limitante que se ha tenido: ahondar en la dimensión reflexión del profesor. Podría ser que esta dimensión sea observada desde una autoevaluación del profesor antes, durante y después de su práctica, lo cual es menester sea sujeto de discusión y análisis en estudios posteriores. Reforzamos la necesidad de ahondar en ello, dada la relación entre profesionalismo y reflexión (Keazer, 2014; Mason y Klein, 2013).

Desde el modelo descrito, se proyecta este estudio en el avance de un instrumento para observar la PE del profesor de matemáticas. Además, el estudio permitiría a diferentes actores del sistema educativo (docente, directivos, formadores de profesores) fijar su mirada en elementos para mejorar la docencia y en los aprendizajes de sus alumnos.

Agradecimientos

Financiado por ANID, proyectos FONDECYT 11190553 y FONDECYT 1200356.

Referencias

Aiken, L. R. (1985). Three coefficients for analyzing the reliability and validity of ratings. *Educational and Psychological Measurement*, 45, 131-142. https://doi.org/10.1177/0013164485451012

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Avila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-Gonzalez, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalan, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK)model. *Research inMathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Coll, C. (1999). La concepción constructivista como instrumento para el análisis de las prácticas educativas escolares. En C. Coll (Coord.), *Psicología de la instrucción: la enseñanza y el aprendizaje en la educación secundaria* (pp. 15-44). Horsori-ICE UB.

García-Cabrero, B., Loredo, J., y Carranza, G. (2008). Análisis de la práctica educativa de los docentes: pensamiento, interacción y reflexión. *Revista Electrónica de Investigación Educativa 10*, 1-15.

Gutiérrez-Anguiano, N., y Chaparro Caso-López, A.A. (2020). Evidencias de confianza y validez de una escala para la autoevaluación de las prácticas de enseñanza en secundaria. *Perfiles educativos, 42,* 119-137. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2019.167.59193

Keazer, L. (2014). Teachers' Learning Journeys Toward Reasoning and Sense Making. En J.J. Lo, K. R. Leatham y L. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher* (pp. 155-180). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02562-9_9

Martínez, M. V., Perdomo-Díaz, J., y Araya, P. (2016). Desarrollo y validación de una pauta de observación de clases de matemática: MateO. En S. Estrella, M. Goizueta, C. Guerrero, A. Mena, J. Mena , E. Montoya , A. Morales, M. Parraguez, E. Ramos, P. Vazquez, y D. Zakaryan (Eds.), XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática (pp. 251-255). SOCHIEM.

Mason, K., y Klein, S. (2013). Land, sea and sky: map making as reflection in pre-service teacher education. *Reflective Practice: International and Multidisciplinary Perspectives, 14*(2), 209-225. https://doi.org/10.1080/14623943.2012.749228

Preiss, D. D., Calcagni, E., Espinoza, A. M., Gómez, D., Grau, V., Guzmán, V., ... y Volante, P. (2014). *Buenas prácticas pedagógicas observadas en el aula de segundo ciclo básico en Chile.* Psykhe, 23(2), 1-12. https://doi.org/10.7764/psykhe.23.2.716

Ramos-Rodríguez, E., Flores, P., y Ponte, J.P. (2017). An approach to the notion of reflective teacher and its exemplification on mathematics education. *Systemic Practice and Action Research, 30*(1), 85-102. https://doi.org/10.1007/s11213-016-9383-6

Ramos-Rodríguez, E., Vásquez, C., Valenzuela Molina, M., y Ruz, F. (2022). Building a Model for Observing the Educational Practice of Mathematics Teachers. *Mathematics, 9,* 3304. https://doi.org/10.3390/math9243304

Schön, D. (1983). *La formación de profesionales reflexivos: Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones.* Paidós.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review, 57*(1), 1-23. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Vásquez, C., Alsina, Á., Pincheira, N. G., Gea, M., y Chandía, E. (2020). Construcción y validación de un instrumento de observación de clases de probabilidad. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 38*(2), 25-43. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2820

EL MTSK EN EL DISEÑO CURRICULAR BÁSICO NACIONAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA DE LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA

The MTSK in the National Basic Curricular Design of Secondary Education of The Specialty of Mathematics

Paz Huamán, G.[a], Ordoñez Montañez, C.[b]

[a] Ministerio de Educación del Perú, Perú
[b] Asociación Peruana de Investigación en Educación Matemática, Perú

Temática: 1 – MTSK en la formación docente

Resumen.
En Perú se ha dado un cambio curricular en la formación inicial docente debido a las demandas del sistema educativo, trayendo como consecuencia la elaboración de un nuevo documento, el Diseño Curricular Básico Nacional del Programa de Estudios de Educación Secundaria de la especialidad de Matemática. El documento presenta un nuevo perfil de egreso, un plan de estudios con cursos y módulos organizados a partir del modelo curricular de la Formación Inicial Docente. Para los cursos del componente de Formación Específica se han elaborado matrices de conocimiento considerando el modelo teórico del Conocimiento especializado del profesor de matemática MTSK.

Palabras clave. Didáctica, Matemáticas, Currículo, MTSK.

Abstract.
In Peru, there is a curricular change in the undergraduate teacher training due to the demands of the educational system, which results in the elaboration of a new document, the National Basic Curriculum Design of the Mathematics Secondary Education Studies Program. The document presents a new graduate profile, a curriculum with courses and modules organized from the curricular model of Undergraduate Teacher Training. For the courses of the Specific Training component, knowledge matrices have been prepared considering the theoretical model of specialized knowledge of the mathematics teacher MTSK.

Keywords. Didactics, Mathematics, Curriculum, MTSK.

Paz Huamán, G. y Ordoñez Montañez, C. (2023). El MTSK en el diseño curricular básico nacional de educación secundaria de la especialidad de matemática. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.95-102). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

El diseño curricular básico nacional

Para comprender la necesidad de un cambio de paradigma en el sistema educativo tenemos que mirar a una de las más importantes relaciones existentes, como es la relación entre la Formación Inicial Docente (FID) y la Educación Básica (Perrenoud, 2007). Además, analizar si el servicio educativo responde a los nuevos modelos de conocimiento del docente desde la actual perspectiva de la educación matemática (Godino, 2009). Teniendo en cuenta lo anterior, en el 2015 se realizó una evaluación del Currículo vigente de la Formación Inicial Docente en el Perú. Se concluyó que era necesario realizar una reforma de la educación superior pedagógica para brindar una formación profesional de calidad a los futuros docentes de matemática (García, 2005), alineada a las políticas vigentes y a las demandas educativas actuales. Así, en el año 2017 se inició la construcción de los diseños curriculares y en el 2020 se publicó el Diseño Curricular Básico Nacional (DCBN) del Programa de Estudios de Educación Secundaria de la especialidad de Matemática para las Escuelas de Educación Superior Pedagógica (EESP) e Institutos de Educación Superior Pedagógica (IESP).

El DCBN de la FID (Ministerio de Educación de Perú [MINEDU], 2020), es un documento de política educativa que presenta el perfil de egreso con sus competencias y los niveles de desarrollo de dichas competencias (estándares de la FID), el modelo curricular, las descripciones de los cursos y módulos, y las orientaciones pedagógicas para el desarrollo de 12 competencias profesionales docentes agrupadas en 4 dominios (ver Figura 1).

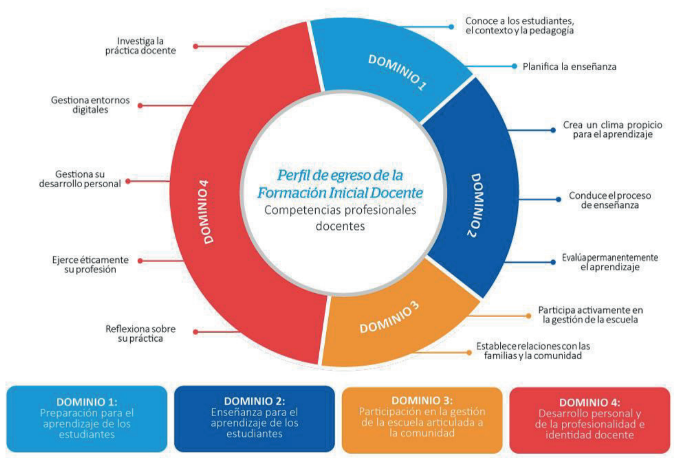


Figura 1. Esquema del Perfil de egreso de la FID

En el DCBN de la FID (MINEDU, 2020) se establece un plan de estudios de diez ciclos académicos con cursos y módulos organizados en tres componentes curriculares: formación general, formación específica y formación en práctica e investigación. El currículo de la FID implica la articulación (horizontal y vertical) de cursos y módulos desde los diferentes componentes curriculares para alcanzar los niveles de competencia esperados (ver Figura 2).

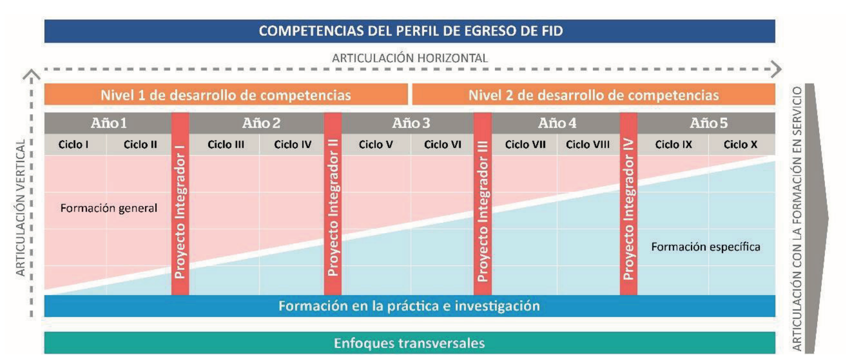


Figura 2. Componentes curriculares y articulaciones del DCBN

La articulación horizontal se sustenta en el desarrollo de las 12 competencias profesionales docentes a lo largo del plan de estudios, razón por la cual los diferentes cursos y módulos son mapeados en relación a los niveles de desarrollo de la competencia. La articulación vertical implica la vinculación de los diferentes cursos y módulos de un mismo año a través de un proyecto integrador que funciona como eje estructurador para buscar evidencias del desarrollo de las competencias profesionales docentes del perfil de egreso.

En la organización de los cursos se ha considerado los diferentes conocimientos matemáticos basados en los fenómenos del mundo que motivaron su evolución (ver Figura 3). También se consideró importante incorporar los cursos: 1) Principios de la didáctica de la matemática para posicionar el carácter científico de la disciplina denominada Didáctica de la Matemática y 2) Matemática y su conexión con otras disciplinas para estudiar de qué manera la matemática contribuye a estudiar fenómenos de otras disciplinas como la Física, Química y Biología.

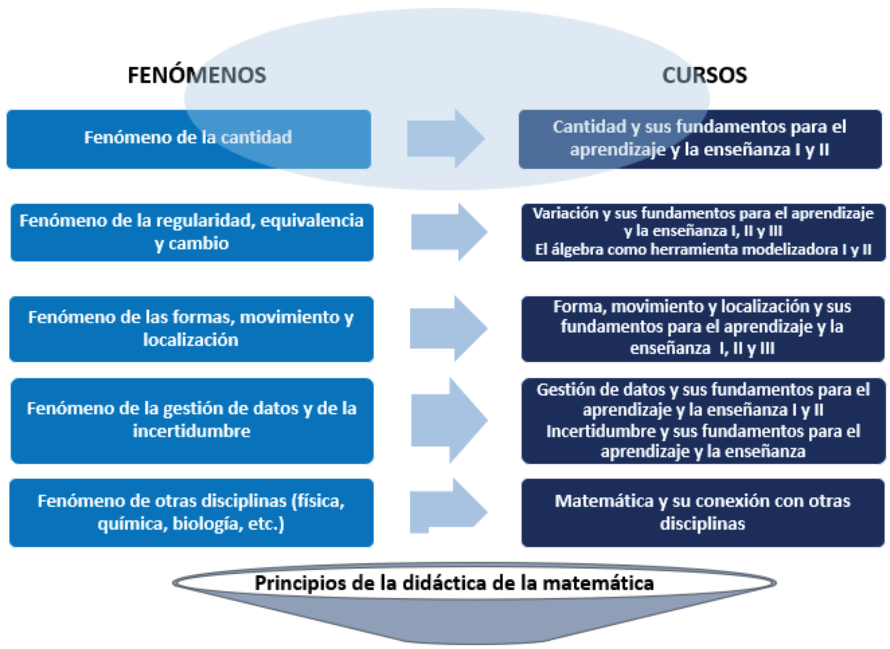


Figura 3. Relación de cursos del componente de la formación específica con los fenómenos del mundo

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)

Muñoz et al. (2015) señala que el modelo “Conocimiento especializado del profesor de matemáticas” (MTSK por sus siglas anglófonas), presenta tres dominios: el conocimiento matemático, el conocimiento didáctico del contenido y el dominio de las creencias y concepciones. El primero se refiere a los conocimientos matemáticos que debe adquirir un profesor para desarrollar un determinado proceso de enseñanza. El segundo se centra en los conocimientos propios de la profesión del docente en relación con el aprendizaje, la enseñanza y el currículo. Finalmente, el tercer dominio aborda las creencias y concepciones del docente, tanto de las matemáticas, como de la enseñanza y aprendizaje de estas.

En la figura 4 se representa el esquema del modelo del MTSK.

El dominio del conocimiento matemático abarca 3 subdominios:
• Conocimiento de los temas (KoT) considera el conocimiento de la matemática como disciplina, la matemática escolar, así como lo referente a sus fundamentos matemáticos, los procedimientos y estándares. Por tanto, el profesor debe conocer el contenido más allá de lo que sus estudiantes deben aprender.

• El Conocimiento de la estructura de la matemática (KSM) abarca el conocimiento de las matemáticas desde la perspectiva de su integración y relación en estructuras amplias y con mayor capacidad de relación con otros conceptos. Este subdominio integra tanto aquellas relaciones con conceptos más elementales, como con conceptos más avanzados. Por tanto, el profesor debe comprender la organización de la matemática.

• El Conocimiento de la práctica matemática (KPM) se refiere a aquellas formas de hacer matemáticas que un profesor conoce para ejecutar su clase, por ejemplo, diferentes formas de demostrar o los criterios que sigue para establecer que una generalización sea válida.

El dominio del conocimiento didáctico del contenido abarca 3 subdominios:

• El Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) aborda el conocimiento del profesor acerca de cómo se aprende y piensa el estudiante un contenido particular de la matemática.

• El Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT) se refiere a cómo los docentes pueden enseñar un aspecto, idea o procedimiento particular de las matemáticas. Esto implica conocer distintas estrategias y recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas.

• El Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS) aborda al conocimiento de las condiciones, reglas y principios generales en los que se enmarca la enseñanza de las matemáticas en el país en que se imparte.

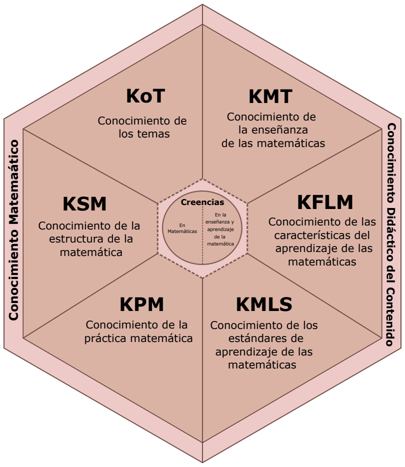


Figura 4. Esquema del modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

Descripción de cursos y matrices de conocimientos

El nuevo DCBN propone desarrollar cada curso del componente de Formación Específica integrando el conocimiento disciplinar y didáctico de lo matemático que tradicionalmente han sido enseñados por separado en la formación de docentes (Pino-Fan et al., 2018).

Componente Curricular	**Formación Específica**				
Curso	**CANTIDAD Y SUS FUNDAMENTOS PARA EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA I**				
Ciclo	**III**	**Competencias**	**1, 2, 11**		
Total de Horas	**4 (2 horas de teoría, 2 horas de práctica)**			**Créditos**	**3**
El curso tiene por propósito que los estudiantes de FID comprendan el significado de cada conjunto numérico y los procesos matemáticos que desarrollan los estudiantes de EB en la construcción de los conceptos, operaciones y propiedades fundamentales de los números naturales, enteros y racionales al resolver problemas. Para ello, propone actividades de aprendizaje y crea problemas que generen la necesidad de aplicar estrategias de solución, justificar sus procedimientos y evaluar sus resultados al trabajar con los números y sus operaciones. Argumentan su comprensión de la extensión de los conjuntos numéricos y las propiedades que esta preserva reconociendo la estructura que tienen. En ese proceso, los estudiantes de FID profundizan en los conocimientos disciplinares, establecen conexiones entre ellos y reconocen el desarrollo histórico de los diferentes conjuntos numéricos. En el marco de una evaluación formativa, se recogen y describen evidencias de aprendizaje sobre logros y dificultades en relación con los conjuntos numéricos y cómo se debe gestionar el error para favorecer el aprendizaje en los estudiantes de EB, contrastándolo con la revisión de diferentes investigaciones. Asimismo, se identifican los fenómenos del entorno que puedan ser abordados a través de problemas que posibiliten la construcción de los distintos conjuntos numéricos y sus operaciones.					

Curso: Cantidad y sus fundamentos para el aprendizaje y la enseñanza I					
Conocimiento del contenido			**Conocimiento pedagógico del contenido**		
KOT	**KPM**	**KSM**	**KFLM**	**KMT**	**KMLS**
▪ Comprende la construcción formal del conjunto de números naturales, enteros y racionales. ▪ Establece la relación de orden entre números naturales y enteros, y los ubica en la recta numérica. ▪ Comprende las propiedades de las operaciones con números naturales y las representa empleando lenguaje algebraico. ▪ Conoce el desarrollo histórico de la noción de número natural (en particular del número cero), de número entero y número racional. ▪ Reconoce la existencia de sistemas de numeración en diferentes bases e identifica las situaciones que les dieron origen. ▪ Reconoce al conjunto de números enteros como un conjunto que extiende al de números naturales. ▪ Conoce la dimensión epistemológica del número entero y su relación con los obstáculos que se presentaron para construir la noción de número negativo tales como superar la del cero absoluto. ▪ Reconoce que la introducción de los números enteros solo a través de contextos extra matemáticos tales como deudas y haberes, temperaturas o movimientos no permitirá comprender las propiedades de las operaciones con dichos números como la regla de los signos. ▪ Comprende que existen diferentes formas de representar la relación de orden en los enteros: según la ubicación de los números en la recta numérica, según sea el signo de la diferencia, etc. ▪ Justifica los resultados que aparecen en los textos didácticos relacionados con números naturales y enteros (la regla de los signos). ▪ Establece la relación de orden entre números racionales y los ubica en la recta numérica empleando regla y compás. ▪ Establece equivalencias entre expresiones fraccionarias y decimales. ▪ Comprende que el número racional, en su representación fraccionaria adopta diferentes significados: parte-todo, razón, operador, cociente, medida, entre otros. ▪ Reconoce que los números racionales tienen distintas representaciones y que las operaciones que se realizan en cada una de ellas tienen reglas diferentes. ▪ Reconoce que el porcentaje es un operador que actúa sobre números reales y que no es una representación más de los números racionales. ▪ Comprende la densidad de los números racionales al identificar al menos un nuevo número racional entre otros dos racionales.	▪ Demuestra propiedades de las operaciones definidas en el conjunto de números naturales y enteros. ▪ Emplea diferentes estrategias para resolver problemas que requieren aplicar criterios de divisibilidad, propiedades de los números primos y compuestos, el concepto de máximo común divisor y mínimo común múltiplo o cambios de base. ▪ Emplea diferentes estrategias para resolver problemas que involucran operaciones básicas con números naturales y enteros (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación, operaciones combinadas). ▪ Emplea diferentes estrategias para resolver problemas que involucran operaciones básicas con números racionales (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación, operaciones combinadas). ▪ Resuelve situaciones problemáticas que involucran distintos significados de fracción. ▪ Resuelve problemas que requieren representar el número racional como expresión decimal. ▪ Demuestra la propiedad de densidad de los números racionales.	▪ Conocimiento de la relación entre los distintos conjuntos numéricos. ▪ Conocimiento de la relación de los conjuntos numéricos con el álgebra y otras disciplinas de la matemática. ▪ Reconoce que un contexto idóneo para introducir los números enteros es el contexto algebraico.	▪ Comprende que la comprensión de los estudiantes sobre los conjuntos numéricos, se genera mediante un proceso continuo que requiere establecer conexiones entre ellos, reconociendo las limitaciones y potencialidades de cada sistema numérico, de modo tal que, el nuevo conocimiento sea una ampliación del conocimiento previo. ▪ Comprende que los estudiantes transitan por diversas dimensiones en el proceso de construcción del conocimiento conjunto numérico. ▪ Reconoce que introducir los números enteros solo a partir de situaciones cotidianas se convertirá en un obstáculo para su aprendizaje pues ello no dará sentido a algunos resultados como la regla de los signos. ▪ Comprende que una de las principales dificultades para la comprensión de los números racionales son sus distintas representaciones y que el tránsito entre ellas no es trivial.	▪ Plantea situaciones idóneas asociadas a fenómenos que pueden ser estudiados a través de problemas que requieren de números naturales, enteros, racionales en su representación de fracción o de expresión decimal. ▪ Modifica adecuadamente situaciones y problemas de modo que permitan la evolución en la adquisición de la competencia asociadas a la cantidad. ▪ Identifica situaciones pertinentes para la enseñanza y la evaluación los distintos conjuntos numéricos. ▪ Diseña actividades que requieren del uso de recursos tecnológicos y que propician el empleo de diferentes representaciones de los números racionales. ▪ Emplea estrategias que permiten que los estudiantes reconozcan propiedades de las operaciones en determinado conjunto numérico, y elaboren generalizaciones y conjeturas.	▪ Conoce la competencia del Currículo Nacional "Resuelve problemas de Cantidad" y sus cuatro capacidades. ▪ Conoce la progresión del aprendizaje en la comprensión de los distintos conjuntos numéricos, reconociendo que esta se inicia en los primeros ciclos de la Educación Básica y se prolonga hasta el término de la secundaria. La progresión va desde comprender los números, las distintas maneras de representarlas, las relaciones entre los números y los conjuntos numéricos.

Figura 5. Descripción del curso "Cantidad y sus fundamentos para el aprendizaje y la enseñanza I" y su matriz de conocimientos.

La propuesta articulada de abordar en cada curso de formación específica, los contenidos disciplinares y didácticos, ha facilitado la construcción de 13 matrices de conocimientos para los cursos considerando los 6 subdominios del MTSK que corresponden a dos dominios (conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido), con el propósito de brindar a los docentes de los IESP y EESP orientaciones de los desempeños que pueden desarrollar en sus estudiantes en cada curso. En la Figura 5, se muestra como ejemplo, la descripción del curso “Cantidad y sus fundamentos para el aprendizaje y la enseñanza I” (arriba) y su matriz de conocimientos (abajo). En color azul se destaca lo referido al Conocimiento matemático y en rojo al Conocimiento didáctico del contenido.

Metodología de trabajo

En primer lugar, se realizó un análisis de la descripción de cada uno de los cursos de formación específica del DCBN del Programa de estudios de educación secundaria de la especialidad de matemática. Luego, se revisó los marcos teóricos y diversas experiencias internacionales para definir y sustentar las decisiones asumidas en la propuesta de elaboración de las matrices de desempeño de cada uno de los cursos de formación específica.

En un segundo momento, las matrices fueron sometidas a validación por parte de los docentes formadores. Para ello, durante los meses de junio y julio del 2022, se organizaron talleres virtuales sincrónicos, donde se presentó el modelo y las matrices de conocimiento por grupos de cursos: Forma, movimiento y localización y sus Fundamentos para el Aprendizaje y la Enseñanza I, II y III (Taller 1); Cantidad y sus Fundamentos para el Aprendizaje y la Enseñanza I y II (Taller 2); Gestión de Datos y sus Fundamentos para el Aprendizaje y la Enseñanza I, II e Incertidumbre y sus Fundamentos para el Aprendizaje y la Enseñanza (Taller 3); Variación y sus Fundamentos para el Aprendizaje y la Enseñanza I, II, III y Álgebra como Herramienta Modelizadora I y II (Taller 4).

Luego, las matrices son revisadas por profesionales peruanos de gran prestigio académico, amplia experiencia y conocimiento de las competencias profesionales que deben desarrollar los futuros docentes de matemática y con conocimiento del modelo del MTSK.

Posteriormente, según los alcances, sugerencias y comentarios dados por los docentes formadores y expertos, las matrices de desempeños han sido ajustadas.

Actualmente, se está coordinando el desarrollo de talleres a realizar con docentes formadores de IESP y EESP públicas para la implementación de las matrices de conocimientos en los cursos de Formación Específica del DCBN del Programa de estudios de educación secundaria de la especialidad de matemática, la cual se realizará en dos etapas:

- En el 2023, un ciclo de talleres para 2 de los cursos del componente de Formación Específica: Cantidad y sus Fundamentos para el Aprendizaje y la Enseñanza I y II (octubre).
- En el 2024, un ciclo de talleres para 11 de los cursos de la Formación Específica: Forma, movimiento y localización y sus Fundamentos para el Aprendizaje y la Enseñanza I, II y III (marzo); Gestión de Datos y sus Fundamentos para el Aprendizaje y la Enseñanza I, II e Incertidumbre y sus Fundamentos para el Aprendizaje y la Enseñanza (mayo); Variación y sus Fundamentos para el Aprendizaje y la Enseñanza I, II, III (julio) y Álgebra como Herramienta Modelizadora I y II (setiembre).

Resultados

El proceso de validación de las matrices de conocimiento se desarrolló en 4 talleres en los cuales participaron 172 docentes formadores de 17 regiones del Perú, de 41 IESP y EESP con una mayor participación por parte de los IESP, tal como se detalla en la tabla 1.

Tabla 1
Número de docentes e instituciones participantes en los talleres de validación de las matrices de conocimiento

Instituciones			
	Participantes	**EESP**	**IESP**
Taller 1	20	7	6
Taller 2	72	8	20
Taller 3	40	9	14
Taller 4	40	6	11

Fuente: Elaboración propia.

Los talleres de validación han sido positivos para confirmar que las Matrices de conocimientos son pertinentes pues responde a las demandas del docente formador para implementar con mayor eficacia los cursos del DCBN del Programa de estudios de educación secundaria de la especialidad de matemática. Así también, se evidencia que las Matrices de conocimientos tienen coherencia pues guardan relación con los cursos.

Los talleres permitieron recoger información para mejorar la claridad de los desempeños descritos utilizando un lenguaje más cercano a la práctica del docente formador. Así mismo, se evidenció la necesidad de fortalecer las competencias del docente formador para trabajar el subdominio de Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) para realizar una implementación más efectiva de las matrices para los cursos que ha sido diseñado. En ese sentido, la Dirección de Formación Inicial Docente del Ministerio de Educación desarrolló en el 2022 y 2023 dos ciclos de videoconferencias para abordar temáticas disciplinares y sobre el desarrollo del aprendizaje de la matemática tales como, concepciones sobre la matemática, problema matemático y fenómenos que estudia la matemática, pensamiento computacional y perspectiva actual de la didáctica de la matemática. En estas videoconferencias participaron un amplio y diverso público; entre ellos, directores de los IESP y EESP, docentes formadores, docentes de la Educación Básica Regular y estudiantes de formación inicial docente.

Conclusiones

En Perú, en marzo del 2020 se publicó el nuevo DCBN del Programa de Estudios de Educación Secundaria de la especialidad de Matemática para la formación inicial docente, documento que responde a las demandas actuales y contiene la descripción de cursos de formación específica que integran el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido en cada uno de ellos. A partir del cual se han elaborado Matrices de contenidos para cada curso considerando el marco teórico del Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) con el propósito que los docentes formadores lo utilicen como un recurso para un mejor desarrollo de su práctica pedagógica dado que permite visualizar los diferentes aspectos del contenido que se deben abordar en sus diferentes subdominios.

Finalmente, el proceso de implementación del nuevo DCBN se viene dando gradualmente y se pone énfasis en la apropiación del modelo del MTSK para una mejor comprensión de lo que necesita y tendría que conocer el profesor de matemática.

Referencias

García, M. (2005). La formación de profesores de matemáticas. Un campo de estudio y preocupación *Educación Matemática, 17*(2), 153-166. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40517207

Godino J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13-31.*

Ministerio de Educación de Perú [MINEDU]. (2020). *Diseño Curricular Básico nacional de la Formación Inicial Docente. Programa de Estudios de Educación Secundaria, especialidad Matemática.* Autor. http://www.minedu.gob.pe/superiorpedagogica/producto/dcbn2019-matematica/

Muñoz-Catalán, M., Contreras, L., Carrillo, J., Rojas, N., Montes M. y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 18*(3)*, 589-605.*

Perrenoud, P. (2007). *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar: Profesionalización y razón pedagógica.* GRAÓ.

Pino-Fan, L., Guzmán-Retamal, I., Larraín, M., y Vargas-Díaz, C. (2018). La formación inicial de profesores en Chile: “Voces” de la comunidad chilena de investigación en Educación Matemática. *UNICIENCIA, 32*, 68-88.

FORMACIÓN DE PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA: TAREAS FORMATIVAS PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESPACIAL Y MÉTRICO

Training of primary school teachers: training tasks for the development of spatial and metric thinking

Acevedo Rincón, J.[a], Flórez Pabón, C.E.[b]

[a] Escuela de Educación, Universidad Industrial de Santander, Colombia
[b] Departamento de Filosofía, Universidad de Pamplona, Colombia

Temática: 1 – MTSK en la formación docente

Resumen.
Esta comunicación presenta una aproximación metodológica para caracterizar las tareas que promuevan el desarrollo del pensamiento espacial y métrico, desde una revisión sistemática de la literatura del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Las aproximaciones iniciales registran propuestas centradas en el conocimiento didáctico del contenido (conocimiento de la enseñanza de las matemáticas), enfocando las propuestas de tareas formativas para los profesores de Educación Básica Primaria, basadas en experiencias didácticas con material concreto. Sin embargo, carecen de una adecuada profundización en el Conocimiento disciplinar de las matemáticas (KoT, KSM y KPM), dada la generalidad en el tratamiento de la disciplina para Educación inicial, para la formación del futuro profesor, la cual necesita de nuevas estrategias de apropiación del conocimiento matemático y su didáctica..

Palabras clave. Didáctica, Matemáticas, Tarea formativa, MTSK.

Abstract.
This communication presents a methodological approach to characterize tasks that promote the development of spatial and metric thinking, from a systematic review of the literature on the specialized knowledge of the mathematics teacher. The initial approaches register proposals focused on the didactic knowledge of the content (knowledge of mathematics teaching), focusing the proposals of formative tasks for Primary Basic Education teachers, based on didactic experiences with concrete material. However, they lack an adequate deepening in the disciplinary knowledge of mathematics (KoT, KSM and KPM), given the generality in the treatment of the discipline for Initial Education, for the training of the future teacher, which needs new strategies of appropriation of mathematical knowledge and its didactics.

Keywords. Didactics, Mathematics, Formative Task, MTSK

Acevedo Rincón, J. y Flórez Pabón, C.E. (2023). Formación de profesores de educación básica primaria: tareas formativas para el desarrollo del pensamiento espacial y métrico. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.103-110). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

En la formación de profesores de los diferentes niveles educativos, se abordan aspectos didácticos y disciplinares de las matemáticas, los cuales llevan hacia la aproximación a las prácticas de enseñanza, desde el estudio de las diferentes teorías. Estos, inicialmente convergen en la elaboración de planeaciones de clase, o en la propuesta de micro-clases que funcionan en el hipotético de un salón con condiciones normales (para el formador), y en estudiantes que tienen una comprensión básica de las matemáticas. Sin embargo, y a pesar de estas propuestas hipotéticas, varias situaciones de incertidumbre atraviesan los futuros profesores. Preguntas que persisten aún más cuando llegan a la etapa de las prácticas (de observación, inmersión o investigativas) y perduran hasta el inicio de su vida profesional, pues aquellas ideas de salones efectivamente divergen de los salones que los futuros profesores vivieron en su etapa escolar inicial, tal como se menciona en Acevedo-Rincón (2018).

Por lo anterior, desde la línea de Educación Matemática de la Licenciatura en Educación Básica de la Universidad Industrial de Santander se pretenden varios objetivos, entre los cuales se destacan: (i) fortalecer el desarrollo del pensamiento matemático a través del reconocimiento de los procedimientos, definiciones, propiedades, fundamentos, aplicaciones, significados, representaciones, conexiones, jerarquización, demostración, y uso del lenguaje en las matemáticas universitarias, para hacer una correcta transposición (Colomb, 1985; Brousseau, 1986; Flórez-Pabón y Acevedo-Rincón, 2020) hacia una matemática escolar, regida por el currículo nacional (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 1998; MEN, 2006); (ii) fortalecer la comprensión de la Didáctica de la Matemática a través de una aproximación teórico-práctico que trascienda el activismo de los recursos físicos o virtuales para la aproximación a la matemática escolar, y más bien, llegar a ellos a través de la comprensión de la construcción de cada uno de los objetos matemáticos que fueron previamente aprendidos; y, (iii) velar porque las creencias (y miedos) vivenciados por los futuros profesores sean permeadas por nuevas experiencias que permitan un total reconocimiento de la matemática como parte del desarrollo de habilidades y competencias propias de la población con la que trabajarán en Educación Básica Primaria.

Según los lineamientos curriculares del área de matemáticas (MEN, 1998), su enseñanza debe estar basada en sus componentes: (i) el pensamiento matemático, que se subdivide en dominios conceptuales (numérico, espacial, métrico, variacional y aleatorio); (ii) los procesos (razonamiento, ejercitación, modelización, resolución de problemas y comunicación); y, (iii) los contextos (matemático, interdisciplinario y cotidiano), en Educación Básica Primaria, Secundaria y Media. Sin embargo, por la particularidad de cada contexto, la propuesta curricular no hace evidente cómo confluyen todos estos elementos en la realidad del aula común para que estos conocimientos produzcan razonamientos y cuestionamientos que trasciendan los aspectos procedimentales del objeto matemático, sin centrarse en unos cuantos procesos (ejercitación y razonamiento) o un único dominio conceptual (pensamiento numérico). Sino que trascienda hacia la enseñanza de las matemáticas como disciplina integral, en la que todas sus líneas de pensamiento sean enseñadas con la misma importancia, y también otros procesos ya mencionados previamente.

Investigaciones como la de Acevedo-Rincón (2018; 2020) y Flórez-Pabón y Acevedo-Rincón (2020), sugieren la importancia de vivir experiencias de aprendizaje (y de enseñanza) en escenarios reales de formación a través de tareas de enseñanza, las cuales se consideran tareas claves en la formación inicial de futuros profesores. Esto implica una aproximación a la práctica matemática (no pedagógica de la matemática escolar, sino disciplinar) de los futuros profesores desde una perspectiva simultánea como “punto de partida y de llegada de esta conceptualización (de la enseñanza de la matemática escolar) en la formación de profesores” (Ribeiro et al., 2021, p. 4).

Entre los principios considerados por los diferentes autores se tiene que: (i) el objetivo prioritario de las tareas matemáticas debe ser el promover una discusión matemática fructífera (Mason et al., 2006); (ii) el elemento central en toda práctica es el conocimiento del profesor y es considerado el más influyente en los resultados de los estudiantes (Nye et al., 2004); y, (iii) el diseño y la conceptualización de las tareas que pretenden desarrollar este conocimiento deben tener en cuenta la posibilidad y la necesidad de promover este desarrollo a través de situaciones basadas en la práctica (Smith, 2001). Lo anterior implica la necesidad de su incorporación en la práctica de aprendizaje (en la formación inicial del futuro profesor) para la práctica de enseñanza de la matemática escolar (al momento de ejercer como profesor). Por lo anterior, esta comunicación pretende presentar una aproximación metodológica para caracterizar las tareas que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático (espacial y métrico) desde una revisión sistemática de la literatura de los futuros profesores de Educación Básica Primaria a partir de una revisión sistemática de la literatura del conocimiento especializado (disciplinar, didáctico y pedagógico) del profesor que enseña matemáticas.

Marco Teórico

La especialización del conocimiento ha sido un concepto construido desde la comprensión de lo disciplinar limitada al contenido y a la gestión de aula. Inicialmente, el conocimiento del contenido especializado (*Specialized Content Knowledge*, SCK), propone el reconocimiento de las elecciones en la práctica del profesor, orientadas a las de tipo curricular y gestión de aula, tales como: la elección de los contenidos, el tipo de situaciones y la solución de situaciones emergentes, para fomentar el diálogo frente al contenido matemático durante el desarrollo de la clase, los cuales permiten un conocimiento matemático sostenible en los alumnos (Rowland et al., 2002). Aportes posteriores reconocen la especialización desde la gestión del aula.

Por su parte, Carrillo et al. (2018), consideraron la especialización del conocimiento como eje central al incorporar los elementos disciplinares de la matemática, y los didáctico- pedagógicos de su enseñanza, desde la perspectiva teórica y metodológica del Conocimiento Especializado del Profesor que enseña Matemáticas (*Mathematics Teacher Specialised Knowledge*, MTSK). Este modelo tiene como objetivo mejorar las prácticas de enseñanza y de formación de los profesores (y futuros profesores) que enseñan matemáticas en distintos niveles. De manera que, como campo de investigación de la Educación Matemática, autores como Ribeiro et al. (2016) y Acevedo-Rincón (2020a, 2020b) consideran que el modelo permite analizar la actuación del profesor, desde la formación inicial en las universidades, hasta en sus prácticas de enseñanza de la matemática escolar. La constitución del modelo MTSK (Carrillo et al., 2018, p. 6) destaca la distribución de los seis subdominios, en dos dominios principales: Conocimiento del contenido pedagógico (*Pedagogical Content Knowledge*-PCK), a la derecha, y a la izquierda, Conocimiento matemático (*Mathematical Knowledge*-MK).

En el dominio del conocimiento pedagógico (PK), que se subdivide en tres subdominios a saber: (i) Conocimiento de la enseñanza de las Matemáticas (KMT); (ii) Conocimiento de las características del aprendizaje de las Matemáticas (KFLM); y, (iii) Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las Matemáticas (KFLM). Del lado izquierdo, el dominio del Conocimiento matemático (MK) está dividido en tres subdominios: (i) Conocimiento de los Temas (KoT); (ii) Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM); y, (iii) Conocimiento de la práctica Matemática (KPM). Por último, presenta como centro de toda práctica, la importancia que tienen las creencias de los (futuros) profesores, tanto de las matemáticas, como de su enseñanza.

Metodología

La investigación que rige esta comunicación es de carácter cualitativo, se ubica dentro del paradigma interpretativo de revisión sistemática de la literatura frente a las tareas formativas que considera el desarrollo del pensamiento matemático a partir de la perspectiva del conocimiento especializado del profesor que enseña matemáticas escolares. Desde la perspectiva de LeCompte et al. (2003) las revisiones sistemáticas de la literatura se realizan sobre estudios primarios, de investigaciones previas que responden a la pregunta de investigación planteada a través de un proceso sistemático y explícito. De acuerdo con Petticrew y Roberts (2005), la búsqueda de información es la etapa que perfila la investigación de manera que la aproximación se realiza a través de fuentes confiables, entre ellas bases de datos reconocidas (*Scopus, WoS*, bases institucionales de universidades, etc.) que conlleven a un proceso de reconocimiento de la información a partir de un primer mapeo de los datos obtenidos.

Para esto, se desarrollan las siguientes etapas: (i) aproximación a la literatura, en donde se refinan los elementos planteados inicialmente desde la pregunta de investigación y se define el protocolo de investigación basado en estrategias de búsqueda y criterios de calidad; (ii) recolección de la información, la cual se realiza a partir de los criterios de inclusión y exclusión; (iii) selección de artículos: que se acoplan a los criterios de selección, calidad y pertinencia; (iv) análisis de las tareas: de acuerdo con las características mencionadas en el modelo: tareas formativas desde la visión del formador de profesores para la enseñanza de las matemáticas escolares (MK), y tareas formativas para el aprendizaje de la matemática escolar (PK); (v) Sistematización de las tareas formativas: las cuales han sido perfiladas para la formación de los futuros profesores.

De acuerdo con los criterios de inclusión perfilado para la selección de los artículos, se consideraron relevantes los siguientes aspectos de publicación: tipo de estudio, fecha de publicación, idioma, tipo de propuestas, público al que va dirigido el escrito, contexto del artículo, conocimiento matemático; y, finalmente, estudios dirigidos a formación de profesores de Educación Básica Primaria, o que incluyan conocimientos enseñables en Educación básica primaria. Para efectos de esta publicación, se ha seleccionado un recorte en el que se profundiza sobre los resultados iniciales, a partir de una organización primaria de la información detectada en la búsqueda de artículos que incluyan, propongan o analicen tareas formativas, a nivel universitario, o que constituyan una posibilidad de adaptación de una tarea escolar para la formación de futuros profesores.

Resultados iniciales

En un primer nivel de aproximación al perfil de formación de los futuros profesores de Educación Básica Primaria se identifican una organización particular del contenido programático de la línea de Educación matemática dentro de la formación del futuro profesor de Educación Básica Primaria. De acuerdo con el modelo del conocimiento especializado del profesor que enseña matemática, se prioriza el conocimiento matemático, centrado en el desarrollo del Pensamiento espacial y métrico se identifican como indicadores asociados a los subdominios del Conocimiento Matemático (MK) los siguientes:

- KoT (Procedimientos, Definiciones, propiedades y sus fundamentos, registros de representación, fenomenología y aplicaciones, significados)
- KSM (Conexiones basadas en: el incremento de complejidad y en la simplificación; conexiones transversales y auxiliares)
- KPM (Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas geométricos-métricos, formas de validación y demostración, papel de los símbolos y uso del lenguaje formal, procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas a partir de la geometría y la medición, prácticas particulares del quehacer matemático, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones).

Desde esta perspectiva teórica, se identifica desde lo disciplinar de la matemática como los conceptos, los procedimientos y las estructuras matemáticas propias de la geometría y la medición. Es importante destacar que el programa cuenta con 5 cursos desarrollados durante los primeros cinco (5) semestres orientados hacia la enseñanza de conocimientos disciplinares de las matemáticas (tres semestres) y hacia la didáctica de las matemáticas. Sin embargo, hasta finales de 2021, no había una organización y/o distribución clara sobre el desarrollo de los contenidos matemáticos, ni de su didáctica. Por lo que fue importante delinear una propuesta didáctico-disciplinar en la que se incorporaran estrategias de formación para los futuros profesores.

Los artículos identificados se ingresaron a una matriz de datos. En el procedimiento de análisis de los datos de los artículos: búsqueda, sistematización, categorización, caracterización y análisis de los documentos reportados. De forma que, al final, los datos fueran complementarios para la proyección de los resultados.

De la bibliografía rastreada hasta el momento en buscadores de Scopus, WoS, bases institucionales de universidades, etc., se han identificado diferentes fórmulas de búsqueda que proporcionó un total de 194 artículos, de los cuales se eliminaron duplicados, para quedar solo 165 artículos, que describen el conocimiento didáctico, la formación del profesor, el conocimiento matemático, el conocimiento didáctico y aportes al currículo. A continuación, en la tabla 1, se reflejan las ecuaciones de búsqueda implementadas para el rastreo de información.

Tabla 1
Ecuaciones de búsqueda avanzada en bases de datos especializadas

Geometría tridimensional	**Geometría bidimensional**	**Medición**
((activities) AND ("three-dimensional figures”))	((activities) AND (visualization) AND ("elementary school"))	((teaching) AND (patterns) AND ("primary education"))
spatial thinking of primary school children	tasks geometry primary	((activities) AND (geometric patterns) AND ("elementary school"))
(area and volume) AND (elementary school)	(activities) AND (geometric thinking) AND (primary school)	(area and volume) AND (elementary school)

Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo con el rastreo de artículos, los identificados se detallan en la figura 1 la clasificación de los 165 artículos por año, desde 1981, hasta el 2021.

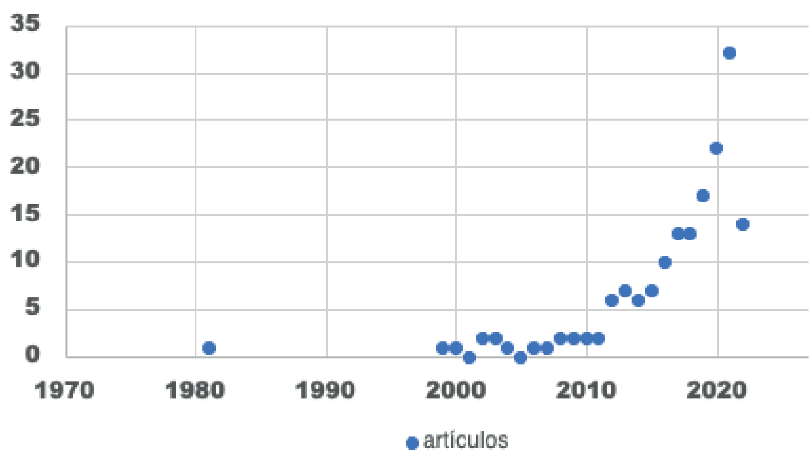


Figura 1. Clasificación de artículos por año

En su gran mayoría se orientan hacia la formulación de tareas para el estudiante de Educación Básica Primaria (133 artículos) y el resto a la formación de profesores de ese nivel o el planteamiento de la tarea como instrumento evaluativo. Dentro de las características principales en la Metodología de investigación de los 165 estudios identificados bajo las fórmulas de búsqueda y criterios de selección, se identifican 62 estudios de perspectiva cuantitativa, 79 de corte cualitativo, y 24 de tipo mixto. Además, 151 artículos registraron un enfoque empírico, y sólo 14 de tipo teórico.

Entre los principales recursos identificados como "comúnmente más usados" en el diseño o propuesta de secuencias didácticas registradas en los artículos, se encuentra la implementación de secuencias didácticas usando origami, tangram, logicubos, uso de software (*Mathigon, GeoGebra, tangram*) y realidad aumentada (AR), como base para la formación de profesores de Educación Básica Primaria. Además, el tratamiento de los conceptos de dimensionalidad, volumen, relación área, superficie y volumen, concepto de espacio, simetría y ángulos, se constituyen en los más explorados para el diseño de dichas secuencias.

Con el fin de identificar los 30 artículos sobre los cuales se realizará el análisis (fase posterior a la etapa mencionada) se implementaron rejillas de clasificación de la información con la siguiente información a analizar por artículo: resumen, introducción, Métodos, referencial teórico usado, objetivos del estudio, destinatarios, contexto, nivel educativo, tipo de artículo, tipo de propuesta, principales tareas relacionadas con geometría/medición, metodología implementada, principales resultados, posibilidades de transformación de la tarea y otra información relevante. Vale la pena resaltar que, pensando en la posibilidad de que otros aspectos del artículo contribuyan a la reformulación de las tareas formativas en la perspectiva (PK) para la formación del conocimiento matemático en futuros profesores (MK), se ha decidido incluir el ítem de "posibilidad de transformación de la tarea".

Así mismo, esta aproximación inicial muestra que los procesos más explorados dentro de la enseñanza de las matemáticas en la formación basada en problemas se encuentran relacionados con la resolución de problemas, el razonamiento y la comunicación, como parte importante de las secuencias diseñadas en los artículos. Sin embargo, estos no se encuentran directamente relacionados con el pensamiento espacial y métrico, sino en el tratamiento general de la matemática escolar, en donde los artículos refieren a la enseñanza sobre el desarrollo del pensamiento numérico y variacional. Otras exploraciones encontradas a nivel general corresponden a la relación de la concepción de espacio y la habilidad numérica.

Aunque esta investigación se encuentra en desarrollo actualmente de la etapa de análisis de los artículos preseleccionados, se proyecta que los resultados encontrados con las tareas identificadas, pueden ser posteriormente clasificadas dentro de cada uno de los indicadores y estándares básicos de competencias (MEN, 2006), reorganizados para formular posibilidades de uso de materiales concretos, pero también, la posibilidad de explorar e involucrar nuevas situaciones de enseñanza a partir de los diseños previamente construidos por otros investigadores en los artículos reportados hasta la fecha. Es importante aclarar, que muchas de las investigaciones dispuestas en las bases de datos, corresponden a tareas formativas aplicadas en contextos diferentes al colombiano, y, por lo tanto, se hace necesaria la implementación de algunas de estas con estudiantes de licenciatura, a fin de valorar los resultados de aprendizaje frente a tales apuestas de enseñanza. Para lo cual, la investigación cuenta con el aval del comité de ética de la Universidad Industrial de Santander. Así mismo, se espera proyectar para una próxima etapa de investigación la sistematización de las tareas experimentadas con estudiantes de primero y terceros semestres de la Licenciatura en Educación Básica Primaria, de la Universidad Industrial de Santander.

Conclusiones

De la capacidad de incorporar experiencias de aprendizaje en el aula (de formación del futuro profesor y el aula del profesor en ejercicio) se resalta la importancia de vivir experiencias en escenarios reales con tareas formativas intencionadas en y para la práctica de los futuros profesores que enseñarán matemáticas. El limitar la experiencia al aprendizaje conceptual de las matemáticas hace que cualquier profesional ajeno a una especialización del conocimiento didáctico-pedagógico (por ejemplo, de áreas relacionadas con ingenierías o ciencias), desde la perspectiva de la matemática escolar para la Educación Básica Primaria, pueda considerar la idea de que ser profesor implica el simple hecho de "pasar" conceptos o enseñar los "trucos" detrás de los procedimientos. La enseñanza de las matemáticas, en especial, el desarrollo del pensamiento matemático a través de los diferentes procesos trasciende los escenarios mágicos y simplificadores del conocimiento. Por tal razón, se hace necesario el hecho de considerar que los futuros profesores de matemáticas para Educación Básica Primaria, y en general para cualquier nivel escolar, se sumerjan en experiencias de aprendizaje (para la enseñanza) que permitan identificar el desarrollo de las especificidades del conocimiento (didáctico, pedagógico y disciplinar), que es lo que caracteriza la práctica de ser profesor (Mason y Johnston-Wilder, 2006). Es justo este el papel que desempeñará la implementación de tareas intencionadas, con escenarios favorables de formación para la aproximación a la especialización del conocimiento matemático escolar, para aproximar a sus futuros estudiantes al desarrollo de competencias. Así mismo, estas tareas formativas se constituirán en la base para la identificación de las matemáticas escolares adecuadas a los diferentes escenarios institucionales, así como también de los conocimientos necesarios y suficientes para desarrollar el pensamiento matemático en sus alumnos.

Finalmente, es de resaltar que gran parte de los trabajos identificados carece de una adecuada profundización en el Conocimiento disciplinar de las matemáticas (conocimiento de las estructuras, y prácticas matemáticas), dada la considerada generalidad en el tratamiento de la disciplina para los primeros años de Educación Básica, lo que revela la necesidad de incorporar nuevas estrategias de apropiación del conocimiento matemático (conceptos, procedimientos, fenomenología, registros de representación, significados, estructuras y sus conexiones) y su didáctica.

Agradecimientos

Esta publicación es parte del proyecto de investigación "Taller juegos de negociación. Experimentos en él aula para la formación de competencias ciudadanas", código 3933, financiado por la Vicerrectoría de Investigación y Extensión de la Universidad Industrial de Santander. Asimismo, está vinculado a la Red Iberoamericana de investigación MTSK, auspiciada por la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

Referencias

Acevedo-Rincón, J. P. (2018). *Aprendizagens profissionais docentes do (futuro) professor de Matemática situadas em um estágio interdisciplinar* [Tesis de Doctorado, Universidade Estadual de Campinas]. https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2018.1018401

Acevedo-Rincón, J. P. (2020a). Geometry and Measurement: Specialized knowledge of future teachers within a pedagogical laboratory. *Journal of physics, 1702*, 012022. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1702/1/012022

Acevedo-Rincón, J. P. (2020b). Relevance of the mathematics teacher's specialized knowledge model in the planning and interpretation processes at the spatial thinking. *Journal of physics, 1514*(1), 012019. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1514/1/012019

Brousseau, G. (1986). *La théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques Thèse d'État 1986 | Guy Brousseau.* http://guy-brousseau.com/46/resume-de-la-these-detat-1986/

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., González, L. C. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, C. M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Colomb, J. (1985). Chevallard (Yves). — *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné.* Persée. https://www.persee.fr/doc/rfp_0556-7807_1986_num_76_1_2401_t1_0089_0000_1

Flórez-Pabón, C. E. y Acevedo-Rincón, J. P. (2020). Brousseau y los retos de la didáctica matemática en educación. En: Ágora: Fundamentos epistemológicos e pesquisas avançadas em educação (pp.125-144). Pedro y João Editores. http://doi.org/10.5281/zenodo.3902541

LeCompte, M. D., Klingner, J. K., Campbell, S. A., y Menk, D. W. (2003). Editors' Introduction. *Review of Educational Research, 73*(2), 123-124. https://doi.org/10.3102/00346543073002123

Mason, J. y Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks.* Tarquin.

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (1998). *Serie Lineamientos curriculares. Matemáticas*. Autor.

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Autor.

Nye, B., Konstantopoulos, S. y Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis, 26*(3), 237-257. https://doi.org/10.3102/01623737026003237

Petticrew, M., y Roberts, H. (2006). *Systematic Reviews in the Social Sciences: A Practical Guide.* Blackwell.

Ribeiro, M., Mellone, M. y Jakobsen, A. (2016). Interpreting Students' Non-Standard Reasoning: Insights for Mathematics Teacher Education. *For The learning of mathematics, 36*(2), 8–13. https://flm-journal.org/Articles/1E18A185A33C632C99E545E9D8DC9B.pdf

Ribeiro, M., Almeida, A. y Mellone, M. (2021). Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. *Perspectivas da Educação Matemática 14*(1), 1-32. http://doi.org/10.46312/pem.v14i35.13263

Rowland, B., Correnti, R., y Miller, R. J. (2002). What large-scale, survey research tells us about teacher effects on student achievement: Insight from the Prospect study of elementary schools. *Teacher College Records, 104*(8), 1525-1567. https://doi.org/10.1177/016146810210400804

Smith, M. S. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics.* The National Council of Teachers of Mathematics.

DISEÑO Y ANÁLISIS DE UNA TAREA SOBRE INFERENCIA ESTADÍSTICA INFORMAL EN FORMACIÓN INICIAL DOCENTE

Design and analysis of a task on informal statistical inference in initial teacher training

Pascual, M.I.[a], Rifo, L.[b], Castilla, L.[a], Climent, N.[a]

[a] Universidad de Huelva, España
[b] Universidade Estadual de Campinas, Brasil

Temática: 1 – MTSK en la formación docente

Resumen.
En este trabajo presentamos el diseño y el análisis de la implementación de una tarea en formación inicial docente que tiene como objetivo el desarrollo de conocimiento especializado del profesor de primaria en relación con la inferencia estadística informal. La tarea tomó como punto de partida el experimento conocido como "mesa de billar de Bayes" y el diseño, estructurado desde el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), contempla el desarrollo de conocimiento matemático y didáctico del contenido en este tema. La tarea fue desarrollada en dos grupos de una asignatura del tercer curso del Grado en Educación Primaria, impartida por dos de los autores de la comunicación. Las sesiones fueron videograbadas y transcritas para su análisis. Los resultados obtenidos evidencian las dificultades de los EPM en el trabajo con actividades de inferencia estadística.

Palabras clave. Experimento de Bayes, Inferencia estadística informal, Formación inicial docente, MTSK.

Abstract.
In this paper we present the design and analysis of the implementation of a task in initial teacher training whose objective is the development of specialized knowledge of primary school teachers in relation to informal statistical inference. The task took as its starting point the experiment known as "Bayes pool table" and the design, structured from the Mathematics Teacher Specialized Knowledge Model (MTSK), contemplates the development of mathematical and didactic knowledge of the contents in this theme. The task was carried out in two groups of a third-year course in Primary Education, taught by two of the authors of the paper. The sessions were videotaped and transcribed for analysis. The results obtained show the difficulties of the PPT in the work with statistical inference activities.

Keywords. Bayes experiment, Informal statistical inference, Initial teacher education, MTSK.

Pascual, M.I., Rifo, L., Castilla, L. y Climent, N. (2023). Diseño y análisis de una tarea sobre inferencia estadística informal en formación inicial docente. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.111-118). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

El ensayo original de Thomas Bayes (1702-1761), publicado póstumamente en 1763, pretende resolver el siguiente problema: se conocen el total de veces en que un suceso ocurre y el total de veces en que no ocurre; se requiere saber cuán probable es que la probabilidad de que dicho suceso ocurra en un intento esté entre dos valores dados. Por ejemplo, si sabemos que una cierta característica está presente en el 23% de una muestra, cuál es la probabilidad de que dicha característica esté presente, por ejemplo, entre el 20% y 30% de la población. Este problema está en la base del razonamiento inferencial estadístico con respecto a la cuantificación de nuestro aprendizaje a partir de una muestra. La solución Bayesiana se aplica en la actualidad masivamente para guiar el desarrollo científico y tecnológico basado en datos. El papel crítico de la comprensión de este tipo

de razonamientos en la sociedad actual, nos hace situar la mirada en el aprendizaje de los alumnos de primaria desde la formación inicial.

En el contexto español, el aprendizaje matemático en la etapa de Educación Primaria incluye el desarrollo del sentido estocástico, enfocado hacia la interpretación de datos, la toma de decisiones a partir de información estadística y la comprensión de la aleatoriedad (Makar y Rubin, 2009). Es por este motivo, que uno de los retos de la formación inicial docente de profesores de primaria es capacitar a los estudiantes para maestro (EPM) para proponer situaciones de aprendizaje que contribuyan en la construcción de este conocimiento. Entendemos que la inclusión de la inferencia estadística informal (ISI, de las siglas en inglés) en la formación inicial vehicula el desarrollo de estos conocimientos, planteando un desafío tanto a nivel de aprendizaje matemático como de diseño de tareas.

En este trabajo analizamos la implementación de una tarea en la formación inicial de estudiantes para maestros (EPM) sobre el experimento histórico propuesto por Bayes, conocido como la “mesa de billar de Bayes”, y su aplicación en Educación Primaria. El objetivo es identificar elementos de conocimiento movilizado que informen sobre el proceso de aprendizaje en formación inicial para avanzar en el rediseño de propuestas de formación que incluyan conocimiento probabilístico en esta etapa.

Marco teórico

Gal (2005), Greer y Mukhopadhyay (2005) y Franklin et al. (2005) justifican la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria por su aplicabilidad en lo cotidiano, la necesidad de conocimiento estadístico básico en diversas profesiones y el rol del razonamiento probabilístico en la toma de decisiones bajo incertidumbre.

Algunos estudios han puesto de relieve que niños de temprana edad pueden entender conceptos de probabilidad, comparar la probabilidad de sucesos y elegir la mejor opción en diferentes situaciones involucrando probabilidades (Tsakiridou y Vavyla, 2015).

No obstante, resulta complejo entender el razonamiento estadístico inferencial como un enlace entre modelos matemáticos probabilísticos y la predicción de comportamientos de grupo a partir de datos, como muestra el propio desarrollo histórico de estos conceptos (Pfannkuch, 2005). Según esta autora, esta complejidad se refleja en la enseñanza del razonamiento inferencial informal y formal, en diversos niveles de enseñanza de la estadística. Pfannkuch et al. (2016) señalan la necesidad de abordar conceptos basales en la estructura y en la práctica del modelamiento probabilístico, frente al desarrollo tecnológico disponible, para potenciar el aprendizaje a través de actividades de abstracción y aplicación con problemas reales, y la necesidad de integrar los razonamientos probabilístico y estadístico.

Diversos trabajos han puesto de manifiesto la necesidad de mejorar el conocimiento probabilístico de futuros maestros, tanto desde la perspectiva del MTSK (Castilla et al., 2022; Di Bernardo et al., 2022), como desde otros modelos del conocimiento del profesor (Gómes-Torres et al., 2016). En particular, los dos primeros trabajos citados destacan las dificultades del futuro profesorado de Primaria en la comprensión de una perspectiva subjetiva de la probabilidad, ligada a la toma de decisiones, como un modo de enseñanza del razonamiento inferencial (Castilla et al., 2022). Para que futuros maestros puedan ampliar sus conocimientos probabilísticos más allá de la descripción de datos y así comprender el alcance y validez de afirmaciones probabilísticas sobre una población a partir de una muestra representativa, como parte del proceso pedagógico cognitivo del ISI, de Vetten et al. (2019) sugieren poner más énfasis en actividades de muestreo e inferencia.

Por su parte, Greer y Mukhopadhyay (2005) resaltan la importancia de conocer el desarrollo histórico del pensamiento probabilístico y cuestionamientos filosóficos básicos sobre azar y determinismo, para reconocer el alcance de sus implicaciones en la enseñanza, al aportar luz sobre obstáculos cognitivos y comprensiones erróneas.

En consonancia con las referencias anteriores, la actividad “mesa de billar de Bayes”[1] permite discutir y movilizar conocimiento especializado (desde la perspectiva del MTSK, Carrillo et al., 2018) sobre probabilidad condicional y razonamiento probabilístico inferencial.

Descripción de la tarea y conocimiento especializado pretendido

La tarea “¿Dónde cayó?”, que toma como punto de partida el experimento anteriormente mencionado, ha sido implementada en formación inicial docente con el objetivo de desarrollar conocimiento especializado sobre inferencia estadística informal (De Vetten, et al. 2019). En particular, pretende que los EPM reflexionen sobre diferentes registros de representación y análisis de la información obtenida, los contenidos matemáticos curriculares involucrados en la actividad y el uso de la actividad en Educación Primaria y vivencien el proceso inferencial, evaluando la incertidumbre de sus estimaciones. En primer lugar, los EPM realizaron el experimento. Para ello disponían de pequeños sacos de arena que tenían que arrojar de espaldas sobre una mesa. El tirador debía tirar el primer saquito e intentar averiguar su posición a partir de las indicaciones que daba el observador sobre la posición relativa de otros lanzamientos respecto del primero. Tras cinco lanzamientos, se intercambian el papel de tirador y observador. Para la recogida de la información, los EPM disponían de dos plantillas. En la hoja del observador (Figura 1) debían anotar las indicaciones aportadas sobre los cinco lanzamientos considerando, por ejemplo, instrucciones como “el saquito ha caído arriba/abajo y a la izquierda/derecha del primero”.

Hoja del observador

Grupo .... Número de tirador: ....

Anota, de la forma que consideres, la información que extraigas de la descripción de las tiradas

Saco	Indicaciones al tirador
1	
2	

Figura 1. Extracto de la hoja del observador ofrecida a los EPM

El lanzador, en la hoja del observador (Figura 2) debía anotar la información recibida y, posteriormente, hacer una apuesta justificada sobre el punto donde creía que había caído el primer saco a partir de la

[1] Una presentación del experimento como momento histórico epistemológico del desarrollo del razonamiento probabilístico puede encontrarse en Estrella et al (2023).

información recibida tras los lanzamientos de los sacos. Consideramos que las instrucciones fuesen abiertas para discutir con los EPM la estrategia de recogida de la información, en relación con su potencial para la inferencia.

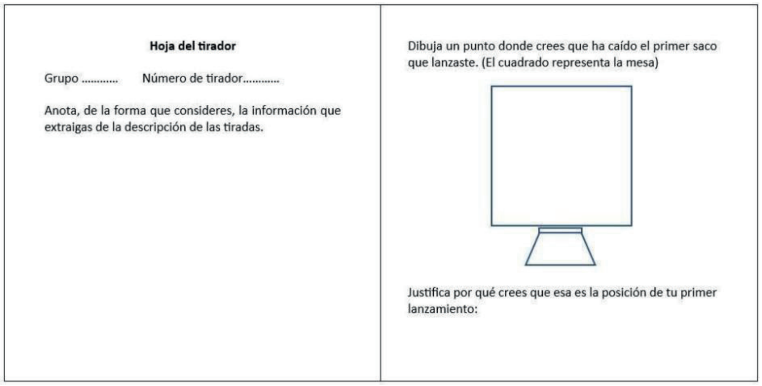


Figura 2. Extracto del anverso y reverso de la hoja del tirador ofrecida a los EPM.

Tras la primera parte de la tarea, los EPM deben responder, en grupo, una serie de preguntas para la puesta en común posterior (Figura 3).

Para reflexionar en grupo después de jugar

1. ¿Qué información y formas para su registro usó cada jugador?
2. ¿Cómo se relacionan estos registros con la predicción realizada? ¿Cómo has analizado la información obtenida?
3. ¿Qué razonamientos o procedimientos matemáticos has usado para decidir a partir de la muestra?
4. ¿Qué contenidos de probabilidad crees que se usan en esta actividad?
5. ¿Usarías esta actividad en el aula de Primaria? Explica brevemente cómo lo harías y qué aspectos de la actividad explorarías.

Figura 3. Preguntas de reflexión tras la experimentación ofrecida a los EPM.

El conocimiento que pretendemos construir con los EPM en esta actividad incluye distintos subdominios del MTSK. Las preguntas finales tienen como objetivo profundizar en el conocimiento matemático de los EPM, tomando como referencia las bases conceptuales propuestas por De Vetten et al. (2019) a partir de los trabajos de Makar y Rubin (2009): *los datos como evidencia, generalización más allá de los datos e incertidumbre en las inferencias*. De esta forma, los EPM deben reflexionar sobre el papel de la información obtenida en cada tirada y enfrentarla a sus creencias (pregunta 1), establecer la conexión entre el trabajo estadístico como base para la argumentación en el proceso de inferencia (preguntas 2 y 3), hacer una valoración probabilística a partir de la información obtenida y analizar críticamente la muestra (pregunta 4). Asimismo, se pretende propiciar la discusión sobre el uso de la actividad en Educación Primaria (pregunta 5). En la Tabla 1 mostramos en detalle el conocimiento que pretendemos se construya con la tarea.

Tabla 1
MTSK pretendido en la tarea de formación inicial “¿Dónde cayó?”

Subdominios de MTSK	**Categorías**	**Descriptores de conocimiento**
Conocimiento de los temas (KoT)	Procedimientos	1. Obtención de la probabilidad predictiva a partir de resultados de una muestra. 2. Localización, a través de coordenadas adecuadas, de puntos en el plano.
	Registros de representación	3. Interpretación matemática de la información verbal en la recogida de datos para la inferencia. 4. Correspondencia entre registro verbal y gráfico en la representación de puntos en el plano.
	Fenomenología y aplicaciones	5. El uso de la probabilidad como medida de información parcial. 6. Situaciones probabilísticas
Conocimiento de la práctica matemática (KPM)		7. Medida de la incertidumbre como forma de validación del conocimiento derivado de una muestra.
Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	8. Potencialidades y limitaciones del experimento de Bayes como actividad para la enseñanza del razonamiento inferencial 9. Variantes de la tarea para la etapa de Educación Primaria

Fuente: Elaboración propia.

Análisis del conocimiento movilizado en la tarea

La mayoría de los estudiantes para maestro, en su papel de tiradores, usaron la información tal cual se la proporcionaban los observadores para ir haciendo predicciones sobre la posición de su primer saco en la mesa. Para ello, registraban los datos proporcionados por el observador (KoT 3). En muchos casos consideraban de forma aislada la información de cada tirada, sin reconocer que los resultados de la muestra completa podían dar luz sobre la situación inicial (KoT 1).

Algunos estudiantes interpretaron los resultados del conjunto de las tiradas para realizar la predicción final, como Óscar:

> Óscar: Yo he tenido en cuenta el derecha-izquierda-arriba-abajo… Como en la mayoría me iban diciendo arriba y a la izquierda… pues si todos estaban a la izquierda, el primero estaba a la derecha”. (Preguntado por qué por el profesor) “Porque si yo tiraba por la derecha lo normal es que se fueran más para la derecha.

Como Óscar en esta unidad, estos EPM usaron el plano cartesiano como herramienta para conceptualizar la problemática, mostrando conocimiento de su uso en la localización (KoT 2, KoT 4). Lo más importante, identificaban una situación donde a través de la inferencia, podían hacer una previsión del resultado con base en la información de la que disponían, posiciones relativas y condiciones en los lanzamientos (KoT 1, KoT 5).

En línea con lo anterior, Pedro, durante la puesta en común afirmó que si el primer saco cae hacia la izquierda, hay más probabilidad de que los demás caigan hacia la derecha que hacia la izquierda haciendo un razonamiento predictivo, y reconociendo también la situación como modelizable probabilísticamente (KoT 1, KoT 5).

> Pedro: Si hay más sitio, es más probable que caigan ahí (señalando sobre el dibujo de la mesa en la pizarra). Si han caído más a la derecha que a la izquierda del primero es porque había más espacio a la derecha. (Deduce lo mismo en relación con arriba-abajo)

De este modo, Pedro está interpretando la situación como en el experimento de Bayes, entendiendo que la información proporcionada por las tiradas permite hacer una previsión

sobre la situación inicial. Encontramos, además, indicios sobre formas de validación de conocimiento matemático en su argumentación sobre cómo afecta la muestra al grado de incertidumbre sobre la posición del primer saquito, que le permite concluir sobre la relación espacio y probabilidad (KPM 7) Cuando se discuten en gran grupo las dos últimas cuestiones (4 y 5 de la Figura 3), afloran reflexiones interesantes. Por ejemplo, muchos alumnos no reconocen la probabilidad en esta actividad, como Alberto, que argumenta:

> Alberto: Si el saco tuviera una cara roja y otra verde, todavía estaría la probabilidad, porque sería cuál es la probabilidad de que caiga rojo o verde.

Es notorio cómo en este caso se pone de manifiesto un conocimiento restringido del EPM en relación con situaciones probabilísticas (KoT 6), ligado a extracciones de urnas, donde no tienen cabida otras situaciones de incertidumbre (KoT 5). Alberto mantiene su resistencia incluso después de discutir en gran grupo la situación y escuchar los razonamientos probabilísticos de otros EPM.

También resulta llamativo que muchos de los EPM no sean partidarios de llevar la actividad al aula de Primaria, aludiendo dificultades de gestión del aula (“depende del grupo de alumnos que tenga”), no sintiéndose capacitados para implementarla con un grupo de alumnos revoltosos. María dice que no lo haría en Primaria porque “incluso yo me he liado diciéndole las indicaciones a él [*compañero*] cuanto más a un niño de Primaria”. Por su parte, Osama propone cuadricular la mesa, como ayuda, para que resulte factible llevarlo a Primaria. Esta discusión sobre la tarea para Primaria muestra movilización sobre las potencialidades y limitaciones de dicha tarea y posibles adaptaciones para Primaria (KMT 8, KMT 9).

Conclusiones

La situación presentada enfrenta a los EPM a una situación de inferencia, parece que en muchos casos por primera vez, que rompe con las actividades que se asocian a probabilidad aunque los EPM muestran resistencias para considerarla como una actividad probabilística Pfannkuch (2005, 2016). Por ello, es importante ampliar la visión de la probabilidad de los EPM reducida a urnas y dados, que sustenta un conocimiento muy limitado de esta pues casi se refiere al escolar como ya veíamos en Castilla et al. (2022) y Climent et al. (2023).

Situarse como resolutores de la tarea posibilita movilizar elementos sobre todo del KoT, tanto en lo referido a hacer una predicción a partir de resultados del experimento, recoger datos para dicha predicción y, lo que nos parece fundamental, reconocer situaciones de probabilidad como medida de incertidumbre que amplíen su conocimiento fenomenológico sobre probabilidad.

Creemos que el énfasis en el conocimiento matemático en tareas como la propuesta es imprescindible, al no tener los EPM experiencia previa con este tipo de situaciones matemáticas. Consideramos que las divergencias entre el conocimiento pretendido relacionado con el conocimiento de la práctica matemática (KPM) puede tener esa misma base. El rediseño de la actividad debería ofrecer más oportunidades de construcción de estos conocimientos.

Si bien se reflexiona sobre la tarea en Primaria, se pone mayor énfasis en ellos como resolutores. La inclusión de estudiantes (reales o simulados) de Primaria resolviendo la tarea podría permitir abordar elementos de KFLM.

Por último, indicar que consideramos importante incluir tareas con una visión subjetiva de la probabilidad en la formación inicial de profesorado de Primaria. Por ejemplo, tareas como la propuesta, basada en la predicción, pueden servir para dar más sentido y desarrollar el pensamiento probabilístico. Esto ayudará a ampliar la idea que los EPM tiene de la probabilidad, así como de su enseñanza y aprendizaje.

Referencias

Bayes, T. y Price, R. (1763). Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. Philosophical Transactions of the Royal Society, 53, 370-418. doi/pdf/10.1098/rstl.1763.0053? doi:10.1098/rstl.1763.0053

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco-Mora, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalan, M.C. (2018). The Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Castilla, L., Climent, N., Hubenáková, V., Rifo, L., y Semanisinová, I. (2022). Preservice teachers’ knowledge for teaching uncertainty: cases from Slovakia and Spain. En J. Hodgen. E. Geraniou, G. Bolondi, y F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 3511-3518). ERME / Free University of Bozen-Bolzano.

De Vetten, A., Schoonenboom, J., Keijzer, R. y Van Oers, B. (2019). Pre-service primary school teachers’ knowledge of informal statistical inference. *Journal of mathematics teacher education, 22*, 639-661.

Di Bernardo, R., Mellone, M., Minichini, C. y Ribeiro, M. (2022). Subjective probability: Mathematical Teachers’ Specialised Knowledge in a betting game. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, y F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of European Research in Mathematics Education (*pp. 3561-3568*)*. ERME / Free University of Bozen-Bolzano.

Estrella, S., Rifo, L. y Vergara, A. (2023). Explorando el pensamiento probabilístico en investigaciones recientes (2010-2022): dos momentos históricos epistemológicos y siete conceptos clave. En S. Estrella, M. Parraguez y R. Olfos (Eds.), *Pensamiento matemático específico: Aportes desde la Didáctica de la Matemática para investigar, innovar y mejorar en y sobre la práctica docente.* GRAÓ.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D. S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Schearer, R. (2005). *A Curriculum Framework for K-12 Statistics Education*. GAISE Report. American Statistical Association.

Gal, I. (2005). Towards” probability literacy” for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. In G.A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Springer.

Gómez-Torres, E., Batanero, C., Días, C. y Contreras, J. M. (2016). Developing a questionnaire to assess the probability content knowledge of prospective primary school teachers. *Statistics Education Research Journal, 15*(2), 197-215.

Greer, B., y Mukhopadhyay, S. (2005). Teaching and learning the mathematization of uncertainty: historical, cultural, social and political contexts. En G.A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 297-324). Springer.

Makar, K., y Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal, 8*(1), 82-105.

Pfannkuch, M. (2005). Probability and statistical inference: How can teachers enable learners to make the connection? In G.A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 267-294). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_12

Pfannkuch, M., Budgett, S., Fewster, R., Fitch, M., Pattenwise, S., Wild, C. y Ziedins, I. (2016). Probability modeling and thinking: what can we learn from practice? *Statistics Education Research Journal, 15*(2), 11-37.

Tsakiridou, H. y Vavyla, E. (2015). Probability concepts in primary school. *American Journal of Educational Research, 3*(4), 535-540. doi: 10.12691/education-3-4-21.

PROPUESTA PARA LA ELABORACIÓN DE UNA LICENCIATURA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA BASADA EN EL MODELO MTSK

Proposal for the elaboration of a Degree in Mathematics Education based on the MTSK model

Parra-Sandoval, H.[a], Salas-Solano, B.[b]

[a] Universidad del Zulia, Venezuela
[b] Universidad de Costa Rica, Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica

Temática: 1 – MTSK en la formación docente

Resumen.
Se describe un primer acercamiento al diseño curricular de un plan de formación de profesores de secundaria en Educación Matemática a nivel de licenciatura, que busca ser una guía para la elaboración de propuestas similares en diversas universidades iberoamericanas. La propuesta se fundamenta teóricamente en un modelo por competencias y un aprendizaje sustentado en la reflexión sobre la práctica, considerando los dominios y subdominios del modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas como marco para la identificación y organización de competencias disciplinares y didácticas del futuro profesor. Para el diseño curricular por competencias se utiliza una metodología que contempla seis etapas y está basada en la propuesta de Schmal y Ruiz-Tagle. Se concluye con una reflexión del proceso llevado a cabo a la fecha, y una primera versión de la malla curricular.

Palabras clave. Currículo, Formación de profesores, Competencias profesionales, MTSK.

Abstract.
A first approach to the curricular design of a training plan for secondary school teachers in Mathematics Education at the undergraduate level is described, which seeks to be a guide for the elaboration of similar proposals in various Ibero-American universities. The proposal is theoretically based on a competency-based model and learning based on reflection on practice, considering the domains and subdomains of the Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge as a framework for the identification and organization of disciplinary and didactic competencies of the future teacher. For the curricular design by competences, a methodology that contemplates six stages is used and is based on the proposal of Schmal and Ruiz-Tagle. It concludes with a reflection of the process conducted to date, and a first version of the curriculum.

Keywords. Curriculum, Teacher training, Professional skills, MTSK.

Parra-Sandoval, H. y Salas-Solano, B. (2023). Propuesta para la elaboración de una licenciatura en educación matemática basada en el modelo MTSK. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.119-127). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

Numerosos estudios relacionados con el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) han demostrado su gran potencial para analizar detalladamente aspectos fundamentales del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Carrillo et al., 2018), legitimando de esta manera el modelo. Sin embargo, se hace necesario ampliar el tipo de estudios hacia propuestas que incidan en la formación inicial de profesores de nuestras universidades, especialmente en Latinoamérica, donde se contemplan licenciaturas que permiten egresar profesores en esta área específica. En correspondencia a esta demanda, unos miembros pertenecientes a la Red Iberoamericana sobre el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Red MTSK) nos planteamos asumir el reto de proponer una licenciatura para formar profesores de matemáticas inspirada en el modelo MTSK.

Lograr tal finalidad supone hallar un equilibrio entre una propuesta inspirada en el modelo MTSK y las necesidades formativas a nivel profesoral específicas de los diferentes contextos que conforman el rico universo sociocultural de nuestra región iberoamericana. Por eso, la propuesta que aquí se presenta no busca plantear un currículo rígido, sino más bien presentarse como un referente que inspire y facilite la concreción de licenciaturas en Educación o Pedagogía Matemática dirigidas a formar profesores de Educación Media (12 - 16 años), que se adapten a las diferentes necesidades del contexto en el que se planteen su formalización institucional.

Fundamentos de la propuesta

La reflexión sobre la práctica educativa matemática

Identificar al profesor de matemáticas como un profesional reflexivo supone asumir como parte consustancial de la propuesta de formación inicial, la reflexión sobre la práctica. Esta idea de entender que quien se forma como profesor es un ser en permanente reflexión sobre su hacer, está marcada por los planteamientos realizados por Dewey (1933) y que luego se enriquecieron con los aportes de Schön (1987).

De acuerdo a Marín-Cano et al. (2019) la reflexión sobre la práctica ayuda a rememorar las acciones, le otorga sentido a los procesos, problemas y restricciones que surgen de las prácticas y proporciona a quienes ejercen o van a ejercer la profesión docente, las posibilidades de revisar lo hecho y otorgarles significados.

Para que esta idea de la reflexión sobre la práctica se concrete en la propuesta curricular de la Licenciatura, se ha puesto el foco en el tipo de estrategias de enseñanza y de evaluación. En cuanto a las estrategias, se plantea identificar ciertas prácticas matemáticas y pedagógicas y luego analizarlas; así, por ejemplo, en los cursos de matemáticas se deben plantear actividades que promuevan la metacognición a través de la reflexión sobre los procesos seguidos en la resolución de problemas o la modelización. También podrían identificarse aquellos errores que comúnmente manifiestan los estudiantes de educación media en determinados temas matemáticos y desde la mirada disciplinar, reflexionar sobre las causas de ellos. De igual manera, en los cursos relacionados con la didáctica de las matemáticas se propone promover la mirada a lo que sucede en diferentes situaciones de aprendizaje y reflexionar sobre ellas. Para que esta reflexión sea enriquecedora, será necesario que tanto el formador provea de herramientas teóricas que faciliten la reflexión, como que el formador atienda ciertas características que todo proceso reflexivo debe cumplir.

En cuanto al proceso que se debe seguir para promover una rica reflexión, se adoptaron las ideas de Korthagen y Nuijten (2022) quienes proponen cinco fases. La primera es la necesidad de identificar situaciones de aprendizaje ricas en elementos que inviten a la reflexión, todo de acuerdo a los objetivos que en su momento se han propuesto. Por ejemplo, si se estudia la geometría analítica, hay la posibilidad de solicitar a los futuros profesores que identifiquen el proceso que han seguido al modelar un fenómeno físico haciendo uso de la ecuación de la parábola. En un curso de didáctica de la geometría se podrían identificar las estrategias de evaluación seguidas en un tópico particular de geometría en el nivel medio. Como segundo paso, se propone analizar en detalle esas acciones previamente identificadas para luego, ejecutar el tercer paso que sería destacar de ese análisis los aspectos esenciales que ellas encierran de acuerdo a los objetivos de aprendizaje propuestos; en los casos antes mencionados se les pediría a los futuros profesores que analicen las razones por las cuales ellos siguieron esos pasos y no otros al momento de la modelación del fenómeno físico, apoyándose en la ecuación de la parábola y que valoren si esos pasos seguidos podrían ser o no sustituidos o mejorados para lograr mejores resultados o, en el caso de la evaluación, que analicen cuáles competencias se están considerando y si realmente se están evaluando de la mejor manera posible o no. Luego, un cuarto paso sería promover la presentación de alternativas de acción que ayuden a superar las situaciones que se consideran insatisfactorias para luego finalizar, si es posible y de acuerdo a la naturaleza del curso, con un quinto paso ensayando alguna posible solución y ver si resulta o no efectiva y eficiente.

Noción de Competencia

Si bien no existe una única definición de competencia, diversas fuentes mencionan que ésta implica la integración y movilización de conocimientos, habilidades, valores y actitudes para desempeñarse en tareas surgidas en contextos específicos, con el fin de satisfacer necesidades afectivas, cognitivas y profesionales (Ortiz y Cires, 2012; Poulain et al., 2007; Segredo y Reyes, 2004). Estas nociones amplían la visión de competencias meramente pragmática (“saber hacer”) y proponen que quien se forme tome conciencia de los conocimientos, actitudes y valores que se conjugan al momento de realizar acciones de tipo educativas matemáticas en contextos concretos.

Al concebir el currículo desde la perspectiva competencial, se distinguen dos tipos de competencias: genéricas y específicas. Las genéricas tratan conductas propias de ámbitos laborales como el trabajo en equipo, liderazgo, comunicación asertiva. Por su parte, las específicas, son aquellas propias del quehacer docente (Blanco et al., 2016). En la propuesta, las competencias genéricas se fomentan a través de estrategias que promuevan la participación, la reflexión y comunicación de ideas matemáticas y educativas, así como el trabajo en equipo. La competencia específica se verifica en funciones propias del Educador Matemático, como en la resolución de problemas, la modelización de algún fenómeno socioambiental, la gestión de aula, la evaluación de los aprendizajes y el uso de recursos didácticos apropiados.

Desde este enfoque, se asume que en la formación debe haber una relación orgánica entre la teoría y la práctica, que no se limita al prácticum o prácticas profesionales, sino que debe estar presente en todas las áreas curriculares. Por tanto, además de las prácticas profesionales, se propone que en los cursos de matemática se aborde el conocimiento y la reflexión sobre el hacer matemático en diferentes contextos y, en los cursos de didáctica de las matemáticas se plantea visitar espacios educativos para conocer sus dinámicas, colaborar y asumir el liderazgo en diferentes actividades.

Modelo MTSK

Se asume el modelo MTSK como referente teórico principal. En ese sentido se entiende que el conocimiento específico del profesor de Matemáticas contempla dos dominios: Conocimiento Matemático (MK) y Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). El Conocimiento del Contenido Matemático (MK) incluye tres subdominios: conocimiento de los temas matemáticos (KoT), conocimiento de las estructuras matemáticas (MSK) y conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM). Por su parte, el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) se organiza en otros tres subdominios: Conocimiento sobre la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), Conocimiento sobre el Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y Conocimiento sobre los Estándares de Aprendizaje en Matemáticas (KMLS). Por último, las concepciones, creencias, sentimientos y valores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje son parte del conocimiento especializado y se presentan de manera transversal a través de los diferentes subdominios.

Todos estos componentes que contempla el MTSK, por ser parte constitutiva del conocimiento profesional que se desea conformar en los futuros profesores, deberán estar presentes a lo largo de los cursos de matemáticas y de didáctica de las matemáticas. En ese sentido, se presenta a continuación tres ejes sobre los que se articulan estos componentes con los cursos a desarrollar en la propuesta curricular.

Vínculo entre el MTSK y los ejes del programa

La propuesta curricular contempla las siguientes tres dimensiones sustentadas en el modelo MTSK: Dimensión matemática, dimensión didáctico - matemática y dimensión práctico - profesional.

Dimensión matemática

La dimensión matemática abarca todo lo relacionado con el dominio del Conocimiento Matemático (MK). En ese sentido, los cursos previstos en este dominio deberán considerar los tres subdominios asociados al MK. Se busca en esta dimensión que el futuro profesor de matemáticas configure una red de conocimientos y competencias estructuradas de manera sistémica (Carrillo et al., 2018) que le permitan relacionar diferentes conocimientos matemáticos y así enseñar unas matemáticas conectadas con el mundo intra y extra-matemático.

Para desarrollar esta dimensión del conocimiento se ha previsto un conjunto de cursos de matemáticas en el que se desarrollará el conocimiento de los temas en el contexto de la educación media (KoT), el conocimiento de las estructuras matemáticas (KSM) asociadas a esos temas y el conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM) que se contemplan en este nivel educativo, tales como la modelización, la resolución de problemas y la demostración matemática. Además, se propone identificar ciertas actitudes, creencias y errores matemáticos más comunes cometidos por los estudiantes en el nivel de educación media, de acuerdo al curso tratado, con la idea de analizarlos desde una perspectiva matemática e identificar los obstáculos epistemológicos asociados a ellos.

Dimensión didáctico matemáticas

La segunda dimensión abarca los cursos donde se desarrollarían los conocimientos relacionados con el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). Este dominio comprende todo lo que la didáctica-matemática nos aporta (Carrillo et al., 2018).

Para desarrollar esta dimensión se contempla un conjunto de cursos que deberán trabajar los tres subdominios que comprende este dominio. Se plantea que en cada uno de estos cursos se trabaje el conocimiento sobre los aprendizajes de las matemáticas (KFLM), el Conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas (KMT) y el Conocimiento sobre el currículo escolar (KMLS).

Entre los cursos previstos está el de Didáctica de las Matemáticas que aportará al futuro profesor herramientas teórico - prácticas básicas que le permitan comprender aspectos fundamentales de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Junto a este curso, se proponen otros relacionados con la didáctica de la geometría, la aritmética, el álgebra, la estadística y las probabilidades.

Dimensión de la práctica matemática y educativa matemática

La tercera dimensión de la propuesta aborda la práctica matemática y la práctica educativa matemática. Esta dimensión se desarrollaría tanto en los diferentes cursos de matemáticas y de didáctica de las matemáticas, como en las denominadas prácticas profesionales.

En los cursos del dominio matemático se contempla por una parte desarrollar diferentes prácticas propias de la disciplina como la resolución de problemas, la modelización y la demostración y por la otra, visitar establecimientos educativos para identificar ciertas problemáticas relacionadas con las creencias y errores más comunes cometidos por los estudiantes de educación media en torno a las matemáticas; la idea es reflexionar sobre estos aspectos presentes en las aulas de clases y que todo futuro docente de matemáticas debe conocer y aprender a analizarlos.

En relación a los cursos del dominio didáctico del contenido matemático, se aspira desarrollar actividades relacionadas con el campo de la didáctica de las matemáticas tales como la planificación, ejecución y evaluación de situaciones de aprendizaje, además del diseño y uso de recursos educativos matemáticos tangibles (e.g., geoplano, uso de calculadoras científicas) y no tangibles (e.g., geogebra). Junto a esto se contempla la programación de visitas a la institución escolar con el fin de comprender en contexto esta dimensión.

Por último, se propone la realización de siete prácticas profesionales en las que el futuro docente de matemáticas pueda desarrollar in situ actividades propias de un educador matemático. Estas prácticas profesionales se iniciarán diagnosticando aspectos de la realidad educativa matemática y progresivamente se implicaría al futuro profesor de matemáticas en actividades y tareas matemáticas en el contexto del aula y fuera de ella, todo en un marco de reflexión sobre las prácticas que vayan desarrollando.

Metodología

Para el diseño del plan de estudios se siguió la metodología de Schmal y Ruiz-Tagle (2008), que propone un modelo en seis etapas: Identificación de los módulos partir de las competencias, secuenciación de los módulos, estructuración de los cursos, revisión de los cursos, revisión del plan de estudios y construcción definitiva de los syllabus.Cabe aclarar que se conciben estas etapas como un proceso cíclico, en el cual, con frecuencia, es necesario mirar atrás para analizar y reformular algunos aspectos. Seguidamente se describe brevemente cada etapa.

Identificación de los módulos

Luego de un análisis y comparación de planes de formación de profesores de Matemática en diversos países, se organizó el currículo en torno a tres dimensiones previamente identificadas: Competencia Matemática, Competencia Didáctico Matemática y Competencia Práctica Profesional, que generan dimensiones homónimas.

Secuenciación de los módulos

En un segundo momento, se definió el número y secuencia de cursos para cada dimensión, siendo once cursos de Formación Matemática: Fundamentos de Matemáticas, Cálculo I y II, Geometría I y II, Álgebra I y II, Estadística y probabilidad I y II, y una Electiva en Matemática; once de Formación Didáctico Matemática: Didáctica de las Matemáticas, Cantidad y su Didáctica I y II, Forma y Dimensión y su Didáctica I y II, Cambio y su Didáctica I y II, Incertidumbre y su Didáctica I y II, Informática Educativa y una Electiva en Didáctica de la Matemática; y siete de Prácticas Profesionales: Observación I y II, Gestión administrativa, Gestión comunitaria, Recursos didácticos y Gestión de Aula I y II; para un total de 29 cursos.

Al buscar un diseño curricular adaptable a las necesidades de las universidades en la región, se proponen menos cursos de los que usualmente conforman un plan de formación de Licenciatura (40 aproximadamente), para dejar espacio a las instituciones formadoras a proponer otros cursos de formación general y formación pedagógica.

Además, se establece que debe darse primero un acercamiento a la dimensión Matemática antes de la inmersión en la dimensión de Formación Didáctico-Matemática, para luego profundizar ambos saberes a través del hacer educativo matemático, en la dimensión de Prácticas Profesionales. Por ejemplo, el docente en formación debe aprobar el curso de Estadística y Probabilidad I antes de matricular Incertidumbre y su Didáctica I (Figura 1).

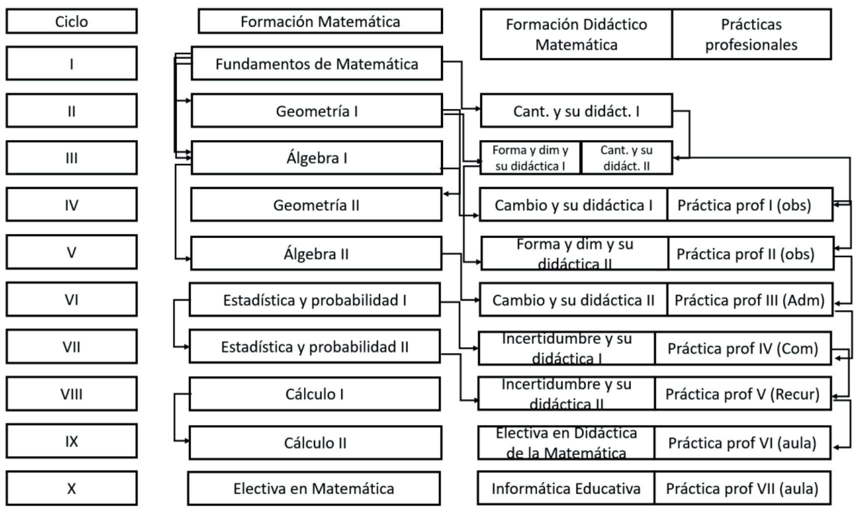


Figura 1. Propuesta inicial de malla curricular
Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 1 se observa la progresión de los cursos a lo largo de los ciclos y la relación longitudinal entre las tres dimensiones. Las flechas indican los cursos que serían requisito para los siguientes. Por ejemplo, en el I ciclo se cursa fundamentos de matemáticas, requisito de Geometría I y Cantidad y su didáctica I (II ciclo) y son, respectivamente, requisito para Forma y su didáctica I y Cantidad y su didáctica II (III ciclo).

Estructuración de los cursos

Posteriormente se ha comenzado a establecer para cada curso, una competencia y determinados objetivos específicos, una lista de contenidos y los recursos por utilizar, entre ellos posibles referencias bibliográficas y una propuesta de instrumentos y actividades de evaluación (Programa de Desarrollo Curricular del Centro de Evaluación Académica de la Universidad de Costa Rica, s.f, p.3). En la Tabla 1 se da un ejemplo de las competencias, objetivos y contenidos del curso de Estadística y Probabilidad I, junto con los dominios, subdominios y categorías del MTSK que orientan los saberes que buscamos promover en dicho curso.

Revisión de los cursos

En esta etapa, una vez estructurados los elementos de cada syllabus o programa, se ha iniciado la distribución de los contenidos y actividades de mediación y evaluación en un cronograma, corroborando la coherencia horizontal de cada programa, de modo que las actividades y los plazos establecidos sean congruentes con la competencia a desarrollar, los objetivos y contenidos definidos. Se propone una calendarización en dos ciclos lectivos anuales, con una duración de 16 semanas cada uno.

Revisión de planes de estudio

En esta etapa se espera analizar la coherencia vertical de los cursos según la secuencia lógica propuesta en la malla curricular de la figura 1. Esta etapa implica valorar de forma global el diseño curricular, identificando posibles incoherencias, los requisitos de los diversos cursos, entre otros aspectos.

Tabla 1
Curso de Estadística y Probabilidad I

Competencia: El estudiante aplica los conceptos y procedimientos de la estadística descriptiva para analizar situaciones y resolver problemas en diversos entornos y contextos escolares y cotidianos.	
Dominio: Conocimiento de la Matemática	
Sub-dominios	**Categorías**
Conocimiento de los temas	Fenomenología, Propiedades y sus fundamentos, Registros de representación, Definiciones y procedimientos, Espacios de ejemplos
Conocimiento de la práctica matemática	Demostración, Definición, Ejemplificación, Uso de heurísticos, modelización, resolución de problemas
Conocimiento de la estructura de la matemática	Conexiones de complejización, Conexiones de simplificación, Conexiones auxiliares, Conexiones de contenidos transversales
Objetivo(s)	**Contenido(s)**
Comprender los conceptos fundamentales de la estadística.	Concepto de estadística y tipos: descriptiva e inferencial.
	Concepto y tipos de variable: cualitativa y cuantitativa.
Utilizar eficazmente diferentes formas de resumir y presentar la información estadística.	Organización y representación de la información: tablas de distribución de frecuencias y tipos de gráficos.
Comprender y utilizar las medidas de posición, de tendencia central y de variabilidad para analizar eficazmente grupos de datos y facilitar la tomar decisiones.	Medidas de posición: máximo, mínimo, recorrido, cuartiles y percentiles
	Medidas de tendencia central: moda. Mediana, promedio. para datos agrupados y no agrupados
	Medidas de variabilidad: varianza y desviación estándar.
Comprender y utilizar apropiadamente el concepto de correlación para describir y predecir relaciones entre variables.	Correlación de variables, caso lineal y no lineal. Coeficiente de correlación
Emplear el cálculo de probabilidades clásicas y las leyes de la probabilidad para describir eventos y facilitar la toma de decisiones en diversos contextos.	Introducción a la probabilidad. Probabilidad clásica o teórica. Universo y puntos muestrales. Eventos: seguro, imposible, probable, simple, compuesto, eventos mutuamente excluyentes y eventos complementarios. Ley de Laplace. Leyes de la probabilidad.
Analizar los diferentes errores y obstáculos asociados al aprendizaje de la estadística	Errores en estadística. Tipos de errores Obstáculos epistemológicos. Actitudes de los estudiantes y profesores ante la estadística

Fuente: Elaboración propia.

Construcción final de los syllabus

Finalmente, a partir de la revisión, análisis y valoración de la coherencia de los syllabus de forma individual y de la malla curricular como un todo, se espera elaborar las versiones definitivas del syllabus de cada curso (Bolaños, 2015).

Comentarios finales

Se plantea un plan de estudios con un estimado de cuatro a cinco cursos por ciclo (dejando espacio para incluir otros cursos de formación pedagógica o general), con dos ciclos lectivos por año, para un total de diez ciclos lectivos y cinco años de formación.

Si bien se identifican tres ejes de formación, se aclara que desde los primeros cursos se incluyen elementos de reflexión en torno a las implicaciones didácticas y prácticas de los temas matemáticos estudiados, como creencias, afectividad, errores y dificultades en la comprensión, de acuerdo a los temas matemáticos mismos y algunas aplicaciones. Estos aspectos se reflejan en los contenidos y en las actividades de mediación y evaluación de cada curso, considerando que, no necesariamente, quien impartirá los cursos de matemáticas tiene formación en Didáctica de la Matemática.
Finalmente se quiere resaltar nuevamente que siendo el modelo MTSK el principal referente teórico, éste se constituye en una herramienta valiosa para el diseño curricular, al caracterizar y organizar los distintos saberes profesionales del profesor de Matemáticas en formación, permitiendo diferenciar y a la vez que integrar y operacionalizar, no solamente los saberes disciplinares y didácticos, sino las dimensiones teórica y práctica del quehacer docente, contemplando además, cuestiones relativas al dominio afectivo como parte de las creencias y concepciones de la Matemática y su enseñanza-aprendizaje.

Referencias

Bernal, C. I. (2007). Diseño curricular basado en competencias profesionales: una propuesta desde la psicología interconductual. *Revista de Educación y Desarrollo, 6*(2), 45-54. https://www.cucs.udg.mx/revistas/edu_desarrollo/anteriores/6/006_Bernal.pdf

Blanco, A. Alba, E. y Asensio, E. (2016). *Desarrollo y evaluación de competencias en educación superior.* Narcea Ediciones.

Bolaños, C. (2015). *Diseño Curricular Universitario. Orientación para los procesos de diseño curricular.* Programa de Desarrollo Curricular del Centro de Evaluación Académica de la Universidad de Costa Rica.

Carrillo , J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Dewey, J. (1933). *How we think: A Restatement of the Relation of Reflective Thinking to the Educative Process.* Henry Regnery. https://archive.org/details/howwethink0000unse/page/n5/mode/2up

Kaiser, G. y König, J. (2019) Competence Measurement in (Mathematics) Teacher Education and Beyond: Implications for Policy. *High Educ Policy,* 32, 597–615. https://doi.org/10.1057/s41307-019-00139-z

Korthagen, F., y Nuijten, E. (2022). *The power of reflection in teacher education and professional development: Strategies for in-depth teacher learning. Routledge.* https://doi.org/10.4324/9781003221470

Ortiz, M., y Cires, E. (2012). Diseño curricular por competencias. Aplicación al macrocurrículo. *Edumecentro, 4*(1), 10-17. http://scielo.sld.cu/pdf/edu/v4n1/edu03112.pdf

Poulain, R. Furnémont, J. y Denyer, M. (2007). *Las competencias en la educación: un balance*. FCE - Fondo de Cultura Económica. https://elibro-net.ezproxy.sibdi.ucr.ac.cr/es/lc/sibdi/titulos/110664

Programa de Desarrollo Curricular del Centro de Evaluación Académica de la Universidad de Costa Rica. (s.f.). *Características y elementos que debe contener un programa de curso.* https://www.cea.ucr.ac.cr/images/desarrollocurricular/ProgramasdeCursos.pdf

Schmal, R. y Ruiz-Tagle, A. (2008). Una metodología para el diseño de un currículo orientado a las competencias. Ingeniare. *Revista chilena de ingeniería, 16*(1), 147-158. https://www.scielo.cl/pdf/ingeniare/v16n1/ART04.pdf

Segredo, A. y Reyes, D. (2004). Diseño curricular por competencias. *Correo Científico Médico de Holguín, 8*(3), 1-8.

Schön, D. (1987). *La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones.* Paidós.

REFLEXIÓN SOBRE EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UN PROFESOR DE SECUNDARIA AL DISEÑAR CLASES DE CUADRILÁTEROS

Reflection on the Specialipecialized Knowledge of a secondary mathematics teacher when designing quadrilaterals's lessons

Advíncula Clemente, E.[a], Torres Cespedes, I.[a], Flores Samaniego, H.[b], Carreño Peña, E.[c]

[a] Universidad de Lima, Perú
[b] Universidad Autónoma de México, México
[c] Universidad de Piura, Perú

Temática: 1 – MTSK en la formación docente

Resumen.
La planificación de clases permite organizar secuencias de enseñanza coherentes con los aprendizajes esperados. El objetivo de este estudio es caracterizar el conocimiento especializado que evidencia un profesor de matemática de secundaria cuando diseña clases sobre cuadriláteros. Seguimos una metodología cualitativa y realizamos un estudio de caso en el que se emplean las categorías del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas para dar cuenta del conocimiento de un docente. Los resultados muestran la importancia de la planificación de clases y el rol que juega la reflexión en la toma de decisiones didácticas.

Palabras clave. Planificación de clases; Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas; Cuadríláteros; Educación secundaria.

Abstract.
Lesson planning allows the organization of teaching sequences that attend the expected learning. The aim of this research is to characterize the specialized knowledge that a secondary mathematics teacher puts into play when designs lessons about quadrilaterals. We followed a qualitative methodology together with a case study in which we use the categories of the Mathematics Teachers Specialized Knowledge in order to analyze the teacher's knowledge. The outcomes show the relevance of lesson planning and the role of reflection in the pedagogical decision making.

Keywords. Lesson planning; Mathematics Teacher Specialized Knowledge; Quadrilaterals; Secondary school.

Advíncula Clemente, E., Torres Cespedes, I., Flores Samaniego, H. y Carreño Peña, E. (2023). Reflexión sobre el conocimiento especializado de un profesor de secundaria al diseñar clases. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.128-135). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

El conocimiento profesional del profesor de matemática es un tema de interés en la Educación Matemática, que ha generado grupos de trabajo en diversos eventos de investigación (p. ej., formación de profesores de matemática y desarrollo profesional del Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática). También han emergido modelos para estudiar el conocimiento del profesor e indagar su práctica docente desde una actitud crítica y reflexiva que permita el fortalecimiento de sus conocimientos y competencias didáctico-matemáticas, por ejemplo, el *Mathematical knowledge for teaching* (Ball et al., 2008) y el *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (Carrillo et al., 2018). Así, Llinares et al. (2022) proponen la formación docente en un marco de competencias profesionales, centrada en la identificación de prácticas profesionales específicas para enseñar matemáticas (p. ej. interpretar respuestas de estudiantes para tomar decisiones de acción, analizar tareas que ofrecen oportunidades de aprendizaje, planificar la enseñanza, reflexionar para rediseñar las propuestas didácticas, etc.); y en la identificación del conocimiento profesional que debe poseer un profesor de matemáticas y procede de las investigaciones en Didáctica de la Matemática.

En el Proyecto Educativo Nacional Peruano al 2036 (Consejo Nacional de Educación, 2020) se plantea una práctica docente que contemple la revisión crítica de las propias prácticas pedagógicas, y se propone articular la formación docente inicial y continua. Estos propósitos responden al diagnóstico reportado en el Proyecto Educativo 2007-2010 (Consejo Nacional de Educación, 2011) en el que se señala que casi un tercio de los docentes enseña aquello para lo que no ha sido preparado. De hecho, en 2002, 26% y 31% de los docentes de educación primaria y secundaria, respectivamente, no cumplían con la certificación académica requerida para el nivel educativo en que se desempeñaban.

Por su lado, Rodríguez y Montiel (2022) señalan que los profesores de matemática de secundaria presentan limitaciones al resolver tareas geométricas, esto debido a la falta de oportunidades que han tenido para desarrollar su pensamiento geométrico, lo cual afecta su práctica docente. En este sentido, Jaime y Gutiérrez (1990) señalan al modelo de Van Hiele como un marco efectivo para desarrollar pensamiento geométrico y organizar la enseñanza de la geometría. Por su parte, Báez e Iglesias (2007) señalan que algunos docentes no desarrollan todos los contenidos geométricos de los programas, debido al poco dominio que tienen de estos o por el desconocimiento de la importancia de la disciplina; y los que, si los desarrollan, lo hacen enfatizando el uso de fórmulas y cálculo de áreas. Lo que requiere del desarrollo del conocimiento especializado de los docentes.

En relación con estudios sobre cuadriláteros, dados los pocos trabajos con profesores en ejercicio, tomamos como referentes algunos estudios con futuros profesores. Así, Escudero-Domínguez y Carrillo (2014) encuentran deficiencias y fortalezas en el conocimiento matemático sobre cuadriláteros de futuros profesores usando el MTSK. Entre las debilidades encuentran la falta de comprensión de definiciones no estándares y la dificultad en el manejo de la clasificación inclusiva; y como fortaleza, el uso correcto de la representación prototípica. Además, Carreño et al. (2017) en su estudio con dos futuros profesores de matemática de secundaria, encuentran que estos lograr definir cuadriláteros de manera descriptiva y particional, y comprenden las clasificaciones inclusivas, aunque les resulta difícil promoverlas en sus clases.

Con respecto al diseño de clases, Zabalza (2003) menciona que la planificación es una habilidad docente importante que debería incorporar no solo contenidos ya identificados, sino también las ideas del docente sobre el tema y su didáctica. Por su parte, García-Zatti y Montiel (2008) resaltan el relevante papel del profesor, a quien consideran como un profesional reflexivo, que decide, diseña, aplica y experimenta estrategias de acción para lograr el aprendizaje de sus alumnos. Asimismo, Camargo y Acosta (2012) señalan que los docentes deben proponer actividades geométricas en las que se logre un equilibrio entre los procesos de intuición y percepción, y los procesos de razonamiento teórico.

Por todo lo anterior, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué conocimiento especializado moviliza un profesor de matemáticas de secundaria cuando diseña sesiones de clase sobre cuadriláteros? El objetivo es caracterizar dicho conocimiento. Cabe mencionar que este estudio forma parte de una investigación más amplia con profesores de matemáticas de educación secundaria.

Marco teórico

El planteamiento teórico de la investigación y el análisis de los resultados se hace desde el modelo MTSK (por sus siglas en inglés: Conocimiento Especializado del Maestro de Matemática). Dado que nuestro objetivo es caracterizar el MTSK del profesor cuando diseña sesiones de clase, la descripción del marco teórico se limitará a aquellos aspectos que son relevantes en la planificación de clases, dejando fuera aquellos aspectos o subdominios del modelo que, según nuestra consideración, no movilizará el docente.

Debido a que el análisis se hace con respecto a la planificación de clases sin considerar su puesta en práctica, es de esperar que en el dominio matemático (MK) se manifiesten los siguientes subdominios: conocimiento de los temas (KoT), en particular de definiciones, propiedades, representaciones, clasificación y aplicaciones de cuadriláteros con una profundidad mayor al nivel en que enseña; y conocimiento de la estructura matemática (KSM), especialmente sobre las conexiones de los cuadriláteros con otros elementos matemáticos.

Por su parte, esperamos que el conocimiento didáctico del contenido (PCK) se manifieste en los siguientes subdominios: conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT) específicamente respecto al uso de estrategias, técnicas, tareas, ejemplos, y recursos materiales y virtuales para enseñar cuadriláteros; conocimiento de las características del aprendizaje de la matemática (KFLM) especialmente respecto al proceso que siguen los estudiantes en cuanto a la comprensión de los cuadriláteros, sus propiedades y sus relaciones, así como un conocimiento más o menos preciso sobre las dificultades que podrían enfrentar sus estudiantes al desarrollar las tareas propuestas sobre cuadriláteros; y conocimiento de estándares de aprendizaje de la matemática (KMLS) en relación con la planificación de clases de acuerdo con lo estipulado en el programa curricular respecto a las competencias, capacidades, estándares y desempeños esperados en la educación secundaria respecto a los cuadriláteros.

Metodología

La investigación sigue un enfoque cualitativo dentro de un paradigma interpretativo (Latorre et al., 2003). Se realiza un estudio de caso (Stake, 2007) a fin de profundizar en el conocimiento especializado que evidencia un profesor de secundaria cuando diseña sesiones de clase relativas a cuadriláteros. En este documento reportamos el caso de un profesor de matemática de educación secundaria con pocos años de servicio, elegido de manera intencional debido a su poca experiencia en aula y a su interés por participar en el proyecto. El informante es Licenciado en Educación Secundaria con especialidad en Matemática y Física, fue un estudiante destacado durante su formación inicial y cuenta con dos años de experiencia en el nivel secundario.

Para la recolección de datos se propuso al informante que diseñe dos sesiones de clase sobre cuadriláteros para estudiantes de 14 años, usando la estructura que considerara pertinente. Además, se le solicito desarrollar un guion con preguntas que buscan que el profesor reflexione sobre las decisiones didácticas a tomar en la planificación de sus sesiones, las cuales están basadas en el guion de tareas usado por Montes et al. (2021). Las preguntas del guion se relacionan con el modelo MTSK de la siguiente manera: 1, 3 y 4 inciden en el KoT, 3 y 4 en el KSM, 2 y 9 en el KMT, 7 en el KFLM, y 5, 6 y 8 en el KMLS. La organización de las preguntas del guion es orientativa y sirven como detonantes para la movilización de conocimiento especializado del profesor, lo que muestra el uso del MTSK como estructurador de tareas para la formación docente (Montes et al., 2019).

A continuación, presentamos el guion de reflexión:

1. ¿Qué contenidos matemáticos se pretende que aprendan mis alumnos en esta sesión? Describe detalladamente los mismos, en su máximo nivel de concreción matemática, justificando cómo se relacionan con las actividades de la sesión. Describe también qué aporta la segunda sesión a la primera.
2. Incluye una copia de la/s actividad/es que has seleccionado del libro de texto, y reflexiona sobre qué criterios han motivado su inclusión en la sesión, y qué aspectos de su contenido o gestión modificarías, por qué, y cómo.
3. ¿Qué conocimientos previos se requieren para poder abordar las actividades? Esta reflexión debe contemplar tanto elementos curriculares de años anteriores (que deben no limitarse a elementos triviales como las operaciones básicas), como a aspectos más concretos que tendrían que haber sido tratados en sesiones anteriores.
4. ¿Qué otros contenidos matemáticos se relacionan directamente con los tratados en la sesión, dentro y fuera del bloque del currículo correspondiente? Indica la relación y cómo se va a abordar en el aula.
5. ¿Qué competencias matemáticas propuestas por el MINEDU se abordarán?
6. ¿Qué competencias matemáticas PISA se abordarán?
7. Incorpora una sección sobre dificultades y obstáculos de aprendizajes relativos a los contenidos tratados y justifica cómo los has tenido en cuenta en el diseño. Este apartado debe estar fundamentado en referencias científicas.
8. ¿Cómo se integra esta sesión en los bloques curriculares? ¿Qué indican los estándares de evaluación que pueda observarse en esta sesión? Describe cómo has considerado estas indicaciones en tu diseño.
9. Justifica la utilidad del uso del recurso para la enseñanza del contenido de tu(s) sesión(es), indicando cómo has tenido en cuenta dicha utilidad y las características del recurso para el diseño de tu(s) sesión(es).

Una vez recogida la información, a través de narrativas, se procedió a su organización y análisis. Para organizarla, se elaboraron tablas que permitieron mostrar una relación vertical (momentos de reflexión) y horizontal (categorías de análisis, según el MTSK) de los datos. El análisis lo realizamos en dos etapas: en la primera, cada investigador realizó un análisis individual para identificar el conocimiento movilizado por el informante en sus dos diseños y evidenciado en sus respuestas a las preguntas de reflexión; y en la segunda, se realizó un análisis conjunto para establecer interpretaciones consensuadas.

Análisis de resultados

El informante planifica dos sesiones para estudiantes de tercer grado de secundaria (14 años) tomando en cuenta una estructura de clase que incluye tres momentos: inicio, desarrollo y cierre, que suele ser la más usada en las instituciones de educación básica peruana. Propone dos sesiones de 90 minutos cada una, donde describe actividades, estrategias y recursos para el logro de los desempeños indicados.

Para cada sesión, el informante formuló dos desempeños de logro, precisados a partir de los desempeños oficiales declarados en el Currículo Nacional (Ministerio de Educación, 2016) para la competencia *Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.* Al realizar la precisión de desempeños evidencia un conocimiento sobre los estándares de aprendizaje para el área de Matemática (KMLS, expectativas de aprendizaje).

Análisis del inicio de las sesiones

En ambas sesiones, el profesor plantea preguntas a los estudiantes para indagar sobre sus conocimientos matemáticos previos, evidenciando un KMT (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Por ejemplo, en la sesión 1 plantea preguntas para explorar qué conocen sobre los cuadriláteros y comparte un video donde se muestra qué es un cuadrilátero, cuáles son sus principales características y en qué contextos son útiles. En la sesión 2 plantea las siguientes preguntas:

> *¿Qué son los cuadriláteros y qué clasificaciones tienen? Explique.*
> *¿Qué propiedades y teoremas de los cuadriláteros conoces? Explique.*

En ambas sesiones, el informante propone una situación en un contexto extramatemático, cuya solución requiere el uso de conocimientos matemáticos relativos a los cuadriláteros. En la sesión 1, el profesor propone una situación relacionada con el diseño a escala de un terreno dividido en terrenos en forma de cuadriláteros; y en la sesión 2, una situación relacionada con la distribución de objetos en una cafetería próxima a inaugurarse, la cual ha sido adaptada de un problema del cuaderno de trabajo de Matemática de tercer grado de secundaria que se usa en las instituciones educativas públicas del país. Observamos que el docente sigue las orientaciones dadas por el Ministerio de Educación para planificar sesiones de clase, evidenciando un conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) vinculada a los intereses y expectativas de los estudiantes (KFLM, intereses y expectativas).

Análisis del desarrollo de las sesiones

En ambas sesiones, el informante incluye el uso de recursos en sus diseños y lo manifiesta de manera explícita al desarrollar el guion, como mostramos a continuación:

> *Para ambas sesiones elaboradas, decidí usar como recursos:*
> - *Transformaciones a escala con papel (manipulativo).*
> - *Trazos en papel con ayuda de un transportador para comprobar los teoremas sobre las propiedades de l*os cuadriláteros (manipulativo).

Observamos que el docente tiene conocimiento sobre el uso de instrumentos de dibujo (regla y transportador) para realizar construcciones geométricas de cuadriláteros a escala en papel (KMT, recursos materiales y virtuales). Además, evidencia conocimiento sobre la experimentación y la visualización de los objetos geométricos como formas que ayudan a la comprensión de las propiedades de ángulos en los cuadriláteros (KFML, formas de interacción con un contenido matemático), tal como lo muestra en su respuesta dada a la pregunta 9 del guion:

> *El recurso manipulativo, como usar hojas, hacer mediciones y dobleces para las comprobaciones de las propiedades de los trapecios, propicia en los estudiantes a una comprensión real de su aprendizaje, pues ellos experimentan y visualizan realmente una característica específica, generando así un aprendizaje significativo.*

En la sesión 1, el profesor presenta una definición de cuadrilátero, sus características y la clasificación en paralelogramos, trapecios y trapezoides. A modo de ejemplo mostramos la definición de cuadrilátero propuesta por el informante.

> *Definición: Es un polígono definido por cuatro lados, puede ser convexo o cóncavo (no convexo).*

Observamos que el docente presenta una definición de cuadriláteros considerando solo su cantidad de lados (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos), lo que da indicios de un conocimiento que podría ser precisado a través de un estudio más profundo de los cuadriláteros.

En la sesión 2, el informante pide que los estudiantes realicen construcciones de cuadriláteros con regla y compás, y mediciones de ángulos con un transportador para verificar dos teoremas relacionados con ángulos en cuadriláteros convexos (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) los cuales se muestran en el siguiente fragmento:

> *Teorema 1: En todo cuadrilátero convexo, la suma de las medidas de sus ángulos interiores es 360°.*
> *Teorema 2: En todo cuadrilátero convexo, la suma de las medidas de sus ángulos exteriores es 360°.*

Observamos que el profesor evidencia conocimiento de las propiedades relacionadas con las medidas de los ángulos interiores y exteriores en un cuadrilátero convexo (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Asimismo, evidencia conocimiento de las propiedades de cuadriláteros al presentar lo siguiente:

> Teorema 1*: En todo trapecio la base media es paralela a las bases y su longitud es igual a la semisuma de las longitudes de las bases.*
> *Teorema 3: En todo trapecio el segmento cuyos extremos son los puntos medio de sus diagonales es paralelo* a las bases y su longitud es igual a la semidiferencia de longitudes de sus bases.

Observamos que el informante presenta los teoremas de manera clara, pero sin usar representaciones geométricas. Lo que nos lleva a promover el uso de distintos registros de representación desde la planificación de sus sesiones.

Asimismo, el profesor evidencia un conocimiento sobre las dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje de los cuadriláteros (KFLM, fortalezas y dificultades), las cuales menciona al responder la pregunta 7 del guion. Una primera dificultad que menciona son las posiciones prototípicas de las figuras geométricas que se presentan en los textos. Frente a la cual, el profesor propone que los estudiantes realicen sus propias construcciones, promoviendo así que las presenten en posiciones distintas a las convencionales. Otra dificultad que menciona el informante es la siguiente:

> [...*] la complejidad de clasificar a los cuadriláteros por su nombre, por ejemplo, existen dificultades para nombrar y diferenciar al cuadrado de un rombo, apareciendo así conceptos equívocos como cuadrado torcido.*

Ante esta dificultad identificada, el informante propone el uso de esquemas visuales que permitan que los estudiantes comprendan las características propias de cada cuadrilátero (KFML, formas de interacción con un contenido matemático).

Análisis del cierre de las sesiones

En ambas sesiones el informante realiza preguntas relacionadas a los cuadriláteros. Por ejemplo, en la sesión 1 plantea lo siguiente:

> *¿Qué tan importante es conocer a los cuadriláteros y sus clasificaciones?*
> *¿Qué tipo de cuadriláteros conoces? ¿Cuáles son sus características?*

Observamos que el informante usa preguntas para promover la comprensión de los cuadriláteros en los estudiantes (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

Conclusiones

El diseño de sesiones de clase acompañado de un guion de reflexión con preguntas que ayudan a tomar decisiones didácticas justificadas resulta útil para desarrollar el conocimiento especializado de los profesores de matemática y para valorar la pertinencia de los espacios de formación de profesores (Carrillo et al., 2018; Llinares et al., 2022).

El conocimiento especializado evidenciado por el informante está centrado en algunos subdominios, en el caso del MK en el KoT y en el caso del PCK en el KMT, el KFLM y el KLMS. En relación con el MK, el informante evidencia un conocimiento sobre definiciones y propiedades de cuadriláteros convexos; así como conocimiento sobre la clasificación de cuadriláteros (paralelogramos, trapecios y trapezoides) a partir de sus propiedades (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Observamos que hace falta promover actividades que generen el desarrollo del KPM y del KSM.

Con relación al PCK, el informante evidencia un KMLS por ejemplo cuando elabora los desempeños precisados para sus sesiones a partir de los desempeños declarados en el Currículo Nacional (KMLS, expectativas de aprendizaje) respecto a los cuadriláteros en tercer grado de secundaria. Además, evidencia un KMT cuando elabora situaciones en contextos extramatemáticos, adapta problemas de los textos, propone actividades de construcciones geométricas con figuras de cuadriláteros en posiciones no convencionales (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Asimismo, el profesor evidencia un conocimiento sobre el uso de instrumentos de dibujo (regla, compás, transportador) para realizar construcciones de cuadriláteros a partir de sus propiedades y sobre el uso del papel para realizar construcciones a través de dobleces (KMT, recursos materiales y virtuales). Finalmente, evidencia un conocimiento sobre las dificultades que suelen presentar los estudiantes en relación con la clasificación de los cuadriláteros, como confusión entre los nombres al no distinguir las propiedades propias de cada tipo de cuadrilátero (KFLM, fortalezas y dificultades). Observamos una relación directa entre los subdominios KMT y KFLM dado que las decisiones del informante en la elección de estrategias y recursos para la enseñanza de los cuadriláteros buscan atender las dificultades de los estudiantes frente a este tema.

Ante la movilización del conocimiento especializado identificado en el informante surge la necesidad de incorporar, tanto a la formación inicial como continua, tareas estructuradas desde modelos de conocimiento profesional (Montes et al., 2019) como el MTSK que ya ha mostrado ser útil en esta tarea, provocando la reflexión en los docentes al tomar decisiones didácticas que tendrán impacto en el aprendizaje de los estudiantes. Así, el guion de reflexión que orientó el diseño de sesiones de clase, inspirado en trabajos anteriores (Montes et al., 2021), ajustado al diseño de sesiones ha orientado la movilización del conocimiento especializado del informante.

Finalmente, este estudio abre puertas a potenciales investigaciones en la línea de desarrollo profesional y formación de profesores de matemática. Así, sería interesante profundizar en estudios que indaguen en el conocimiento que movilizan los profesores en la planificación de sesiones de otros contenidos (p.ej. álgebra, cálculo, números, estadística), que puedan servir de inspiración para elaborar tareas para la formación docente.

Referencias

Báez, R. y Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL "El Mácaro". *Enseñanza de la Matemática,* 12-16, 67-87.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Camargo, L. y Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (32). https://doi.org/10.17227/ted.num32-1865

Carreño, E., Climent, N. y Flores, E. (2017). Conocimiento geométrico especializado de estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria al cursar la asignatura práctica profesional. Una reflexión sobre el plan de clase y su desarrollo. *Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. CB-1279 (pp. 274-284). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM).

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathemtics Education, 20(3)*, 236-253. doi:10.1080/14794802.2018.1479981

Consejo Nacional de Educación. (2020). Proyecto Educativo Nacional al 2036: el reto de la ciudadanía plena. https://cdn.www.gob.pe/uploads/document/file/1915017/CNE-%20proyecto-educativo-nacional-al-2036.pdf.pdf?v=1679434080

Consejo Nacional de Educación. (2011). Proyecto Educativo Nacional 2007-2010. Balance y recomendaciones. https://cdn.www.gob.pe/uploads/document/file/2060533/Proyecto%20Educativo%20Nacional%20-%20Balance%20y%20Recomendaciones%202007%20-%202010.pdf.pdf

Dudley, P. (2015). *Lesson Study. Professional learning for our time.* Routledge.

Escudero-Domínguez, A., y Carrillo, J. (2014). Conocimiento matemático sobre cuadriláteros en estudiantes para maestro. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 267-276). SEIEM.

García-Zatti, M. y Montiel, G. (2008). Resignificando la linealidad en una experiencia de educación a distancia en línea. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias 3*(2), 12-26.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en la educación matemática* (pp. 295-384). Alfar.

Latorre, A., Del Rincón, D. y Arnal, J. (2003). *Bases metodológicas de la investigación educativa.* Ediciones Experiencia.

Llinares, S., Breda, A., Climent, N., Fernández, C., Font, V., Lupiáñez, J. L., Moreno, M., Perez-Tyteca, P., Ruiz-Hidalgo, J. F., y Sánchez, A. (2022). Formación y desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En L. Blanco, N. Climent, M.T. González, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. de Castro Hernández, y C. Jiménez (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 480-530). Editorial Universidad de Granada.

Ministerio de Educación del Perú. (2016). *Currículo Nacional de Educación Básica. http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf*

Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M. y Barrera-Castarnado, V. J. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 157-176). Ediciones Universidad Salamanca.

Montes, M., Pascual, Ma. I. y Climent, N. (2021). Un experimento de enseñanza en formación continua estructurado por el modelo MTSK. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 24*(1), 83-104.

Rodríguez, M. A. y Montiel, G. (2022). Desarrollo del pensamiento geométrico de profesores de matemáticas de secundaria en México. En S. Ibarra, A. del Castillo, J. Saldívar y S. Quiroz (Eds.), *Modelación, visualización y representaciones en la era numérica,* (pp. 235-246). AMIUTEM. https://pmme.mat.uson.mx/publicaciones/MEyT/2022_Modelaci%C3%B3n_visualizaci%C3%B3n_y_representaciones_en_la_era_numerica.pdf

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Morata.

Zabalza, M.A. (2003). *Las competencias docentes del profesorado universitario: calidad y desarrollo profesional*. Narcea.

TENSIONES DE UN GRUPO DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN LA DISCUSIÓN DE UNA TAREA: CREENCIA SOBRE NÚMEROS PERIÓDICOS

Tensions of a group of prospective teachers in a discussion about a task: Belief about periodic numbers

Galleguillos, J.[a], Ribeiro, M.[b]

[a] Universidad de Valparaíso, Chile
[b] Universidade Estadual de Campinas, Brasil

Temática: 1 – MTSK en la formación docente

Resumen.
En este estudio se implementó una tarea matemática sobre números racionales con un grupo de futuros profesores en el que emergieron algunas tensiones. El objetivo del estudio fue comprender las tensiones que emergieron en un grupo de futuros profesores en torno a la igualdad $0,\overline{9}=1$ y relacionar el conocimiento que se visualiza en función del modelo MTSK. La investigación considera tres momentos de recolección de datos: discusión colectiva, feedback individual y una consulta posterior. El análisis muestra una resistencia de los futuros profesores para reconocer la igualdad $0,\overline{9}=1$, a pesar de que los participantes conocían los argumentos matemáticos involucrados en ella, lo que refleja una contradicción matemática sustentada en una creencia. La expansión de la tensión es evidenciada en las respuestas finales de los participantes, basadas en argumentos matemáticos.

Palabras clave. MTSK, Tareas para la formación de profesores, Creencias, Números periódicos.

Abstract.
In this study, a mathematical task on rational numbers was implemented with a group of prospective teachers in which some tensions emerged. The objective was to understand the tensions of a group of prospective teachers around equality $0,\overline{9}=1$ and to relate the knowledge that is displayed based on the MTSK conceptualization. The research considers three moments of data collection: collective discussion, individual feedback and a final reflection. The analysis shows prospective teachers' resistance to recognize the equality $0,\overline{9}=1$, despite the fact that the participants knew the mathematical arguments involved, which reflects a mathematical contradiction supported by a belief. The expansion of the tension is evidenced in the final reflections of the participants, based on mathematical arguments.

Keywords. MTSK, Task for Teacher Education, Beliefs, Periodic numbers.

Galleguillos, J., y Ribeiro, M. (2023). Tensiones de un grupo de futuros profesores de matemáticas en la discusión de una tarea: creencia sobre números periódicos. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.136-143). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

Estudiantes y profesores presentan dificultades para comprender los números racionales (e.g., Streefland, 1991). Algunos autores señalan que en el caso del aprendizaje de los números racionales, los aprendices se enfrentan a un cambio conceptual, es decir, deben aplicar principios distintos de los aprendidos con los números naturales, lo que requiere una reorganización del conocimiento (Stafylidou y Vosniadou, 2004; Obersteiner et al., 2019).

Por otro lado, la enseñanza de los números racionales se ha enfrentado de un modo mecanicista, centrado en la aplicación de reglas que no tienen sentido para los estudiantes (Streefland, 1991). Las dificultades para el aprendizaje de los números racionales pueden presentarse a partir de las diferencias que existen entre éstos y los números naturales, en relación a magnitudes, densidad, representaciones y operatoria (Obersteiner et al., 2019). De ahí, se hace necesario abordar este conocimiento en la formación de profesores de una forma comprensiva, de modo que los (futuros) profesores no subestimen las dificultades en torno de esa temática, teniendo en cuenta los errores, las malas concepciones y las creencias sobre esta temática. De modo particular, las creencias de los profesores influyen sobre sus acciones docentes (Ribeiro y Carrillo, 2011) y es necesario identificarlas y atenderlas para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje en esta temática.

En este estudio se aborda el conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas sobre números racionales, específicamente de números decimales periódicos y semiperiódicos, por medio de una tarea orientada a la formación inicial de profesores (Ribeiro, 2020). La implementación de la tarea desencadenó una discusión a partir de algunas dificultades en comprender aspectos relacionados con la representación de los racionales, lo que evidencia tensiones concernientes con su conocimiento matemático y con sus creencias. En este trabajo se analizan esas discusiones buscando comprender las tensiones que emergieron en un grupo de futuros profesores de matemáticas en torno a la igualdad $0,\overline{9} = 1$, como también de visualizar la posible expansión de las tensiones. Además, se relaciona el conocimiento identificado en función del modelo MTSK, particularmente el relacionado con creencias (*beliefs*).

Marco teórico

Números racionales en la profesión docente

Los números racionales y los naturales presentan diferencias en el ámbito de magnitudes, densidad, representación y de operatoria (Obersteiner et al., 2019). En cuanto a la representación, los números naturales tienen una única representación, mientras que los racionales poseen infinitas y diferentes formas de representación para un mismo valor numérico (por ejemplo, 1/2, 2/4, 3/6, ..., etc. y 0,5). Esa diferencia en la representación corresponde a uno de los desafíos para que los aprendices comprendan ese conocimiento, pudiendo dar lugar a malas concepciones o errores, como también a la adopción de creencias o mitos en esta materia.

Dentro de las representaciones de los números racionales, la igualdad $0,\overline{9} = 1$ ha traído conflictos a los estudiantes. Se ha identificado que estudiantes de primer año de universidad han presentado dificultades para establecer que $0,\overline{9} = 1$, ya que señalan que ambos números son diferentes (Rittaud y Vivier, 2013). También, estudiantes de educación media operan los números periódicos como decimales finitos y explican $0,\overline{9} = 1$ por medio del redondeo (Beltrán, 2013).

MTSK y Creencias

El modelo *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK (Carrillo et al., 2018) establece que el conocimiento que requiere poseer un profesor para enseñar matemáticas es especializado, es decir, que difiere del conocimiento que se requiere para otras profesiones. Este modelo considera tres grandes dominios: *Mathematics Knowledge* (MK), *Pedagogic Content Knowledge* (PCK) y *Beliefs* (Creencias). En este trabajo nos centramos en el dominio de las creencias, para ampliar la comprensión de los resultados obtenidos en Galleguillos y Ribeiro (2021) en relación a este dominio.

Para Carrillo et al. (2014) las creencias son "verdades personales, sostenidas individual y/o colectivamente, derivadas de la experiencia o del propio pensamiento con cierta componente afectiva y evaluativa, sobre la que se pueden tener diferentes grados de convencimiento" (p. 11). Las creencias son ilustradas como lentes a través de los cuales las personas interpretan el mundo y son como filtros que afectan lo que vemos (Philipp, 2007). En esa perspectiva, resulta de gran importancia comprender las creencias de los profesores, porque así como el conocimiento de los profesores se ve reflejado en sus acciones docentes, las creencias de los profesores también influyen en sus planificaciones, argumentaciones y en lo que llevan a cabo dentro del aula (e.g., Ribeiro y Carrillo, 2011; Voss et al., 2013). El modelo MTSK aborda las creencias (*beliefs*) sobre la matemática y sobre su enseñanza (Carrillo et al., 2018) y señala que existe una reciprocidad entre las creencias y los dominios del conocimiento, y se considera que creencias y conocimientos se encuentran entrelazados (Ribeiro et al., 2019). Sin embargo, algunas creencias no se pueden visualizar fácilmente, ya que las personas (y profesores) pueden escoger mantenerlas en oculto. Una forma de identificarlas es observar las acciones docentes, por ejemplo, la forma que organizan y planifican sus clases (Ribeiro y Carrillo, 2011), como también observar sus palabras y discursos. Las acciones docentes, producciones y discursos de los profesores exteriorizan sus creencias.

Métodos

En este estudio se analizan las discusiones de un grupo de futuros profesores de matemáticas que se enfrentan a una Tarea para la Formación – TpF (Ribeiro et al., 2021) que aborda algunos aspectos de los números racionales. La tarea, reportada en Galleguillos y Ribeiro (2021), tenía el objetivo de movilizar algunos aspectos del conocimiento matemático (MK) de futuros profesores. No obstante, en la implementación de la tarea, emergió una discusión en torno a la igualdad $0,\overline{9} = 1$, discusión que se analiza y amplía en este artículo con un enfoque en las creencias de los futuros profesores.

Los participantes del estudio son ocho futuros profesores de matemática cursando una asignatura de didáctica de la matemática, de una carrera de formación de profesores de matemáticas de una universidad chilena, quienes se enfrentaron a la tarea cuyo extracto se muestra en la Figura 2, por ser esta parte la abordada en este estudio. Las clases fueron realizadas bajo la Enseñanza Remota de Emergencia en el contexto de la pandemia Covid-19, y fueron videograbadas a solicitud de los estudiantes.

1. Observe las siguientes respuestas del estudiante Carlos ante el ejercicio:

   Escribe un número racional en el recuadro que se pueda encontrar entre cada para de números:

   a) $\frac{3}{250}$ $\boxed{\frac{14}{10}}$ $0{,}04$

   b) $-4{,}1$ $\boxed{-4{,}010}$ $-4{,}09$

   c) $7{,}99$ $\boxed{8,\overline{9}}$ 9

   A. De acuerdo con las respuestas de Carlos, dadas en el recuadro, indique cuáles son las dificultades que este estudiante tiene al enfrentarse a estos ejercicios.

   B. Carlos piensa que sus resoluciones son todas correctas. Entregue un feedback constructivo dirigido a Carlos, en caso de algún error.

Figura 2. Tarea para la Formación de profesores sobre números racionales

Previo al estudio, se abordó con el curso en pleno una justificación para las reglas de transformación de un número periódico o semi-periódico a fracción bajo la pregunta ¿En qué se fundamentan las reglas de transformación de números decimales a fracción? Los participantes desconocían la fundamentación matemática de esas reglas. Respondiendo la pregunta se trabajó en la comprensión de las reglas por medio de transformaciones en una ecuación en casos numéricos particulares. Luego de esto, se presentó la parte de la tarea mostrada la Figura 2. La tarea muestra un recuadro completado por un estudiante hipotético, llamado Carlos, quien llenó el recuadro con número racional que supuestamente está posicionado entre otros dos números racionales. La tarea pide a los futuros profesores identificar las dificultades que pudo tener Carlos al enfrentarse a la tarea y entregar un feedback en caso de algún error en las respuestas entregadas por él. La presentación de esta tarea (particularmente en 1.c) generó una discusión en torno a la igualdad $0,\overline{9} = 1$, foco principal de este estudio (ver Galleguillos y Ribeiro (2021)).

Los datos del estudio fueron recogidos en tres momentos. En el primer momento se llevó a cabo una discusión colectiva del curso en pleno sobre la tarea (Figura 2, punto 1). En el segundo momento, los participantes respondieron de modo individual a la tarea, entregando un feedback a Carlos, para lo cual debían fundamentar por escrito sus respuestas dentro de tres días. Finalmente, en torno a dos semanas más tarde, los futuros profesores se enfrentaron a una pregunta que abordaba el contenido discutido en la pregunta 1.c para la que debían indicar sus fundamentos por escrito de modo individual. Para el análisis se transcribieron las discusiones de la clase en pleno y se analizaron tanto las producciones escritas en las respuestas a la tarea como las respuestas a la consulta posterior. Para identificar tensiones en los datos utilizamos el marco de análisis de Engeström y Sannino (2011) buscando palabras claves que indiquen manifestaciones de contradicciones, es decir, fuerzas opuestas en el discurso, como dilema o conflicto. Por ejemplo, la negación en un discurso es un fuerte indicador de un conflicto. A partir de las tensiones, se identificó una contradicción en las discusiones de los participantes (Engeström, 1987), y se visualizó una situación de expansión de las tensiones. Finalmente, se identificó el conocimiento especializado movilizado por los futuros profesores de acuerdo al modelo MTSK, particularmente lo relacionado a creencias.

Resultados

Los resultados se presentan en tres momentos: discusión colectiva, feedback inicial orientado a un estudiante hipotético y consulta posterior.

Momento 1 – discusión colectiva

En esta sesión la profesora presenta la tarea (Figura 2) en la que los futuros profesores no identificaron el error en la pregunta 1.c, aceptando que $7{,}99 < 8,\overline{9} < 9$. Los participantes piensan que la aseveración es correcta, a pesar de que conocen el algoritmo para transformarlo a fracción y sus fundamentos matemáticos. A seguir se muestran los principales elementos de la discusión:

1. Profesora: ¿Qué pasa en el caso (c)?
2. Mónica: está bien.
3. Eduardo: está bien.
4. Fernando: está correcto.
5. Mónica: los números periódicos también son Racionales.
6. Juan: igual … (es una) fracción de números enteros.
7. Fernando: (interrumpe) ahí llegamos a un tema interesante porque es lo mismo que yo diga que cero coma nueve periódico $(0,\overline{9})$ es uno (1), en cierta forma puede ser cierto con todos los métodos que hay para pasar un numero periódico a un número fraccionario.
8. Profesora: ¿Hagámoslo?
9. Fernando: Pero depende… depende mucho… es como… es como una situación… para mí

siempre va a faltar algo para que cero coma nueve periódico $(0,\overline{9})$ por ejemplo sea uno (1), o que siempre va a faltar algo para que ocho coma nueve periódico (8, $\overline{9}$) sea igual a nueve (9), siempre para mi va a ser menor, pero los métodos que hay para pasar como, por ejemplo, el tema de fracción…eso… hay métodos que dicen que es uno (1), entonces tiene como dos visiones, depende de la persona en todo caso, para mí, por ejemplo, no es uno (1) siempre va a faltar algo, pero los métodos como de demostración dicen que sí.

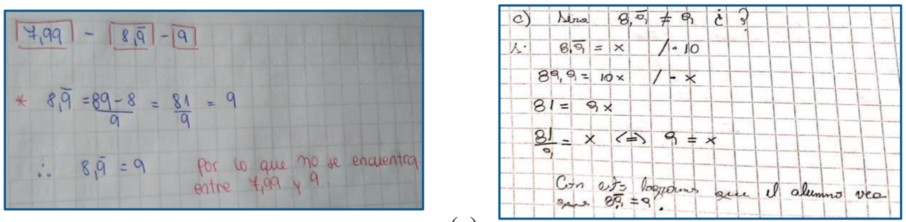
10. Profesora: ¿Alguien más piensa similar?
11. Mónica: yo también pienso lo mismo que dice el Fernando, porque (…), si dijéramos que son iguales no existirían los numero periódicos, los aproximaríamos siempre, como por algo existen, porque falta esta gotita, este invisible casi, pero existe, no lo podemos ver, pero existe.
12. Profesora: (se ríe) o sea, **la argumentación matemática no te convenció.**
13. Fernando: **no**
14. Profesora: ya, les invito ahora a que veamos y que desarrollemos matemáticamente cero punto nueve periódico $(0,\overline{9})$.
    //se plantea $(1)\ 0.\overline{9}=1$ /*10p
    // $(2)\ 9.\overline{9}=10$
    //se resta $(2)-(1)$ $9,\overline{9} - 0.\overline{9}=10 - 1$
    // $9p=9$
15. Eduardo: claro sería nueve (9) partido en nueve (9)
16. Profesora: y esto da…
17. Eduardo: uno (1)
18. Profesora: uno (1), quiero hacer una pregunta ¿lo demostré aquí?, ¿lo mostré?, ¿lo mostramos?, ¿O todavía quedan dudas?
19. Mónica: **yo sigo pensando que no es uno** (1) (se ríe)
20. Profesora: ¿sigues pensando que no es uno (1)?
21. Mónica: o más que nada es como decir que el cero coma nueve periódico $(0,\overline{9})$ no existe, es uno (1), como que no existe ese periodo.
22. María: claro es que, para qué hago el cero coma nueve periódico $(0,\overline{9})$ si es lo mismo que uno (1), ¿para que existe? No tiene sentido.
23. María: lo siento me explotó la cabeza (se ríe).

En esta discusión se percibe que a pesar de los fundamentos matemáticos vistos previamente y de conocer el método algorítmico para transformar un número periódico o semi-periódico a fracción, los futuros profesores no hacen sentido de $0,\overline{9}=1$ (línea 7, 12, 14-18). Particularmente la profesora indica a Fernando “o sea, la argumentación matemática no te convenció”, para lo que responde “no” (líneas 12-13). En el discurso Mónica comparte esta posición (“yo sigo pensando que $[0,\overline{9}]$ no es uno”, línea 19). La negación en el discurso refleja un *conflicto* en los sujetos con esa expresión matemática (Engeström y Sannino, 2011) y al ser una negación de una verdad matemática se refleja una *resistencia*, que corresponde a una contradicción (verdad matemática versus creencia). Podemos observar que el conflicto se basa en una creencia porque es una idea que no es lógica y es difícil de modificar (Philipp, 2007). Estimamos que esta creencia puede haberse originado por un vacío de conocimiento sobre la representación un número decimal periódico finalizado en nueve y su valor numérico.

Momento 2 – feedback individual

Los participantes respondieron a la pregunta B (Figura 2) entregando un feedback escrito al estudiante Carlos de acuerdo al enunciado de la tarea. Dos futuros profesores utilizaron o aludieron al método algorítmico de transformar un número decimal periódico a fracción en sus explicaciones (Figura 3.a y 3.c). Un futuro profesor fundamentó matemáticamente realizando transformaciones en la ecuación (Figura 3.b). Otros dos estudiantes entregaron un feedback muy superficial y el resto simplemente no respondieron esta parte de la tarea.

(a) (b)



(c)

Con respecto a la respuesta C, le sugiero al estudiante que la cifra que puso en recuadro lo traslade a la representación fraccionaria, de tal modo, al seguir el algoritmo se dará cuenta que $8,\overline{9}$ es 9, de tal manera se dará cuenta de su error y tendrá que corregirlo.

Figura 3. Feedback escrito

La retroalimentación que entregaron los futuros profesores muestra que el feedback estuvo basado en argumentos matemáticos, aunque otros participantes eludieron responder o fundamentar mejor esta parte de la pregunta.

Momento 3 – consulta posterior

Alrededor de dos semanas después, se realizó una consulta que se debía responder por escrito, para evaluar la evolución del aprendizaje por medio de la siguiente pregunta:

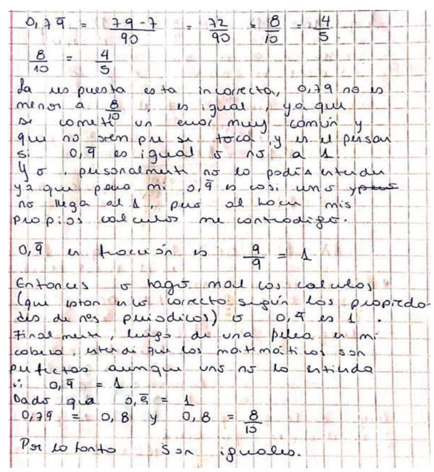
> El estudiante Pedro indica que la expresión $0{,}7\overline{9} < \frac{8}{10}$ es verdadera. El profesor Martínez indicó a Pedro que su resultado estaba correcto. Usted debe justificar o refutar ese resultado.

En esta ocasión siete de los ocho futuros profesores interpretaron correctamente el error de la situación y utilizaron elementos matemáticos en sus explicaciones. Los futuros profesores escogieron explicar sus razonamientos usando el método algorítmico, de modo similar como FP1.

> FP1: La expresión $0{,}7\overline{9}$, al representarla como una fracción tenemos lo siguiente: $0{,}7\overline{9} = \frac{79-7}{90} = \frac{72}{90}$. Al simplificar por 9 tenemos: $8/10$, de esta forma tenemos que $0{,}7\overline{9}$ es igual a $8/10$. Por lo tanto, podemos refutar la respuesta del profesor, ya que la afirmación es falsa.

Mónica explicó sus razonamientos con amplitud (Figura 4) entregando una reflexión al respecto. Ella muestra aquí que se enfrentó a una contradicción entre los procedimientos matemáticos que fundamentan $0{,}\overline{9}=1$ y una creencia en su mente de que esos dos números tienen valores diferentes. La creencia que emergió desde las discusiones de este trabajo es: **Creencia que distintos registros de representación no pueden asociarse a la misma cantidad (el caso de $0,\overline{9} < 1$)**, y se encuentra dentro del ámbito de las representaciones de los racionales. Esto probablemente porque los participantes en su periodo de formación no se vieron enfrentados a esta igualdad o no tuvieron oportunidad de discutirla, dando lugar a un vacío de conocimiento que generó esta creencia. Una explicación más concluyente al respecto es que el registro de representación en decimal parece sustentar la creencia que $0{,}\overline{9}$ y 1 son cantidades distintas. La visualización de dos representaciones diferentes les hace pensar que también son valores numéricos diferentes.

Así, la respuesta de Mónica evidencia la resolución de la resistencia, que pasó por conocer una justificación matemática, enfrentarse a producciones del estudiante sobre lo cual debía dar un feedback y tener la oportunidad de discutir ampliamente sobre ello. Finalmente, Mónica se enfrentó más tarde a una situación similar, asumiendo finalmente que “las matemáticas son perfectas” (Figura 4).



La respuesta esta incorrecta, $0{,}7\overline{9}$ no es menor a 8/10, es igual, ya que se comete un error muy común y que no siempre se toca, y es el pensar que $0,\ \overline{9}$ no es igual a 1.
Yo personalmente no lo podía entender, ya que para mí $0{,}\overline{9}$ es casi 1, no llega a 1, pero al hacer mis propios cálculos me contradigo.
$0{,}\overline{9}$ en fracción es 9/9=1.
Entonces, hago mal los cálculos o (que están en lo correcto según las propiedades de los números periódicos) o $0{,}\overline{9}$ es 1.
Finalmente, luego de una pelea em mi cabeza entendí que las matemáticas son perfectas, aunque uno no lo entienda.
Luego $0{,}\overline{9}$=1
Dado que $0{,}\overline{9}$=1
$0{,}7\overline{9}$=0,8 y 0,8 =8/10.
Por lo tanto, son iguales.

Figura 4. Respuesta final de Mónica

Conclusiones

Este estudio buscó comprender las tensiones de un grupo de futuros profesores de matemáticas para asumir la igualdad $0{,}\overline{9}=1$. Si bien ya se han identificado dificultades en torno a esa igualdad tanto en estudiantes de educación media (Beltrán, 2013) como universitarios (Rittaud y Vivier, 2013), en este estudio esa situación aparece en la formación inicial de profesores de matemáticas. Tras el análisis de las discusiones, la situación de tensión fue caracterizada como un *conflicto resistente*, en base a la negación de futuros profesores para aceptar esa igualdad, relegando fundamentos matemáticos con respecto a sus creencias. Así, se muestra una contradicción entre fundamentos matemáticos que evidencian el valor de $0{,}\overline{9}$ como 1 y la creencia de que no puede haber dos representaciones diferentes para un mismo valor numérico en ese caso. De modo específico, la creencia se estaría sustentado en la diferente representación numérica que hace pensar que se trata de dos cantidades diferentes. Como las experiencias educativas previas moldan las creencias de los futuros profesores respecto de la matemática, su enseñanza y de su aprendizaje (Di Martino et al., 2017; Liljedahl y Oesterle, 2014), es esencial que esta discusión se establezca en contextos de desarrollo del conocimiento especializado para que las creencias no desencadenen eventos críticos en el ejercicio docente.

Segundo, la creencia apareció por medio de una tarea especializada que planteó una situación práctica de la docencia y que se implementó considerando el diálogo y la interacción en la clase. La tarea matemática y su discusión actuaron como medio para resolver las tensiones y para desarrollar el conocimiento de los futuros profesores. Este estudio confirma que las creencias intervienen en el conocimiento matemático (Ribeiro y Carrillo, 2011), que ellas no son lógicas y que son difíciles de remover (Philipp, 2007).

Agradecimientos

El presente trabajo forma parte del proyecto de investigación financiado por el CNPq “Desarrollo del Conocimiento Interpretativo y Especializado del profesor y sus relaciones con las Tareas para la Formación en el ámbito de la Medida y del Pensamiento Algebraico, Geométrico y Estadístico” (404959/2021-0); y fue apoyado por la Junta de Andalucía (España) (Referencia ProyExcel_00297) y por el proyecto Convenio Marco FID UVA1756-1753 (Chile).

Referencias

Beltrán, Y. (2013). *Competencias en los números decimales periódicos* [Tesis de máster, Universitat de Valencia]. *https://roderic.uv.es/items/b952c1f2-9a39-4815-aec6-2005112cd9a8*

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E. F., y Montes, M. (2014). *Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas.* Universidad de Huelva Publicaciones. https://doi.org/10.13140/2.1.3107.4246

Di Martino, P., Mellone, M., Minichini, C., y Ribeiro, M. (2017). *Prospective teachers' interpretative knowledge: giving sense to subtraction algorithms*. En S. Zehetmeier, M. Ribeiro, B. Roesken-Winter y B.Potari (Eds.), *Proceedings ERME topic conference Mathematics teaching, resources and teacher professional development* (pp. 65-75). ERME

Galleguillos, J. y Ribeiro, M. (2021). El conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas sobre números periódicos. En J. G. Moriel-Júnior (Ed.), *Anais de V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del profesor de Matemáticas.* (pp. 74-81). Congresseme.

Liljedahl, P., y Oesterle, S. (2014). Teacher Beliefs, Attitudes, and Self-Efficacy in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 583-586). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_149

Obersteiner, A., Reiss, K., Van Dooren, W. y Van Hoof, J. (2019). Understanding Rational Numbers – Obstacles for Learners With and Without Mathematical Learning Difficulties. En A. Fritz, V. G. Haase, y P. Räsänen (Eds.), *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties* (pp. 581-594). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3_34

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F. K. Jr. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning.* (pp. 257-315). Information Age Pub.

Ribeiro, M. (2020). Discutindo o conhecimento especializado do formador de professores de e que ensinam matemática—Um exemplo focando tarefas para a formação. En A. Traldi, D. S. Tinti y R. M. Ribeiro (Eds.), *Formaçao de professores que ensinam matemática: Processos, desafios e articulações com a educação básica* (pp. 241-261). SBEM-SP.

Ribeiro, C. M. y Carrillo, J. (2011). The role of beliefs and knowledge in practice. En B. Roesken y M.Casper (Eds.), *Current state of research on mathematical beliefs XVII – MAVI 17* (pp. 192-201). Ruhr-Universität Bochum.

Rittaud, B., y Vivier, L. (2013). Different Praxeologies for rational numbers in decimal system—The 0,999... Case. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of VIII Congress of the European Society for Research in Matematics Education (CERME 8)* (pp. 363-372). Middle East Technical University.

Stafylidou, S. y Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*(5), 503-518. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.015

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-011-3168-1

Voss, T., Kleickmann, T., Kunter, M. y Hachfeld, A. (2013). Mathematics Teachers' Beliefs. En M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss y M. Neubrand (Eds.), *Cognitive Activation in the Mathematics Classroom and Professional Competence of Teachers* (pp. 249-271). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5149-5_12

TRANSFORMACIÓN DE CONOCIMIENTO MEDIANTE UN CICLO REFLEXIVO ALACT, EL CASO DE UN PROFESOR CHILENO

Transformation of Knowledge trough an ALACT reflective cycle, the case of a chilean teacher

González-Arriagada, J.[a], Olfos, R.[a], Sánchez-Acevedo,N.[b], Montes, M.[c]

[a] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
[b] Universidad Central, Chile
[c] Universidad de Huelva, España

Temática: 1 – MTSK en la formación docente

Resumen.
La presente comunicación muestra los resultados de un estudio de casos realizado con un profesor chileno, en el cual se busca evidenciar transformaciones en el conocimiento movilizado por este antes, durante y luego de un ciclo reflexivo estructurado, en el ámbito de la enseñanza de la función cuadrática. Los análisis del conocimiento movilizado se hicieron a la luz del modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), mientras que la estructura del ciclo reflexivo se tomó del modelo ALACT Action, Looking back on the action, Awareness of essential aspects, Creating alternative mehods of action y Trial. Los resultados indican que el profesor experimentó un cambio significativo en el conocimiento movilizado antes ($MTSK_0$), y durante/después ($MTSK_1$) del ciclo, si se toma en cuenta los ciento veinticuatro indicadores elaborados para analizar el MTSK en cada momento.

Palabras clave. MTSK, Transformación, Reflexión, Ciclo ALACT.

Abstract.
The present communication shows the results of a case study carried out with a Chilean teacher, which seeks to demonstrate transformations in the knowledge mobilized by him before, during and after a structured reflective cycle, in the field of teaching the quadratic function. The analyzes of the mobilized knowledge were made in terms of the MTSK model, while the structure of the reflective cycle was taken from the ALACT model. The results indicate that the teacher experienced a significant change in the knowledge mobilized before ($MTSK_0$), and during/after ($MTSK_1$), of the cycle, if one takes into account the one hundred and twenty-four indicators developed to analyze the MTSK in each moment.

Keywords. Transformation, Reflection, ALACT Cycle.

González-Arriagada, J., Olfos, R., Sánchez-Acevedo,N., y Montes, M. (2023). Transformación de conocimiento mediante un ciclo reflexivo ALACT, el caso de un profesor chileno. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.144-152). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

El desarrollo profesional del profesor de matemática se considera uno de los focos de la investigación actual en educación matemática (Artigue, 2020). En las últimas décadas, se ha puesto la mirada en el proceso en que los docentes asumen un papel protagónico, evolucionando a partir de aprendizajes nuevos y sucesos personales (Ponte y Chapman, 2008; Shulman, 1986). Dos conceptos clave para este desarrollo son el conocimiento y la reflexión (Ramos-Rodríguez y Reyes-Santander, 2017); mientras el conocimiento aporta elementos teóricos y prácticos para una enseñanza efectiva (Ball y Bass, 2000), la reflexión sistemática influye en las decisiones de los docentes (Korthagen, 2001).

La literatura actual sugiere que el conocimiento y la reflexión del profesor de matemática están relacionados. Por ejemplo, Montes y Carrillo (2017), señalan que el profesor de matemática precisa de un conocimiento especializado, que le permite reflexionar. Korthagen (2010), explica que la reflexión aumenta el conocimiento a medida que ocurre. Thwaites et al. (2005) puntualizan que el conocimiento alimenta la reflexión y la desarrolla, mientras se desarrolla a sí mismo. Parada et al. (2009) explican que en la reflexión interactúan didácticamente profesor y conocimiento.

Sin embargo, hay oportunidades de profundización en el estudio de las relaciones entre el conocimiento y la reflexión. ¿Qué características tienen estas relaciones? En la siguiente comunicación se explora un tipo de relación entre estos conceptos: las transformaciones que sufre el conocimiento de un docente a través de un proceso reflexivo en el área de la enseñanza de la función cuadrática (FC).

Conocimiento transformado durante el ciclo reflexivo, el caso de Manuel

En esta comunicación se presenta el caso de Manuel, un profesor chileno con cinco años de experiencia que atiende a estudiantes de entre 14 y 18 años. Se analizó la transformación en el conocimiento evidenciado por parte de este profesor antes y durante/después de un ciclo reflexivo que incluye la identificación de un problema a resolver, una propuesta de mejora y una aplicación de la propuesta para su posterior análisis. Por esto se eligió dos modelos teóricos: MTSK para Conocimiento y ALACT para Reflexión.

El modelo de conocimiento especializado del profesor de matemática

El Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), es un modelo analítico del conocimiento del profesor, disponible en la literatura científica e investigaciones educativas (Zakaryan y Ribeiro, 2016), que divide el conocimiento del profesor de matemática en dos dimensiones generales: Conocimiento Matemático (MK) y Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). Estas dimensiones relacionan el conocimiento de la matemática que el profesor debe enseñar con las técnicas, recursos y creencias acerca de su enseñanza. Ambas dimensiones se dividen en tres subdimensiones, las cuales abordan elementos más específicos (Fig. 1):

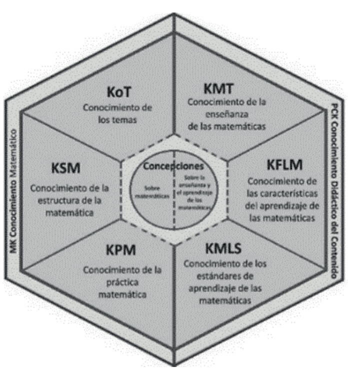


Figura 1: Las seis subdimensiones del modelo MTSK (Muñoz-Catalán et al., 2015)

En los estudios con el modelo de MTSK, se analiza el conocimiento de uno o más profesores sobre un objeto matemático específico, a enseñarse en un nivel dado. Como resultado se tiene una especie de fotografía del conocimiento evidenciado, con valor para la investigación misma o para la elaboración de propuestas de mejora.

Transformación del conocimiento según MTSK

Para estudiar la transformación del conocimiento experimentada por el profesor en el ciclo reflexivo, se debe tomar postura sobre el significado de "transformación del conocimiento" en MTSK. Valenzuela-Molina et al. (2021) proponen que, para evidenciar una transformación de conocimiento, se recomienda tareas que evidencien un conocimiento inicial, que se modifica conscientemente, y transforma luego de discusiones y retroalimentaciones en un escenario formativo dado (Fig. 2):

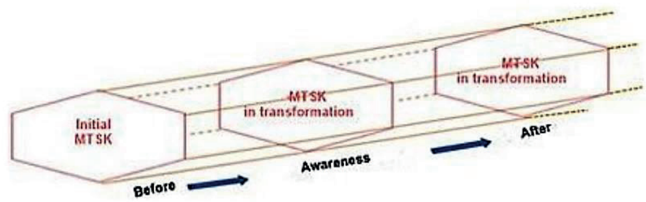


Figura 2: Transformación del conocimiento (Valenzuela-Molina et al., 2021)

Ciclo alact de reflexión

Korthagen (2001) propone un modelo de proceso reflexivo de cinco fases: (1) Action, (2) Looking back on the action, (3) Awareness of essential aspects, (4) Creating alternative mehods of action y (5) Trial. Dadas sus iniciales, recibe el nombre de ALACT (Fig. 3):

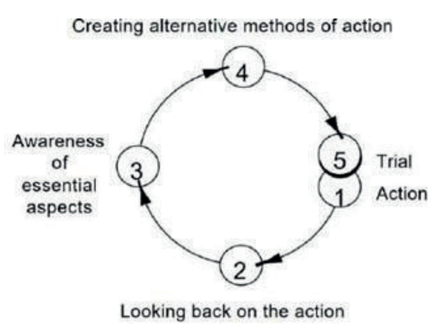


Figura 3: El modelo ALACT para describir el proceso ideal de reflexión (Korthagen, 2001)

Cada fase del ciclo ALACT tiene requerimientos concretos (Korthagen, 2001):

Action: En esta fase el docente actúa e identifica un episodio. El episodio es la unidad de análisis para el docente, y puede ser una situación de comportamiento negativo o positivo inesperado o una observación general. Este evento es identificado y descrito por el docente con diferentes niveles de profundidad.

Looking Back on the Action: En esta fase, el profesor reflexiona sobre su pensamiento, sentimiento, deseo y actuación (y los mismos aspectos en sus alumnos). Esta fase involucra, entre otras cosas, las creencias de los docentes (Korthagen y Vasalos, 2005).

Awareness of essential aspects: En esta fase el profesor agrega a su reflexión elementos teóricos, provistos por un mentor o por literatura, y determina las causas esenciales del episodio reflexionado. En esta fase el conocimiento sobre la disciplina y su enseñanza juega un papel fundamental (Korthagen y Vasalos, 2005), dado que el docente requerirá un nivel profundo de conciencia sobre la realidad que lo rodea.

Creating alternative methods of action: En esta fase, el profesor hará uso del conocimiento teórico y de las conclusiones obtenidas durante todo el proceso, para intervenir la nueva acción creando métodos alternativos para ella.

Trial: En esta fase, el profesor enfrenta una situación similar a la problemática, aplicando los métodos alternativos de acción elaborados en la fase anterior. Considerar los nuevos elementos teóricos y conclusiones, a menudo, genera que cada ensayo sea más exitoso.

Metodología

Para este estudio sobre la transformación del conocimiento del profesor Manuel, se analizó dicho conocimiento en dos momentos: antes y durante/después del ciclo reflexivo. El conocimiento evidenciado antes del ciclo reflexivo fue denominado $MTSK_0$, mientras que el que se evidenció durante el proceso de luego de él se denominó $MTSK_1$. La recolección de datos para cada uno se realizó con instrumentos diferentes, siendo el primero un cuestionario y el segundo un conjunto de entrevistas, planificaciones, grabaciones de clase y diarios de reflexión (Fig. 4).

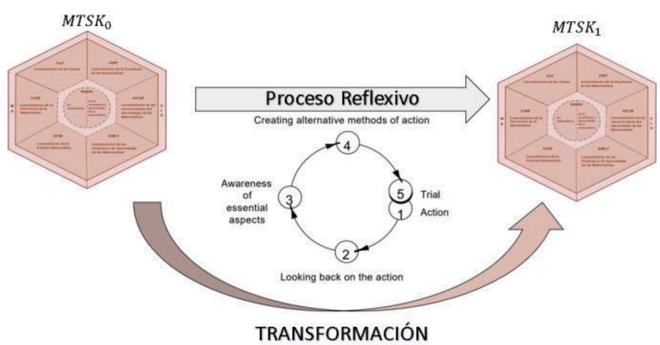


Figura 4: Diagrama de la transformación de $MTSK_0$ a $MTSK_1$ mediante el ciclo ALACT

Para asegurar que las comparaciones entre $MTSK_0$ y $MTSK_1$ tuvieran sentido, se elaboró una lista de indicadores para cada categoría de cada subdimensión. El total de 124 indicadores se confeccionó a la luz de una revisión bibliográfica que contó con investigaciones de vanguardia en el modelo MTSK (e.g. Escudero-Ávila et al., 2017; Rojas-Seals y Espinoza-Vásquez, 2021).

Grados de Evidencia de Conocimiento

En línea con lo anterior, y con fin de hacer una comparación entre los conocimientos evidenciados en ambos momentos indicador a indicador, se elaboró junto a miembros del grupo MTSK, una escala de Grados de Evidencia de conocimiento movilizado. Esto es, una categorización de qué tan claro es que un profesor moviliza el conocimiento relacionado a un indicador dado, en los análisis $MTSK_0$ y $MTSK_1$. Estos grados son:

No Observado: Este grado se asume cuando la información aportada por el informante no aporta nada relacionado al indicador en análisis.

Indicio: información puntual aportada por el informante que, tras su análisis usando el modelo MTSK, por su escasez, falta de claridad, o cantidad de elementos implícitos, requiere de más información confirmatoria para dar seguridad al investigador de la movilización de cierto conocimiento.

Evidencia: información o conjunto de informaciones aportadas por el informante que, tras su análisis mediante el modelo MTSK, permite al investigador afirmar con seguridad que el profesor moviliza determinado elemento de conocimiento.

Sobresaturación: información o conjunto de informaciones que, tras analizarse con MTSK, no sólo permiten afirmar la movilización de conocimiento por parte del profesor, también que los siguientes extractos no aporten “nada nuevo”.

Sobre la obtención del Episodio de Reflexión

Para la selección del episodio de análisis, se realizó una videograbación de la clase del profesor, planificada anteriormente de acuerdo con sus intereses profesionales. Esto es porque según Kothagen y Vasalos (2005), para que la reflexión sea más efectiva, las preocupaciones que la hacen emerger deben ser propias del docente. Como al profesor le interesaba la enseñanza del comportamiento de parábola asociada a la función cuadrática en el plano, su clase trató sobre la comparación entre distintas curvas, la identificación de la parábola asociada a la función y la construcción de la gráfica mediante la evaluación en tablas. Luego, el profesor vio el video y junto al investigador seleccionó el episodio.

Resultados

A continuación, se abordan los resultados del análisis de conocimiento movilizado por el profesor antes, durante y luego del ciclo reflexivo. Dado que la cantidad de indicadores utilizados para examinar la transformación del conocimiento entre $MTSK_0$ y $MTSK_1$ hace que el análisis exceda esta comunicación, se ha seleccionado un indicador representativo de lo ocurrido en general. Este pertenece a la subdimensión KSM, y es el siguiente.

KSM24-Categoría de Conexiones Auxiliares-La variación

Este indicador tiene que ver con la variación en el contexto de la función cuadrática. Considera que el profesor conozca la importancia de la variación de la FC para el aprendizaje de funciones donde la variación no es fija. Un profesor que evidencia conocimiento según este indicador declara que la función cuadrática es la primera función con variación no fija en la enseñanza, y que su comportamiento debe revisarse en el aula.

$MTSK_0$

A partir del discurso del profesor al responder el cuestionario y las posteriores entrevistas de profundización, se obtuvo el siguiente grado de evidencia para KSM24 en el $MTSK_0$:
Grado de evidencia de KSM24 en $MTSK_0$: Indicio.

En su respuesta del cuestionario y en la entrevista posterior, el profesor muestra solo indicios de movilizar el conocimiento relacionado a este indicador. Durante la discusión sobre la pregunta 6, donde se solicita determinar la forma del corral de mayor área cercado con una malla de alambre de 80m, el profesor señaló:

“Creo que este problema es importante, porque la función que se forma tiene un comportamiento especial, ya que llega a un máximo cuando la figura es regular y después baja. Creo que es 20, cuando es cuadrado. Es importante porque no tiene forma lineal.”

Como se observa, el grado es indicio. La información dada por el profesor no permite confirmar completamente que moviliza el conocimiento relativo al indicador, dado que propone que la curva tiene una variación diferente a la de la función lineal, pero no explica cómo es y por qué es importante para la enseñanza.

El gráfico de la fig. 5 resume los resultados del análisis MTSK$_0$, con los 124 indicadores:

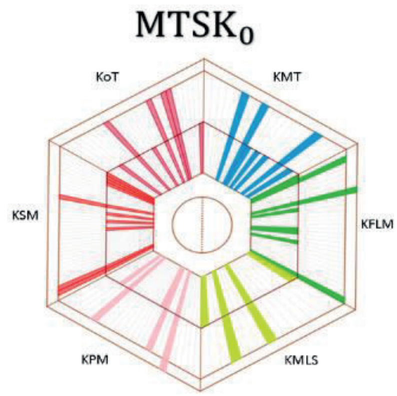


Figura 5: Análisis MTSK$_0$ del conocimiento del profesor Manuel.

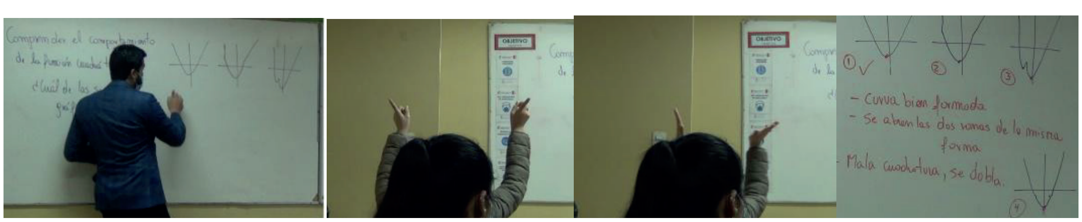
Obsérvese que las subdimensiones de MTSK fueron divididas en franjas, una por cada indicador, que se colorean si estos arrojan un grado de evidencia superior a “no observado”. La extensión del color en la franja ilustra el grado de evidencia: si es “indicio”, el color alcanza el primer hexágono (al medio), si es “evidencia” alcanza el segundo (casi al borde), y si es “sobresaturación” llega al hexágono exterior. En particular, KSM24 arrojó un grado de “indicio”, y su color rojo llega al primer hexágono.

El episodio reflexionado

A continuación, se relata muy someramente el episodio de reflexión, ocurrido en la clase. Dicho episodio se analizará con mucho mayor detalle al presentar esta comunicación:

El profesor Manuel presentó varias curvas en la pizarra, para producir una discusión acerca de cómo varían las funciones cuadráticas particularmente (Fig.6). Solicitó a los estudiantes señalar la gráfica que representaba una función cuadrática y una estudiante explicó que la que estaba al centro no podría serlo, dado que no conservaba un comportamiento simétrico (Fig.7 e Fig.8). Entonces, el profesor quiso aprovechar la oportunidad para abordar la “suavidad de la curva”, dado que, según señaló, la simetría no es el único elemento diferenciador de la función cuadrática (Fig. 9).

Presentó entonces una curva que era simétrica pero no era función, y los estudiantes pensaron que esta curva sí representaba una función cuadrática. El profesor no consiguió que los ellos diferenciaran este caso del correcto, por lo que optó por avanzar en la clase.



Figuras 6,7,8 y 9: Momentos del episodio de reflexión seleccionado por Manuel.

$MTSK_1$

A partir del discurso del profesor durante el proceso reflexivo, sus conclusiones, su planificación nueva y la clase realizada, se evidenció un MTSK bastante diferente. Para que en esta comunicación se pueda realizar una comparación, se ejemplifica con el mismo indicador presentado en $MTSK_0$, el KSM24.

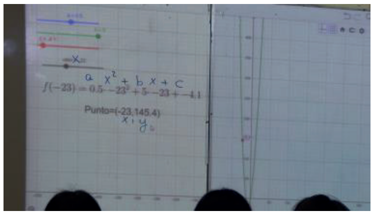
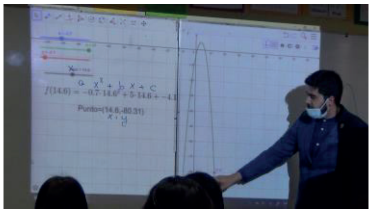
Grado de evidencia de KSM24 en $MTSK_1$: Evidencia.

En uno de los fragmentos del diario de reflexión, que involucraba la nueva planificación, el profesor presentó lo siguiente:

“En mi nueva planificación quiero agregar una simulación donde un punto se mueva en la parábola, para que los chiquillos se den cuenta de que la curva no tiene sobresaltos como la que mostré en la clase anterior. El punto se va a mover y va a ir cambiando su coordenada. Además, así pueden ver mejor esta variación que tiene la función, que va cambiando cada vez.”

En este fragmento se pueden observar evidencias de que el profesor moviliza el conocimiento relativo al indicador KSM24: La Variación, dado que el profesor declara que la variación de la función cuadrática asociada a la situación de aprendizaje que propone “va cambiando” cada vez.

Por otro lado, cuando el profesor realizó una clase nueva, puso en práctica estas nuevas ideas, tal como se aprecia en las figuras 10 y 11:

Figuras 10 y 11: Clase 2, el profesor muestra la simulación de un punto móvil en la parábola.

El gráfico de la figura 12 muestra el análisis $MTSK_1$ al completo, incluyendo los 124 indicadores. En particular, el nivel de evidencia de conocimiento movilizado por el profesor respecto del indicador KSM24 es de “Evidencia”, hecho representado en que el color rojo de su franja alcanza el segundo hexágono:

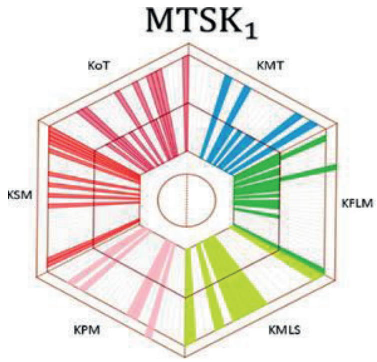


Figura 12: Análisis $MTSK_1$ del conocimiento del profesor Manuel.

Conclusiones

La comunicación presentada muestra solo una parte de los resultados de este proceso investigativo, en el cual se analizó las transformaciones del conocimiento de un profesor chileno a partir de un ciclo reflexivo en el ámbito de la enseñanza de la función cuadrática. En particular, ejemplifica la transformación del conocimiento evidenciado por el profesor Manuel respecto de un indicador de los ciento veinticuatro confeccionados.

Sin embargo, y tal como se puede observar en los gráficos sintéticos de los análisis $MTSK_0$ y $MTSK_1$, el profesor presentó transformaciones, en el sentido de Valenzuela-Molina et al. (2021), respecto de muchos indicadores pertenecientes a categorías y subdimensiones variadas del MTSK. Dados los resultados, se puede concluir que las distintas subdimensiones son afectadas por el ciclo reflexivo, y esto se evidencia en el discurso del docente, en sus planificaciones y en sus acciones en el aula misma.

Todo esto sugiere que un proceso reflexivo respecto a un contenido (y su enseñanza) puede producir efectos de transformación en el conocimiento de los profesores de matemática. Se espera alcanzar conclusiones más generales a medida que se realicen nuevos estudios de caso, pero los resultados aquí mostrados son un indicativo de que existen relaciones entre el conocimiento y la reflexión de los profesores de matemática en al menos una dirección, en la cual la reflexión transforma al conocimiento.

Referencias

Artigue, M. (2020). El desarrollo de la didáctica de las matemáticas, una mirada internacional. *Revista Chilena de Educación Matemática, 12*(3), 83-95.

Ball, D. L., y Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics, 4*(1), 83-104.

Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., y Carrillo, J. (2017). Describing a secondary mathematics teacher’s specialised knowledge of functions. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3280-3287). DCU Institute of Education and ERME.

Korthagen, F. A. (2001). *Linking practice and theory: The pedagogy of realistic teacher education.* Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Korthagen, F., y Vasalos, A. (2005). Levels in reflection: Core reflection as a means to enhance professional development. *Teachers and Teaching: Theory and Practice, 11*(1), 47-71.

Korthagen, F. A. (2010). Situated learning theory and the pedagogy of teacher education: Towards an integrative view of teacher behavior and teacher learning. *Teaching and teacher education, 26*(1), 98-106.

Montes, M., y Carrillo, J. (2017). Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del infinito. *Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 114-134.

Muñoz Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. Á., y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 18*(3), 1801-1817.

Parada, S. E., Figueras, O., y Pluvinage, F. (2009). Hacia un modelo de reflexión de la práctica profesional del profesor de matemáticas. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 355-366). SEIEM.

Ponte, J.P., y Chapman, O. (2008). Preservice Mathematics Teacher's Knowledge and development. En L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 225-236). Routledge.

Ramos-Rodríguez, E., y Reyes-Santander, P. (2017). Favoreciendo la reflexión del docente: un Estudio de Clases sobre cálculo integral usando tecnología. *Revista electrónica interuniversitaria de formación del profesorado, 20*(1), 67-85.

Rojas-Seals, V., y Espinoza-Vásquez, G. (2021). El KoT del profesor acerca de función cuadrática: diseño de un cuestionario para investigación. En J. G. Moriel-Júnior (Ed.), *Anais de V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del profesor de Matemáticas* (pp. 231-238). Congresseme.

Thwaites, A., Huckstep, P. y Rowland, T. (2005). The knowledge quartet: Sonia's reflections. En D. Hewitt y A. Noyes (Eds.), *Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education* (pp. 168-175). British Society for Research into Learning Mathematics.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Valenzuela-Molina, M., Ramos-Rodríguez, E., y Flores, P. (2021). Transformation of the Specialized Knowledge of Future Primary Teachers on Fraction Division. *Acta Scientiae, 23*(3), 218-240.

Zakaryan, D., y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento de la enseñanza de números racionales: una ejemplificación de relaciones. *Zetetike, 24*(3), 301-321.

TRANSFORMACIÓN DEL CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS (KOT) DE PROFESORES SOBRE LÍMITE DE SUCESIONES

Transformation of knowledge of topics (KoT) of teachers on limit of sequences

Bustos-Tiemann, C.[a], Ramos-Rodríguez, E.[a], Valenzuela-Molina, M.[b]

[a] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
[b] Universidad Alberto Hurtado, Chile

Temática: 1 – Aplicación del MTSK en la formación docente

Resumen.
Diversas investigaciones dan cuenta de la complejidad en la enseñanza y aprendizaje del concepto de límite de sucesiones. Desde el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemática se lleva a cabo un estudio cualitativo cuyo objetivo fue indagar en la transformación de conocimiento de los temas que manifiesta un profesor sobre límite de sucesiones. El estudio es realizado en el contexto de un programa de desarrollo profesional respecto de la enseñanza del Cálculo en donde se aplicó un cuestionario inicial y uno final, y se grabaron las sesiones del perfeccionamiento. El caso corresponde a un docente de enseñanza secundaria con dos años de ejercicio. Los resultados dan cuenta de cambios conscientes sobre la definición de límite de sucesiones surgidos a través de la reflexión sobre los esquemas y perspectivas de significado, lo que implicaría Transformación de Conocimiento sobre este tema.

Palabras clave. MTSK, Didáctica, Matemáticas, Secundaria.

Abstract.
Several researches show the complexity of the teaching and learning of the concept of limit of sequences. From the model of specialized knowledge of the mathematics teacher, a qualitative study is carried out with the objective of investigating the transformation of knowledge of the topics that a teacher manifests on the limit of sequences. The study is carried out in the context of a professional development program regarding the teaching of Calculus, where an initial and a final questionnaire were applied, and the improvement sessions were recorded. The case corresponds to a secondary school teacher with two years of practice. The results show conscious changes on the definition of the limit of sequences arising through reflection on the schemes and perspectives of meaning, which would imply Transformation of Knowledge on this topic.

Keywords. MTSK, Didactics, Mathematics, Secondary.

Bustos-Tiemann, C., Ramos-Rodríguez, E. y Valenzuela-Molina, M. (2023). Transformación del conocimiento de los temas (KoT) de profesores sobre límite de sucesiones. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.153-161). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

El escenario curricular en Chile con la propuesta del programa de profundización “Límites, Derivadas e Integrales” (Ministerio de Educación de Chile, MINEDUC, 2021) para enseñanza secundaria (jóvenes entre 16 y 18 años) se hace apropiado y oportuno para estudiar el conocimiento que manifiestan docentes de matemática en la enseñanza de estos temas, pues deben retomar objetos matemáticos que tradicionalmente se trataban en la enseñanza universitaria (Bustos y Ramos, 2021).

En cuanto a la enseñanza del concepto de límite de sucesiones este cambio curricular plantea comenzar con una aproximación intuitiva, con abundancia de ejemplos y situaciones concretas, para posteriormente llegar a una formalización de las nociones que se utilizan. Sin embargo, diversos estudios dan cuenta de que la enseñanza de este concepto no es fácil y si se quiere ir más allá de los procedimientos y algoritmos comunes para estimar el valor de un límite, las dificultades no son solo para los estudiantes sino también para los profesores si no han comprendido cabalmente dicho concepto (Irazoqui y Medina, 2013). En este sentido, destacamos el estudio fenomenológico realizado por Claros et al. (2016) que señala que actualmente prevalece, en la enseñanza secundaria, la introducción intuitiva del concepto de límite en desmedro de su desarrollo formal lo que puede llevar a una comprensión incompleta del concepto por parte de los alumnos.

Por otro lado, hemos considerado para este trabajo el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK, por sus siglas en inglés), desarrollado por Carrillo et al. (2013) en la Universidad de Huelva. En los últimos años, desde el modelo MTSK, investigadores han revelado la necesidad de estudiar la transformación del conocimiento con miras de entender procesos formativos con mayor profundidad (Bustos y Ramos, 2022; Valenzuela-Molina et al., 2012). El objetivo de este estudio fue indagar en la transformación del conocimiento (TC) de los temas (KoT) que manifiesta un profesor sobre límite de sucesiones.

Marco de referencia

Se consideró el modelo MTSK, en particular el subdominio KoT en la categoría definiciones, propiedades y sus fundamentos, centrándose principalmente en el aspecto de las definiciones, dado el objetivo del estudio. Por conocimiento de definiciones se entiende el conocimiento del profesorado sobre definiciones parciales, alternativas y diferentes formas en que un objeto matemático puede ser explicitado, ya sea de manera oral, escrita, lenguaje natural o lenguaje matemático. A continuación, se detallan las diversas definiciones de límite de sucesiones, identificadas con un código Di (i de 1 a 9).
Además, debido a que las definiciones están asociadas a diferentes concepciones del infinito, hemos separado aquellas que se apoyan en las nociones de infinito actual y potencial (Hitt, 2013). Las primeras son aquellas que ven el proceso infinito como terminado (Figura 1), las segundas como inacabado (Figura 2). Comprender las diferencias entre ambos infinitos puede ayudar en la enseñanza de límite de sucesión (Hitt, 2013).

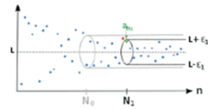
Definición	Descripción	Ejemplo
(D1) La notación formal ε- N (infinito actual)	Definición formal límite finito: $\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, tal\ que\ si\ n > \mathrm{N}$ se tiene $\lvert a_n - L\rvert < \varepsilon$ Si el límite existe ($L \in \mathbb{R}$), entonces es único	$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, tal\ que\ si\ n > \mathrm{N}$ se tiene $\left\lvert \frac{1}{n} - 0 \right\rvert < \varepsilon$ Lo cual es la definición de límite y la prueba matemática de: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
(D2) Noción de límite en lenguaje natural (infinito actual)	Por medio del lenguaje natural es posible llegar a la definición, esto es, "para cada intervalo épsilon alrededor del límite, tan pequeño como sea, siempre quedan finitos elementos fuera de ello y todos los demás infinitos elementos de la sucesión están adentro del intervalo épsilon" (MINEDUC, 2021, p. 88)	(MINEDUC, 2021, p. 82)  Se considera un "intervalo ε" alrededor del límite 0 "$[0-\varepsilon, 0+\varepsilon]$" y se elige un valor de $\varepsilon = 0{,}0000000005$. ¿A partir de qué número n_0 todos los términos a_n están dentro de $[0-\varepsilon, 0+\varepsilon]$?
(D3) Aproximación conceptual a través del uso de vecindades (infinito actual)	Es posible obtener la definición de límite a través del concepto de vecindad, es decir, sea $L \in \mathbb{R}$ y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, diremos que a_n tiene límite L cuando n tiende a infinito si se tiene que, para cualquier vecindad de L, que se tome siempre quedará sólo una cantidad finita de términos de la sucesión fuera de la vecindad (y por lo tanto todos los otros infinitos términos quedan adentro).	 (Adaptado de MINEDUC, 2021, p. 81)
(D4) Aproximación conceptual a través de la propiedad Arquimediana (infinito actual)	La Propiedad Arquimediana también permite llegar a la definición de límite, pues la propiedad dice: Todo número real puede ser sobrepasado por un número natural, es decir: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}\ tal\ que\ N > x$ Versión equivalente: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, tal\ que\ si\ \frac{1}{n} < \varepsilon$	$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$ Además para cualquier $n \in \mathbb{N}, n > N$ Se tiene: $\frac{1}{n} < \frac{1}{N}$ Luego: $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \Longrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$ Lo que implica que: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Figura 1. Subcategoría definiciones del KoT en relación al límite de sucesiones – infinito actual (Fuente: Elaboración propia)

Respecto del infinito potencial, destacamos la propuesta de (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2021) que propone el reconocimiento de patrones infinitos y que los estudiantes estimen su valor de forma intuitiva y visual. Para ello, se sugiere la representación del límite de sucesiones en contextos geométricos y de argumentación, utilizando lenguaje simbólico, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura. Por otro lado, se propone que los estudiantes justifiquen sobre las posibilidades de acercarse al límite de una serie por medio del estudio de paradojas, como la de Zenón. Se sugiere, además el uso de herramientas tecnológicas digitales y el cálculo de áreas mediante la noción de límites de sucesiones. Lo anterior corresponde principalmente a las aproximaciones intuitivas y a considerar el límite como tendencia o aproximación (Figura 2).

(D5) Aproximación intuitiva a través de la divisibilidad infinita (infinito potencial)	Es posible llegar a la definición por medio de la divisibilidad infinita como el proceso mediante el cual se divide una y otra vez una distancia o una cantidad determinada.	La paradoja de Zenón (MINEDUC, 2021, p. 75) 1. Se considera las siguientes condiciones de la carrera: – La tortuga parte con 100m de adelanto. – La tortuga y Aquiles parten de sus posiciones en el mismo instante. – Si Aquiles llega al punto de partida de la tortuga, ella ya avanzó $^1/_{10}$ del recorrido de Aquiles. Por ejemplo: si Aquiles avanza por 10m, la tortuga ya avanzó otra vez $^1/_{10}$ del último recorrido de Aquiles. – Este proceso se repite iterada e infinitamente.
(D6) El paso al límite como una tendencia (infinito potencial)	Se puede llegar a la definición a través de considerar el límite como una tendencia, es decir, si consideremos k términos ordenados de una sucesión, generalmente consecutivos, $(1, a_1), (2, a_2), \ldots, (k, a_k)$, vamos a caracterizar la aproximación simple intuitiva como el fenómeno observado al inspeccionar la secuencia de valores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ cuando "parecen acercarse" (tendencia) a otro valor fijo (Claros et al., 2016).	Es posible observar que en la sucesión $\{0{,}6; 0{,}66; \ldots; 0{,}66\ldots6\ldots; \ldots\}$ (notación informal) sus términos se aproximan cada vez más al número racional $\frac{2}{3}$. Se suele decir que los términos de cada sucesión tienden o se aproximan al número $\frac{2}{3}$.
(D7) Aproximación intuitiva a través de la propiedad de autosimilitud (infinito potencial)	Se puede llegar a la definición de límite por medio de la autosimilitud, es decir, cuando en una figura geométrica observamos una de sus partes con lupa y reconocemos la forma de toda la figura de nuevo. Los fractales poseen esta propiedad.	Modificar un trazo de longitud 1 utilizando la siguiente regla de iteración: dividir el segmento en tres trazos de igual medida; reemplazar el del medio por dos segmentos de esa misma medida cuyos extremos libres coinciden, como lo indica el dibujo que sigue:  Realice este proceso de iteración tres veces a partir de un segmento dado. Si el trazo original mide 1, ¿cuánto mide la longitud de la figura en la segunda iteración?, ¿cuánto en la tercera?, ¿cuánto en la décima? (MINEDUC, 2018, p. 16)
(D8) Aproximación intuitiva a través del método de exhaución (infinito potencial)	Es posible llegar a la definición por medio del método de exhaución que es el procedimiento geométrico ideado por los griegos mediante el cual podemos aproximarnos al perímetro o al área de figuras curvas, aumentado la precisión de la aproximación conforme avanzamos en el cálculo. Este método conllevó a la definición rigurosa de límite en el siglo XIX	Sea n el número de lados del polígono dibujado en el círculo unitario, y hagamos que n vayan creciendo. Cuando n sea infinito, obtedremos el valor exacto del número π. Decimos que π es el valor del límite al cual tiende el área del polígono inscrito en el círculo unitario.  https://www.aprendematematicas.org.mx/unit/limites/
(D9) Aproximación por medio de tablas de valores o valoración (infinito potencial)	La aproximación por medio de tablas de valores también permite llegar a la definición de límite, esto es, dando valores cada vez más grandes a n se obtiene para a_n valores que se aproximan a un valor	Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{2n}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ entonces: n | a_n 1 | 1 10 | 1,81… 10.000 | 1,999… 1.000.000 | 1,99999… … | …

Figura 2. Subcategoría definiciones del KoT en relación al límite de sucesiones – infinito potencial (Fuente: Elaboración propia)

Sobre la TC, desde la Didáctica de la Matemática, diversos autores dan cuenta de la importancia de la abstracción reflexiva, en un sentido piagetiano, como un elemento fundamental para lograr la TC (Silverman y Thompson, 2008; Tallman, 2021). Esto se relaciona con la teoría del aprendizaje transformador (Mezirow, 1991) que da un rol esencial a la reflexión y entiende la TC ligada a ciertas estructuras mentales que se denominan perspectivas y esquemas de significado. Las perspectivas de significado son sistemas generalizados de expectativas habituales que actúan sobre nuestra forma de pensar y aprender. Los esquemas de significado son hábitos de expectativas específicos que conforman una interpretación específica. Una perspectiva puede tener asociada varios esquemas que se derivan de esta. Si la reflexión se realiza a nivel de contenido o proceso de resolución se estará trabajando con esquemas de significado, pero si la reflexión conduce al cuestionamiento de premisas más fundamentales o paradigmas personales se estará en el nivel de transformación de las perspectivas de significado (Mezirow, 1991).

Destacamos, el estudio de Valenzuela-Molina et al. (2021) que considera la TC en didáctica de la matemática como aquellos cambios en la manifestación de conocimiento del profesor que enseña matemática, a partir de una toma de decisión consciente y deliberada, surgida de procesos reflexivos al analizar su acción ya sea individual o en grupo. Estos cambios conscientes implican evidencia de TC. Si los cambios son generados a partir de respuestas espontáneas y adaptativas a las influencias del entorno se consideran inconscientes e implican indicios de TC. De acuerdo a Mezirow (1991), la TC está ligada a la toma de conciencia crítica de los cambios de conocimiento.

De acuerdo a lo planteado entenderemos por TC del profesor de matemática como el proceso en que este observa su acto de educar separado de la acción y a partir de la abstracción reflexiva (Mezirow, 1991) manifiesta cambios en su conocimiento para la enseñanza de manera consciente (Valenzuela-Molina et al., 2021) con el fin de lograr aprendizaje en sus estudiantes. La abstracción reflexiva se considera un elemento necesario para la TC (Silverman y Thompson, 2008; Tallman, 2021).

Metodología

El estudio se enmarca en el paradigma cualitativo desde un enfoque descriptivo-interpretativo (Flick, 2014). El diseño de la investigación se basa en un estudio de caso elegido por criterio de disponibilidad y disposición. El caso es un docente de enseñanza secundaria, que llamaremos Cristóbal que participó en un Diplomado en Didáctica del Cálculo, realizado virtualmente. En el Diplomado se trabajó en modalidad grupal, donde Cristóbal junto a una profesora que llamaremos Rocío (3 años de docencia) enfrentaron la problemática de cómo introducir el concepto de límite de sucesiones en alumnos de secundaria (16 y 17 años aproximadamente) a partir del diseño de una clase que lo aborde. Cristóbal tiene 26 años y trabaja en un establecimiento con pago parcial del Estado, de un estrato socioeconómico medio. Lleva 2 años como docente, por tanto, en su formación inicial no se consideró los cambios curriculares del año 2021.

Los instrumentos de recogida de datos son tres. Un cuestionario validado por juicio de expertos que contenía dos preguntas, una relacionada con la definición escolar del concepto y otra sobre cómo lo llevaría al aula. Se aplica antes de empezar el Diplomado (cuestionario inicial) vía correo, y luego durante el diplomado (cuestionario final), después de profundizar en la matemática y la didáctica, y luego que los docentes diseñaran y discutieran con sus pares y formadores un plan de clases. El segundo instrumento surge de las grabaciones de las sesiones del Diplomado y el tercero es una de las reformulaciones de la planificación del grupo.

Se empleó el análisis de contenido (Flick, 2014), donde las unidades de análisis fueron las respuestas de los cuestionarios y los párrafos o conjunto de ellos de las transcripciones de las grabaciones de las sesiones del diplomado y del plan de clases reformulado. Las categorías de análisis corresponden a las definiciones dadas en las figuras 1 y 2.

Análisis de datos

Se muestra los resultados de la aplicación ambos cuestionarios, para finalizar con el análisis de la TC del profesor Cristóbal.

Resultados respecto del cuestionario inicial

En la figura 3 aparece la respuesta de Cristóbal para la pregunta 1 del cuestionario inicial. Se evidencia conocimiento de Cristóbal sobre la definición de límite de sucesiones como tendencia o aproximación (D6), ya que lo definiría en el sistema escolar como “el valor que alcanza o tiende…a medida que n son infinitos”. Esta afirmación nos muestra la noción de infinito actual y potencial a la vez, pues se refiere al valor que la sucesión alcanza (actual) o tiende (potencial). Se evidencian dos situaciones, una referida al obstáculo epistemológico de considerar el límite como una tendencia (Hitt, 2013), donde el límite no es alcanzado y, por otro lado, una situación en la que el límite sí es alcanzado.

1) En el ámbito educativo ¿cómo definiría a sus alumnos el concepto de **límite de sucesión**?

El límite de una sucesión corresponde al valor que esta sucesión alcanza o tiende, a medida que se realiza la sucesión, tomando en cuenta que los valores “n” de la sucesión son infinitos. De manera concreta

Si A_n es una sucesión, queremos determinar el valor de esa sucesión a medida que tomamos los valore de n.

Figura 3. Respuesta del profesor Cristóbal a la pregunta 1 del cuestionario inicial

En el segundo párrafo el docente solicita “determinar el valor de esa sucesión”. Esto puede significar que él manifiesta una mirada del límite de sucesiones desde el infinito actual, considerando que “determinar el valor de la sucesión” significa determinar el valor del límite de la sucesión (infinito actual, D1). También puede interpretarse que se debe encontrar el valor de la sucesión para distintos valores de n (infinito potencial, D9).

En la respuesta a la segunda pregunta del cuestionario inicial (Figura 4), Cristóbal vuelve a mencionar el término “realización”. Este lo define como valoración de los términos de la sucesión. Reafirma la idea de evaluar los valores de la sucesión para “deducir a qué valor podría tender” como lo menciona en la pregunta 1, lo que podría confirmar su conocimiento de la definición del concepto de límite de una sucesión como tendencia (D6) desde el infinito potencial.

2) Entregue una actividad o tarea que haría a sus alumnos para el aprendizaje del concepto de **límite de sucesión**. Indique el objetivo de la tarea propuesta.

Objetivo: Demostrar el concepto de límite de sucesión, a través de la realización de sucesiones.

Determina el valor de la sucesión y analice el comportamiento que posee, y trate de deducir a que valor podría tender.

$$A_n = 2n + 1$$

$$A_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

Figura 4. Respuesta del profesor Cristóbal a la pregunta 2 del cuestionario inicial

Resultados respecto del cuestionario final

En la Figura 5 aparece la respuesta del profesor para la pregunta 1 del cuestionario final.

1) En el ámbito educativo ¿cómo definiría a sus alumnos el concepto de **límite de sucesión**?

Sea $\{a_n\}_{n\in N}$ una sucesión y $L \in R$ tal que los términos de $\{a_n\}_{n\in N}$ se aproximan a "L"~~, a medida que n tiende a infinito, es decir,~~ cuando $n \to \infty$. Entonces podemos ~~definir~~ representar el límite de una sucesión de la siguiente manera:

$$\lim_{n\to\infty}\{a_n\}_{n\in N} = L$$

Figura 5. Respuesta del profesor Cristóbal a la pregunta 1 del cuestionario final

La respuesta para la segunda pregunta del cuestionario final se expone en la Figura 6, donde se evidencia conocimiento del docente sobre la definición de límite de sucesiones por medio de la aproximación usando tablas de valores, al incorporarla en la tarea planteada (D9). Se vuelve a evidenciar conocimiento de la definición de límite como una tendencia (D6) con un posicionamiento sobre el infinito potencial.

2) Entregue una actividad o tarea que haría a sus alumnos para el aprendizaje del concepto de **límite de sucesión**. Indique el objetivo de la tarea propuesta.

Objetivo: Comprender la existencia del límite de una sucesión, comparando la tendencia de los términos de una sucesión.

Considere las sucesiones las siguientes sucesiones y responda:

$$\{a_n\}_{n\in N} = \frac{1}{n+3}$$
$$\{b_n\}_{n\in N} = 2n+1$$

a. Elabore una tabla con los primeros 10 términos de cada sucesión.
b. Los términos de la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ y $\{b_n\}_{n\in N}$ ¿tienen hacia un número?
c. ¿Cuál es la diferencia entre las sucesiones y su tendencia, a medida que vamos aumentando el valor de "n" y encontramos más términos de cada sucesión?
d. Según tu respuesta anterior, ¿Qué sucesión tiene un límite?

Figura 6. Respuesta del profesor Cristóbal a la pregunta 2 del cuestionario final

Resultados respecto de la Transformación de Conocimiento

A la luz del conocimiento manifestado por Cristóbal se identifican cuatro cambios de conocimiento. Se analizará si fueron conscientes o no, para discutir si hubo TC.

Notación formal y lenguaje natural. El cambio en la notación de la respuesta a la primera pregunta del cuestionario inicial al final parece ser que obedece al diálogo que Cristóbal tiene con Rocío cuando trabajan después de los comentarios de sus pares al exponer su planificación y de la exposición de los formadores sobre los conceptos disciplinarios.

Cristóbal: ...podríamos como también llevarlo a la forma gráfica...
Rocío: Sí. Voy a editar también aquí la notación por mientras...que ayer nos habían hecho el alcance igual...
Cristóbal: Sí, me había olvidado...

Se observa una toma de consciencia al reformular la planificación, estimulada por sus pares y formadores, que lo lleva al cambio de la notación. Además, este cambio se realiza a nivel de contenido por lo que se estaría trabajando al nivel de esquemas de significado. Esta toma de decisión consciente sobre esquemas de significado da evidencia de TC.

Uso de tablas. Otro cambio en la respuesta dada del cuestionario inicial al final es lo referente a la incorporación explícita de la tabla de valores en este último. Para poder indagar cómo surge este cambio se observa la transcripción del diálogo entre Cristóbal y Rocío en el Diplomado (después de exposición de relatores y comentarios de sus pares).

Cristóbal: …lo otro que también nos dijeron era que…era tomar en cuenta la elaboración de tablas
Rocío: Ah, sí…al momento de hacer los dibujos de acá
Cristóbal: …podríamos incluso en la actividad inicial como…si mantenemos esa de los patrones… como que ellos elaboren una tabla, por ejemplo, dar nosotros una tabla con valores y que ellos vayan calculando al lado el valor para que se entienda más o menos que es una función…y así ellos van viendo que 1 se relaciona con este valor, 10 con este valor y así le vamos dando valores cada vez más grandes para que vayan viendo la tendencia…

En este diálogo se observa una toma de conciencia sobre la utilidad de la tabla de valores como un medio para introducir el concepto de límite y analizar así la tendencia de la sucesión. Esta decisión consciente, provocada por sus pares, es producto de una reflexión sobre los esquemas de significado, pues se está trabajando sobre contenido o procesos de resolución. En este sentido, estaríamos también en presencia de TC.

Infinito actual e infinito potencial. Si bien no es la definición de límite de sucesiones, nos parece relevante notar que el profesor Cristóbal toma decisiones frente a estas nociones, donde en el cuestionario inicial se refiere a ambas opciones, pero en el cuestionario final solamente al potencial. En este caso lo que determina el cambio lo observamos en una de las reformulaciones del plan de clases diseñado[1] después del período de profundización durante el diplomado, pero antes del cuestionario final (figura 7).

Conocimientos previos: Sucesiones (definición y ejemplos). Idea de infinito "potencial".

Contenido matemático:
- Límite de sucesiones.

Nivel educativo: Escolar científico-humanista / técnico universitario.

Figura 7. Extracto del plan de clases propuesto por el grupo

En dicho plan de clases notamos que para Cristóbal el concepto de infinito potencial es fundamental para introducir el concepto de límite de sucesión por medio de la idea de aproximación o tendencia. Este aspecto es importante pues, de acuerdo al currículo chileno, se sugiere el acercamiento al objeto matemático a través de aproximaciones intuitivas y estas aproximaciones llevan implícito la idea de infinito potencial (D5, D6, D7, D8, D9). Este cambio consciente surge también de la interacción con sus pares y formadores y es producto de la reflexión sobre perspectivas de significado pues se cuestiona directamente premisas fundamentales tales como distinguir si la sucesión tiende a un valor o alcanza un valor realmente. En este sentido estaríamos frente a una TC.

Existencia del límite. Se puede apreciar que en el cuestionario inicial Cristóbal plantea una definición donde concibe que siempre existe el límite de una sucesión (D1, D3). En cambio, en el cuestionario final se sitúa en la posibilidad de considerar la existencia de sucesiones convergentes y otras que no lo son. Este aspecto fue abordado en la presentación formal de los contenidos disciplinarios durante el Diplomado y en la puesta en común de sus planes de clases. En este caso podemos ver el diálogo que se produce entre Cristóbal y Rocío:

[1] Si bien lo planifican entre los dos profesores, el producto es consensuado por ambos, por tanto, muestra el posicionamiento y conocimiento de Cristóbal sobre el tema.

Rocío: ...lo que nos faltaba eso sí, lo que nos sugirieron varias personas era eliminar la actividad 2 y poner esta del dos elevado a n

Cristóbal: Sí, sí, para que haya una que vaya al infinito

Se observa que la decisión de considerar sucesiones convergentes y otras que no lo son, es un cambio consciente inducido por sus pares y formadores y producto de la reflexión sobre esquemas de significado, pues se está trabajando sobre contenido o procesos de resolución. Estamos entonces en presencia de un proceso de TC.

Conclusiones

Se propuso indagar en la TC de los temas (KoT) de un profesor en relación al concepto de límite de sucesiones desde la categoría definiciones. El docente dio cuenta de conocimiento sobre definiciones a partir de aproximaciones intuitivas por medio de tablas de valores, así como considerar el paso al límite como tendencia o aproximación. Esta mirada es acorde a lo propuesto por el nuevo currículo chileno, teniendo en cuenta que diversos estudios sugieren que los fenómenos de aproximación intuitiva deben preceder a los formales para un aprendizaje significativo (Claros et al., 2016). Cristóbal manifiesta conocimiento sobre la importancia de saber la diferencia entre infinito potencial y actual para enseñar el concepto (Hitt, 2013). Esto puede producir confusiones si no se considera al momento de introducir dicho objeto matemático.

En cuanto a la TC se pudo evidenciar cuatro elementos, inducidos por pares y formadores. Tres de estas transformaciones fueron producidas por la reflexión sobre esquemas de significados y una sobre perspectivas de significado. Se releva la importancia de la influencia de los pares y en gran medida el diálogo posterior en grupos de trabajo para lograr que los cambios producidos sean conscientes, y poder hablar de TC.

Se espera que este estudio evidencie la manera en que se enfrenta la introducción al concepto de límite de sucesiones y, además, pretende contribuir en la Didáctica de la Matemática con una definición más precisa sobre la TC del profesor que permita a investigadores, formadores o instituciones educativas comprender mejor al profesor y los procesos en donde se involucra de manera que repercutan en la mejora de la práctica del docente y en el aprendizaje de sus alumnos, y en relación con sus pares.

Agradecimientos

Investigación financiada parcialmente por Beca Doctorado Nacional folio 21222174 de ANID, Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile, y el proyecto FONDECYT de Iniciación 11190553.

Referencias

Bustos, C. y Ramos, E. (2022). Una mirada sobre conceptos del cálculo desde el conocimiento de los temas del profesorado de matemática de secundaria. *Revista Innovaciones Educativas, 24*(36), 97-113. https://doi.org/10.22458/ie.v24i36.3893

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). CERME.

Claros, J., Sánchez, M., y Coriat, M. (2016). Tratamiento del límite finito en libros de texto españoles de secundaria: 1933–2005. *Educación Matemática, 28*(1), 125-152.

Flick, U. (2014). *La gestión de la calidad en la investigación cualitativa.* Morata.

Hitt, F. (2013). El infinito en matemáticas y el aprendizaje del cálculo: Infinito potencial versus infinito real. *Revista de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, El Cálculo y su Enseñanza, 4*, 103-122.

Irazoqui, E. y Medina, A. (2013). Estudio preliminar de aproximación al concepto de límite de una función. *Theoria, 22*(1), 21-31.

Mezirow, J. (1991). *Transformative dimensions of adult learning.* Jossey-Bass.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC] (2021). *Matemática. Programa de Estudio Límites, Derivadas e Integrales para Formación Diferenciada 3º y 4º Medio.* Autor.

Silverman, J., y Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 499-511.

Tallman, M. (2021). Investigating the transformation of a secondary teacher's knowledge of trigonometric functions. *Journal of Mathematical Behavior, 62*. 100869.

Valenzuela-Molina, M., Ramos-Rodríguez, E., y Flores, P. (2021). Transformation of the Specialized Knowledge of Future Primary Teachers on Fraction Division. *Acta Scientiae, 23*(3), 218-240. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5650

LA CONSTRUCCIÓN DE UNA MIRADA DIDÁCTICA A LOS PROBLEMAS PROFESIONALES DE ENSEÑAR GEOMETRÍA EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Building a didactic look at the professional problems of teaching geometry in high school

Villella, J.[a], Güerci, V.[a], Ferragina, R.[a], Fioriti, G.[a], Lupinacci, L.[b], Almirón, A.[b], Bifano, F.[c]

[a] Centro de Estudios en Didácticas Específicas LICH-UNSAM-CONICET, Argentina
[b] Programa de Estudios Didácticos IEI UNAJ, Argentina
[c] Instituto de Investigaciones en Didáctica de las Ciencias y la Matemática CEFIEC-UBA, Argentina

Temática: 1 – MTSK en la formación docente

Resumen.
El conocimiento didáctico matemático para organizar la enseñanza, supone diseñar tareas de aprendizaje, utilizar diferentes métodos y recursos, entender los factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje. En este trabajo compartimos parte de un encuentro de formación permanente con docentes, en el que proponemos debatir la tarea a llevar a clase de geometría para estudiantes de 15 años. Usamos el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) para analizar el conocimiento especializado de esos docentes, en el marco de una investigación colaborativa que está en desarrollo. Concluimos que MTSK permite caracterizar la enseñanza de la geometría como una actividad situada, interpelar su sentido, desnaturalizar secuencias de aprendizaje, cuestionar figuras, dibujos y argumentos estudiantiles, comprender fenómenos didácticos referidos a la enseñanza de la geometría en el aula.

Palabras clave. Prácticas de enseñanza, Geometría, PCK, MTSK.

Abstract.
Mathematical didactic knowledge to organize teaching involves designing learning tasks, using different methods and resources, and understanding the factors that condition teaching and learning. In this work we share part of a permanent training meeting with teachers, in which we propose to discuss the task to take to geometry class for 15-year-old students. We use the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model to analyze the Specialised knowledge of these teachers, within the framework of a collaborative investigation that is underway. We conclude that MTSK allows to characterize the teaching of geometry as a situated activity, question its meaning, distort learning sequences, question figures, drawings and student arguments, and understand didactic phenomena related to the teaching of geometry in the classroom.

Keywords. Teaching practices, Geometry, PCK, MTSK.

Villella, J., Güerci, V., Ferragina, R., Fioriti, G., Lupinacci, L., Almirón, A. y Bifano, F. (2023). La construcción de una mirada didáctica a los problemas profesionales de enseñar geometría en la escuela secundaria. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.162-169). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

La transferencia de los resultados en la formación docente está entre los temas de la agenda de la investigación en educación matemática (García et al., 2010). En esa línea, concebimos el aula como una comunidad para el estudio de la matemática en la que los problemas, son el motor del aprendizaje.

El trabajo con esos problemas, genera la producción de conjeturas y pruebas. Estas producciones estudiantiles se construyen de diferentes formas en función de las relaciones más relevantes y discutiendo entre pares la validez de las estrategias utilizadas en la resolución. Por ello, pensamos el rol docente como la coordinación de un grupo de estudio para el que selecciona los problemas, promueve interacciones entre estudiantes, organiza las ideas y las ordena en una producción colectiva. La actividad de formación que compartimos, se propone como recurso para trabajar con docentes que enseñan en la escuela a estudiantes de 15 años. Está compuesta por tres nodos:

- cómo gestionar la clase para alentar a las y los estudiantes a ensayar, producir diferentes soluciones, discutir y argumentar como entrada al razonamiento deductivo para validar,
- cómo utilizar las diferentes formas de representación, equivalentes entre ellas, que se espera construyan las y los estudiantes, cuando realizan actividades de geometría,
- cómo organizar las interacciones en la clase de secundaria para reflexionar sobre la validez, precisión, claridad y generalidad de lo que en ellas se produzca.

Diseñar de este modo el aula de formación, nos permite configurar e impulsar una práctica analítica y reflexiva en torno a problemas de la enseñanza de la geometría que devenga en la construcción de un saber didáctico específico. En estas actividades incluimos la tecnología para repensar las actividades y los problemas que dan sentido a los conocimientos. Proponemos, el uso de un Software de Geometría Dinámica (SGD) como forma de ampliar la cultura matemática (en consecuencia, el conocimiento) y tensionar las ideas sobre representación geométrica que circulan en las aulas (Barrantes et al.,2015).

Marco teórico

En el ámbito de la formación docente, se pasó de una visión centrada en una lógica de los contenidos a otra situada en una lógica de las situaciones profesionales (Villella y Steiman, 2021). Para que este cambio resulte satisfactorio, se requiere de una perspectiva en los encuadres teóricos que ayude a mirar la acción situada de la y el docente que enseña matemática en el aula. Para ello, podemos trabajar sobre la conceptualización en la acción docente desde la perspectiva del profesional reflexivo y la profesionalización, asumiendo que la enseñanza no se legitima a sí misma por la implementación de rutinas centradas en la exposición de saberes, sino que cobra sentido en la toma de conciencia acerca de por qué y cómo aprenden las y los estudiantes. Así, esta dimensión práctica de la actividad docente comprende un conjunto de repertorios y supuestos, que en ocasiones se advierten contradictorios con las teorías proclamadas para explicar los fundamentos de las decisiones tomadas en el aula y requieren de un espacio para identificar el aprendizaje que se produce en las situaciones de enseñanza (Villella y Steiman, 2021).

Diseñamos este espacio de formación por medio de tareas que tienen una función, una forma y un foco (Grevholm et al., 2009). La tarea que compartimos, cumple la función de construir conocimiento especializado en docentes que enseñan geometría a estudiantes de 15 años, gestada con base en el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) (Carrillo et al., 2018). Su forma se identifica en la resolución, análisis y reformulación de actividades de geometría mediadas por un SGD. Su foco, para concretar la función prevista, consiste en desarrollar algunos de los subdominios del MTSK, con relación al tema puntos notables de un triángulo.

El modelo MTSK como marco de la tarea de formación docente

El modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) permite interpretar el conocimiento que las y los docentes evidencian en las prácticas de la enseñanza de la matemática. Este modelo conserva, con fines analíticos, la división entre los dominios de conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido propuesta por Shulman (1986), así como aportes realizados por Ball et al. (2008). Trabaja con dos dominios que, cruzados por las concepciones y creencias que quien enseña tiene sobre la matemática, se subdividen en subdominios que se referencian por siglas de sus nombres en inglés y que nosotros adaptamos a la geometría:

1. El conocimiento matemático que comprende:

- *conocimiento de los temas* (Knowledge of Topics, *KoT*): referencia al conocimiento geométrico como objeto de enseñanza, abarcando su perspectiva fenomenológica y sus aplicaciones, los diversos registros de representación, las definiciones, propiedades, fundamentos y procedimientos para construirlos.
- *conocimiento de la estructura de la matemática* (Knowledge of the Structure of Mathematics, KSM): refiere a las redes conceptuales que conforman la geometría escolar.
- *conocimientos de la práctica matemática* (Knowledge of Practices, KPM): contempla elementos propios del quehacer geométrico, cómo se define, cómo se justifica, cómo se dibuja.

2. El conocimiento didáctico del contenido que comprende:

- conocimiento de la enseñanza de la matemática (Knowledge of Mathematics Teaching, KMT): se enfoca en quien enseña, contemplando el conocimiento sobre teorías (personales o formales) de enseñanza, de los recursos materiales y virtuales para desarrollarla y el conocimiento de estrategias y recursos y de cómo orquestarlos en el aula de geometría.
- conocimiento de las características del aprendizaje de la matemática (Knowledge of Mathematics Learning Features, KFLM): se enfoca en quien aprende, contemplando el conocimiento de teorías personales o formales sobre el aprendizaje, en las formas de interacción de las y los estudiantes con un contenido geométrico y de sus intereses y expectativas.
- conocimiento de los estándares de aprendizaje de geometría (Knowledge of Mathematics Learning Standards, KMLS.) se refiere a una visión holística del currículum, incluyendo las expectativas de aprendizaje en una determinada etapa del sistema educativo, el nivel de desarrollo conceptual o procedimental que es esperable en esa etapa respecto de los contenidos geométricos.

La geometría como contenido disciplinar en la tarea de formación

Compartimos con Laborde (2005) que la geometría que se enseña en la escuela trabaja con objetos teóricos y pone en juego representaciones gráficas. En las clases de la escuela secundaria, las y los estudiantes tienen que expresar información a otros de manera que puedan entenderla y ser capaces de comprender lo que esos otros puedan estar diciéndoles: emplearán significantes (traducción fónica o gráfica de un concepto) para comunicar significados (correlato mental del significante). Este proceso, a lo largo del tiempo, mutó desde la visualización como soporte para la justificación a la búsqueda de modelos para interpretar el entorno, pasando por el uso de las aplicaciones (Villella y Ferragina, 2022). Esto hace necesario tensionar la cualidad ostensiva de una representación, para reflexionar en el aula sobre la figura geométrica que en entornos dinámicos colisiona con los dibujos y genera un diálogo al interior de las redes conceptuales de la geometría que las y los docentes deben promover y gestionar (Laborde, 2005). Las y los estudiantes podrán, en estos diálogos, analizar características y propiedades de las figuras geométricas y generar argumentos que les permitan relacionarlas; usar sistemas de representación para lograr la localización espacial; aplicar transformaciones para analizar situaciones matemáticas y usar la visualización y el razonamiento espacial para la construcción de modelos geométricos (Villella et al, 2018). Cuando este diálogo está mediatizado por un SGD como GeoGebra, que provee un modelo de la geometría euclídea en el que se mantienen las relaciones geométricas usadas para construir una figura, se generan escenarios en los que las y los estudiantes pueden vincular la exploración (que se vivencia con las acciones realizadas sobre y con los objetos geométricos que el software permite construir) con la demostración (los hechos descubiertos de manera empírica que se transforman en enunciados que hacen parte de un sistema axiomático) (Camargo et al, 2006).

La tarea que proponemos trabajar en el aula de formación docente continua, permitirá comprender que los gráficos en el plano connotan propiedades geométricas teóricas (figuras) y denotan propiedades espacio-gráficas (dibujos) (Laborde, 2005), lo que genera un problema de enseñanza, que requiere de alternativas de solución. Durante el desarrollo de la tarea, tensionamos estas ideas para visibilizar el problema de enseñanza que intentamos analizar y que enunciamos en términos geométricos para las y los docentes, como sigue: *Una propiedad geométrica es un invariante que se estudia sobre un objeto variable. El objeto varía en un conjunto de objetos que satisfacen algunas condiciones comunes (familias de objetos geométricos). Dado que la variabilidad de los objetos geométricos es generalmente invisible, se requiere superar la formulación de una propiedad geométrica que se expresa tratando con un solo objeto estático. En todos estos casos los cuantificadores están implícitos y los entornos de geometría dinámica brindan un entorno que ofrece información y retroalimentación a sus soluciones* (Villella et al., 2021).

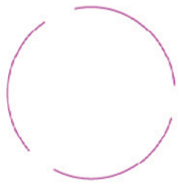
Metodología

La tarea de formación que compartimos forma parte de un repertorio de acciones de una investigación educativa (aplicada, cualitativa) de tres años (esta tarea corresponde al segundo año) que se desarrolla de manera colaborativa (Bednarz, 2004) en Buenos Aires, Argentina. La misma se diseñó sobre la idea de que es necesario facilitar a las y los docentes aulas de formación permanente en las que puedan reflexionar acerca de su práctica para: pensar sobre las consecuencias de las mismas en las aulas donde desarrollan su actividad; interpelar el sentido matemático de lo que enseñan; desnaturalizar secuencias de aprendizaje, ayudar a cuestionar las producciones matemáticas de sus estudiantes; mejorar la comprensión de los fenómenos didácticos que se dan en el aula; generar conocimiento especializado. Se considera a la acción didáctica como una acción compleja y conjunta donde se intercambian sentidos e intencionalidades de enseñanza y sentidos y posibilidades de aprendizaje. La práctica de la enseñanza de la geometría que elegimos trabajar, está asociada a una actividad situada en la que la puesta en acto de conocimientos, procesos y habilidades de la y el docente, las y los ubican en una actuación de tipo profesional. El análisis semántico del enunciado les brinda la posibilidad de construir junto con sus colegas, un material de uso para el aula que quizás pudo haberle pasado inadvertido. Se actúa la dinámica de la ecuación: *documento = recurso + esquemas de uso* (Trouche, 2005), que hace del trabajo colaborativo un requisito insoslayable y usa los subdominios del MTSK como evidencia de conocimiento especializado. El registro de lo actuado con los 9 docentes –todos con títulos de profesores- participantes que tienen una antigüedad promedio de 10 años en la enseñanza secundaria, la discusión de lo anotado, el intercambio de puntos de vista sobre los pasos dados, pone en evidencia la necesidad de conocer en profundidad los temas de geometría que se están usando y las decisiones didácticas que focalizan en la producción de conocimientos geométricos en el aula de nivel secundario.

Resultados

Propusimos a las y los docentes resolver en grupos, la tarea que mostramos en la Figura 1, con la finalidad de que logren construir conocimiento especializado con relación a los puntos notables de un triángulo:

Luisa, profesora de 3°A eligió la siguiente actividad para evaluar a sus estudiantes al terminar de estudiar el contenido: puntos notables del triángulo



Se mira una puerta giratoria desde arriba. Usando GeoGebra se logra hacer el dibujo de la izquierda.
¿Cuál puede ser un protocolo de construcción con el que se logra hacer el dibujo? ¿Por qué la pregunta dice un protocolo y no el protocolo?

Respondan: ¿La tarea cumple con el objetivo elegido por Luisa? ¿Por qué? ¿Qué respuestas de las y los estudiantes debería Luisa considerar como correctas? ¿Por qué? ¿Qué sentido tiene para el contenido a evaluar, la pregunta que Luisa les hace a sus estudiantes?

Figura 1. Tarea para resolver en el aula de formación permanente

El equipo de investigación (I) presentó la tarea y dio un tiempo para que cada docente (D_n) pensara y discutiera en su grupo la respuesta a las preguntas que pusieron en acto los nodos descriptos de la actividad: ¿cómo presentarían la actividad en sus aulas para alentar a sus estudiantes a responder la pregunta de la consigna? ¿qué suponen pueden hacer las y los estudiantes para resolverla? Se transcriben algunas de las intervenciones:

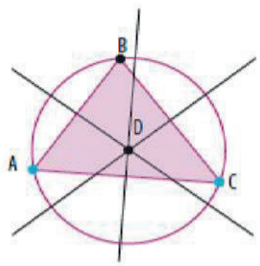
D_1: Uf, ¡qué difícil! Tienen que hacer muchas cosas, tomar muchas decisiones. Yo separaría las preguntas en varias partes para orientar un poco la resolución.
D_2: A mí me parece que ahí está la riqueza. Dejarlos libres para que investiguen, busquen, prueben, se peleen. Así se puede evaluar no sólo contenido, sino cómo lo construyen y qué sentido le dan.
I: Mientras las y los estudiantes hacen esto: ¿ustedes qué harían?
D_2: Me acerco a responder las dudas o a repreguntar para orientarlos si los veo muy perdidos
D_3: Yo acuerdo en que hay que hacer más preguntas. ¿Se van a dar cuenta que tienen que trabajar con la circunferencia inscripta y circunscripta a un triángulo para buscar el centro?
I: ¿Es eso lo que espera Luisa? ¿Es eso lo que esperan ustedes?
D_4: Ups…nos olvidamos de leer eso que les pregunta por un o el protocolo. Me parece que por ahí pasa la cosa. Más que resultado, quiere ver proceso…
D_2: Un proceso que tiene que ser justificado. Tenemos que dar lugar a que demuestren sus argumentos, es decir, que no nos muestren un dibujo nada más.
I: ¿Sería trabajar la diferencia entre dibujo y figura y fomentar la demostración?
D_2: Dicho así suena difícil. Yo quiero que digan que lo que se ve tiene propiedades que justifican el trazo. Sin propiedades, no les acepto respuesta…

Las intervenciones dan cuenta de aspectos referidos a KPM (D_3; D_4) y KMT (D_1; D_2; D_3) del MTSK. La tarea generó discusiones profesionales: la práctica de la enseñanza fue el objeto del debate (D_1; D_2; D_3) para el análisis basado en la fundamentación disciplinar y su didáctica. Se generó en el aula de formación docente un escenario para lograr acercamiento al estudio de un conjunto de problemas de las prácticas de enseñanza como un modo de construir conocimiento didáctico específico.

En otro grupo, la tarea se resolvió a partir de ensayos con GeoGebra. Sus integrantes propusieron presentar la actividad elegida por Luisa, como cierre de una secuencia: el recurso mutó en tanto brindó a las y los docentes la posibilidad de identificar, poner en discusión y problematizar distintas dimensiones de sus prácticas de enseñanza.

I: Ustedes pensaron modificaciones a la actividad.
D_5: En realidad, adecuaciones. Pensamos que debíamos presentar una secuencia y como final, usar la actividad de Luisa
D_6: (mostrando la pantalla que de la Figura 2) Jugamos con GeoGebra y nos parece interesante resolver estas actividades en orden:

1-Observen la siguiente figura construida con GeoGebra:



2-*Respondan:*

¿Qué puntos forman la circunferencia dibujada?

¿Cómo se obtuvo el centro de la circunferencia?

¿Qué diferencia tiene esa circunferencia con la que se muestra en esta figura? ¿Por qué?

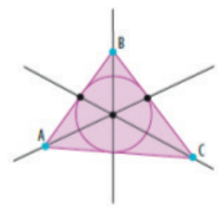


Figura 2. Pantalla con propuesta de modificaciones a la tarea

I: ¿Todas las actividades? ¿Se puede cambiar el orden de la segunda parte? ¿Es obligatorio que aparezca la primera parte de la actividad?
D_6: No (enfáticamente). Primero observan y después hacen la primera actividad de la parte
2. Se resuelve, se discute. Después la que sigue, se resuelve, se discute. Después de la tercera y finalmente la actividad de Luisa.
I: ¿Cómo se relacionan las representaciones que ustedes presentan en la pantalla, con las preguntas que hace Luisa?
D_7: Ah, eso así no lo pensamos. Ahora que lo dicen, está bueno. Porque cada representación que mostramos tiene un protocolo, pero no es el único con el que se la obtiene. Nos faltan preguntas para pasar de una a otra actividad. A pensar…
D_8: Y además tenemos que discutir la idea de un o el protocolo, tampoco lo pusimos
D_9: ¿Pero para qué les damos las representaciones que nosotros pensamos? ¿Y si ellas y ellos proponen otros caminos? Me parece que estamos cerrando muchos caminos… No estoy seguro de esta secuencia

El fragmento da evidencia de cómo utilizar diferentes formas de representación, equivalentes entre ellas, como elementos del hacer geometría y discutir si deben ser dadas o construidas por las y los estudiantes en el aula. **Con las intervenciones de las y los docentes, se habilita la posibilidad de analizar KoT (D_6; D_7) y KFLM (D_6; D_9) del MTSK. Esto trae la discusión acerca de cómo organizar las interacciones en la clase para reflexionar sobre la validez, precisión, claridad, generalidad de lo que en ellas se produzca, evidencia de KMT (D_5; D_6; D_8) y KMLS (D_7; D_9).** Así, se equilibra la permanente reflexión teórica con las particularidades de las prácticas cotidianas, utilizando la experiencia docente para proyectar los análisis en los contextos que se tomen como referencias. De esta manera, el escenario de la capacitación se erige en un espacio que configura e impulsa una práctica analítica y reflexiva en torno a problemas concretos de la enseñanza que devenga en la construcción de un saber didáctico específico sobre la geometría escolar.

Conclusiones

Entre argumentaciones visuales y argumentaciones formales (KPM), en el pasaje de los sentidos a la razón a través de secuencias y actividades pensadas para el debate las y los docentes, debatieron sobre cómo dejar de entregar un saber presente en los libros, de oralizar un contenido, para trabajar con modelos, problemas, que aluden a la reflexión acerca de las cualidades de los objetos geométricos (KoT, KSM, KMT y KFLM del modelo). Estas, estos docentes, no comparten un aula en la que tienen que pedir silencio para que se las o los escuche: sus aulas tienen el sonido del diálogo que genera reflexión y conocimiento disciplinar en las y los estudiantes, y promueve en ellas y ellos, conocimiento específico sobre su profesión (KPM, KMLS). El análisis de tareas propias de la práctica de la enseñanza pone en foco que las aulas, como dice Serrés (2013) conforman un espacio topológico de vecindades, que supera y modifica al espacio métrico, referido por distancias, en la que estábamos trabajando (PCK).
El análisis de las tareas propias de la enseñanza, tensiona el diálogo entre técnicas y tecnologías en tanto las primeras guían hacia la geometría desde lo disciplinar (MK) mientras que las segundas lo hacen hacia el aula donde la geometría es basamento de diálogos, discusiones, producciones, demostraciones, justificaciones (PCK).

Con la tarea compartida hemos favorecido una aproximación reflexiva a las prácticas de enseñanza como un modo de hacer didáctica específica de la geometría. En los debates pudimos trabajar desde una perspectiva socio antropológica de la reflexividad de la enseñanza de la geometría como práctica social. Así, promovimos el análisis de las prácticas de enseñanza desde una perspectiva de la gramática de la acción social y sus derivaciones en la noción de oficio, donde el MTSK se presenta como un recurso potente.

Reconocimientos

Este trabajo es parte del proyecto PICT-2019-03051 radicado en el LICH-UNSAM- CONICET. Los autores son miembros de la Red Iberoamericana MTSK (AUIP).

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes its special? *Journal of Teacher Education, 59(5),* 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Barrantes, M., López, M. y Fernández, M. A. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. *PNA, 9*(2), 107-127. https://doi.org/10.30827/pna.v9i2.6105

Bednarz, N. (2004). Collaborative Research and Professional Development of Teachers in Mathematics. En M. Niss y E. Emberg (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Mathematics Education* (pp. 4-11). Roskilde University.

Camargo, L., Samper, C., y Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas, 272*(3), 371-383.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

García, F. J., Maas, K., y Wake, G. (2010). Theory meets practice: Working pragmatically within different cultures and traditions. En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 445-457). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1- 4419-0561-1

Grevholm, B., Millman, R., y Clarke, B. (2009). Function, Form, and Focus: The role of Tasks in Elementary Mathematics Teacher Education. En B. Clarke, B. Grevholm y R. Millman (Eds.), *Tasks in Primary Mathematics Education: Purpose, Use and Exemplars* (pp.1-5). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0- 387-09669-8

Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: two sides of the use of dynamic geometry environments. In *Proceedings of the 10th Asian Technology Conference in Mathematics* (pp. 22–35). Korea National University of Education.

Serres, M. (2013). *Pulgarcita.* Fondo de Cultura Económica.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand. Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. https://doi. org/10.3102/0013189X015002004

Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 25*(1), 91-138.

Villella, J., Fioriti, G., Ferragina, R., Bifano, F., Lupinacci, L., Almirón, A., Güerci, V. y Ammann, S.. (2021). Train as a Math Teacher: Creative and Proactive Process of Professional Development. *Social Education Research, 2*(2), 241-255, https://doi.org/10.37256/ser.222021894.

Villella, J. y Steiman, J. (2021). De un artículo periodístico a una secuencia de enseñanza de geometría: la mirada didáctica general en diálogo con la específica. *Clave Didáctica,* 2, 7-18. http://www.unsam.edu.ar/escuelas/humanidades/en-clave-didactica/2020_Revista-CEDE_2.pdf.

Villella, J., Fioriti, G., Ferragina, R., Lupinacci, L., Bifano, F. y Almirón, A. (2018). A professional development experience in Geometry for High School teachers: introducing teachers to Geometry workspaces. En P. Herbst, U. Cheah, K. Jones, y P. Richard (Eds.), *International Perspectives on the teaching and learning of Geometry in secondary schools* (pp. 197-214). Springer.

Villella, J. y Ferragina, R. (2022). Evidencia de conocimiento docente especializado en espacios de trabajo matemático que usan recursos tecnológicos. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC, 17*(42), 61-78, https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p61-78.id451

ANÁLISE DOS NÚMEROS RACIONAIS EXPRESSOS COMO OBJETO DE ESTUDO NO LIVRO DIDÁTICO

Analysis of rational numbers expressed as an object of study in textbook

Batista, E.F.M.[a], Oliveira, P.C.[a], Ribeiro, C.M.[b]

[a] Universidade Federal de São Carlos, Brasil
[b] Universidade Estadual de Campinas, Brasil

Temática: 1 – MTSK na formação docente

Resumo.
Este artigo contempla uma análise de dois livros didáticos brasileiros, de matemática do 6° ano do Ensino Fundamental, que foram validados nos três últimos anos do Programa Nacional do Livro Didático (2014, 2017 e 2020). Apoiado em uma metodología qualitativa na modalidade documental e bibliográfica, analisamos os conhecimentos especilizados expressos no estudo dos números racionais, na perspectiva do modelo MTSK. Os resultados dessa pesquisa foram apresentados por meio de elementos qualitativos, relativos aos subdominios do conhecimento especializado e suas respectivas categorias; revelando o conhecimento expresso e possíveis lacunas relativas ao estudo dos números racionais.

Palavras chave. Conhecimento especializado, Matemática, Ensino Fundamental, Fração.

Abstract.
This article contemplates an analysis of two Brazilian textbooks, of mathematics of the 6th year of elementary education, which were validated in the last three years of the National Textbook Program (2014, 2017 and 2020). Supported by a qualitative methodology in documentary and bibliographic modality, we analyzed the expertise expressed in the study of rational numbers, from the perspective of the MTSK model. The results of this research were presented through qualitative elements, relating to the sub-domains of specialized knowledge and their respective categories; revealing the knowledge expressed and possible gaps relating to the study of rational numbers.

Keywords. Specialised knowledge, Mathematics, Elementary School, Fraction.

Batista, E.F.M., Oliveira, P.C. y Ribeiro, C.M. (2023). Análise dos números racionais expressos como objeto de estudo no livro didático. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.170-177). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introdução

Este trabalho expôs um extrato da dissertação do primeiro autor (Batista, 2023) envolvendo a análise dos números racionais contido em dois livros didáticos brasileiros. Concordamos com Ribeiro et al. (2021) que o livro didático é concebido por muitos professores como um recurso pedagógico orientador do trabalho docente que, por sua relevância, pode constituir-se um objeto de pesquisa. Como critério de seleção dos livros, considerou-se as aprovações sucessivas nas três últimas edições do Programa Nacional do Livro Didático - PNLD, sendo eles: Araribá Mais Matemática (Editora Moderna), Matemática Bianchini (Editora Moderna) e Teláris Matemática (Editora Ática). No entanto, um critério complementar foi aplicado: os livros Araribá Mais Matemática e Teláris Matemática foram utilizados pelo primeiro autor na unidade escolar em que atuava. Com isto, centralizamos o processo de análise documental nesses dois livros didáticos.

No contexto brasileiro, pesquisas como de Litoldo et al. (2018) revelam evidências de que as dificuldades que os alunos possuem no entendimento das frações são as mesmas que os próprios professores têm, sendo então que tais resultados são intrinsecamente ligados ao conhecimento que será oferecido ao aluno. Outro fator de relevância são os dados trazidos por Rogeri (2015), apontando que os alunos que chegam no 6° ano do Ensino Fundamental, não estão compreendendo os significados associados aos números racionais, tampouco operam com os procedimentos de cálculo.

De acordo com o levantamento de pesquisas brasileiras que contemplam os conhecimentos especializados sobre o ensino dos números racionais feito por Zero et al. (2021), é frequente a utilização do estudo clássico de Kieren (1976) que teve como foco os fundamentos matemáticos, cognitivos e instrucionais dos números racionais, sistematizados em sete itens:

> 1. Os números racionais são frações que podem ser comparadas, adicionadas, subtraídas, etc.
> 2. Os números racionais são frações decimais que formam uma extensão natural (por meio de nosso sistema de numeração) para os números inteiros.
> 3. Os números racionais são classes de equivalência de frações. Assim, {1/2, 2/4, 3/6,...} e {2/3, 4/6, 6/9,...} são números racionais.
> 4. Os números racionais são números na forma p/q, onde p, q são inteiros e q≠0. Nesta forma, os números racionais são números de “proporção”.
> 5. Os números racionais são operadores multiplicativos;
> 6. Os números racionais são elementos de um campo quociente ordenado infinito. Eles são números da forma x = p/q, onde x satisfaz a equação qx = p.
> 7. Os números racionais são medidas ou pontos em uma reta numérica.
> (Kieren, 1976, p. 103)

A conceituação de Kieren (1976) foi nosso referencial de concepção dos números racionais ao voltamos o olhar para o livro didático que ainda se configura como instrumento-base tanto no planejamento de aulas, quanto no exercício da docência (Litoldo et al., 2018). Neste sentido, essa pesquisa como base no modelo *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK (Carrillo-Yañez et al., 2018), busca responder quais conhecimentos especializados do professor/autor que ensina matemática acerca dos números racionais, o livro didático está priorizando em suas escolhas didáticas?

O Modelo MTSK

O modelo analítico do Conhecimento Especializado dos Professores de Matemática, do inglês, *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), desenvolveu-se com o intuito de suprir as questões de demarcação de alguns do domínios do MKT (Ball et al., 2008), e foi proposto a partir da ideia de que a especialização do conhecimento do docente de Matemática é desenvolvido na prática de ensino (Montes et al., 2013).

Elaborado como um modelo de estudo e investigação exclusivo do professor de Matemática, o MTSK reconhece que o conhecimento destes docentes será especializado quando se desenvolver para/no trabalho de ensino da disciplina. Enquanto modelo analítico, o MTSK se mostra capaz de auxiliar na compreensão dos conhecimentos do professor de Matemática, que orientam e respaldam suas ações de ensino (Carrillo-Yañez et al., 2018).

O desenvolvimento do MTSK se divide em dois domínios (Conhecimento Matemático (MK) e Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (PCK)), cujas siglas mantivemos na lingua inglesa, e são permeados pelas crenças docentes acerca dos conhecimentos da Matemática e do ensino aprendizagem da disciplina. O primeiro domínio contempla os subdomínios, Conhecimento de Tópicos (KoT), Conhecimento da Estrutura da Matemática (KSM) e Conhecimento das Práticas em Matemática (KPM). Já o domínio do Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (PCK) engloba os subdomínios do Conhecimento do Ensino de Matemática (KMT), do Conhecimento das Características da Aprendizagem da Matemática (KFLM) e do Conhecimento dos Parâmetros de Aprendizagem em Matemática (KMLS).

Percurso metodológico

O modelo MTSK aplicado na análise de produções de informações, segundo Ribeiro (2018, p. 174) contempla quatro foco de pesquisa: “(a) análise de livros didáticos; (b) a prática do professor; (c) problemáticas recorrentes identificadas na pesquisa; (d) conhecimento, raciocínio e representações dos alunos”.

A presente pesquisa faz uso de uma metodologia qualitativa de natureza documental e bibliográfica, baseada na conceituação de Gil (2022). Em termos de pesquisa documental, estamos considerando o livro didático, por ser um material que não recebeu um tratamento analítico a partir da delimitação de um problema de pesquisa. O tratamento analítico para esse relato de pesquisa, portanto, a modalidade bibliográfica, se utiliza fundamentalmente das contribuições do Conhecimento Especializado dos Professores de Matemática (MTSK).

Para o processo de produção e análise de informações, no que diz respeito aos dois livros didáticos, primeiramente, buscamos identificar em que local do material estava disponibilizada a temática dos números racionais para estudantes com idade média de 12 anos. No livro Araribá Mais Matemática, o conteúdo submetido à análise foi o capítulo ‘5 e 6’ (pp.119-158) destinado ao estudo de frações e os capítulos ‘8 e 9’ (pp.182 -225), relacionados ao estudo de números decimais. Já em relação à obra Teláris Matemática, o foco de análise foi o capítulo ‘6’ (p. 168 a 205) com o estudo de frações e porcentagem, além do capítulo ‘7’ (pp. 206- 241) envolvendo números decimais.

Os referidos livros didáticos não apresentam o termo “números racionais”, tampouco sua definição. Assim, essa omissão é caracterizadora de uma lacuna no KoT (conceitos – definições e imagens de um conceito) e no KFLM (Dificuldades dos alunos), pois até alunos de licenciatura manifestam dificuldades em compreender o conceito (Marques, 2018).

Consideramos importante interpretar a noção de número racional em diferentes formas, o que converge com uma habilidade exposta na Base Nacional Comum Currícular: “reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica” (Ministério da Educação de Brasil [MEC], 2018, p.301).

No livro Teláris Matemática (Dante, 2018), há seções que exploram as representações matemáticas na conversão entre números decimais e frações nos dois sentidos, além das respectivas operações desenvolvidas em atividades de resolução de problemas ou de aplicação de algoritmos.

Para este texto, dada a sua extensão, restringimos apresentar o conceito de fração contido na obra

Teláris Matemática (Dante, 2018). Importante destacar que para cada sub-domínio do MTSK há uma associação de categorias *a priori*, apropriadas de Medrano et al. (2016).

Resultados e discussão

Na obra Teláris Matemática (Dante, 2018) o estudo de fração inicia-se com uma situação-problema interdisciplinar utilizando uma representação pictórica, em que crianças estão encenando uma peça de teatro que retrata uma medição feita pelos egípcios utilizando corda com nós equidistantes. Aqui temos a evidência do subdomínio KSM na categoria conexões transversais, pois ao apresentar uma situação lúdica, no contexto da História da Matemática, indica uma oportunidade de aprendizagem em que os alunos possam vivenciar situações que auxiliam o aluno na ampliação da imagem conceitual de fração. Neste sentido, a representação pictórica é uma forma de registro associado ao subdomínio KoT.

No decorrer das páginas, Dante (2018) apresenta os significados de fração nas formas parte-todo, razão, operador como uma estrutura multiplicativa e quociente, chamando-as de ideias das frações. Essa forma de desencadear significados para a fração, associa-se aos subdomínios KMT na categoria formas de apresentar o conteúdo e KFLM via teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo; elementos indispensáveis à compreensão dos números racionais, por Kieren (1976).

A exploração da primeira ideia (relação parte-todo) se dá mediante à disponibilização ao estudante de situações-problemas que fazem uso de objetos do cotidiano como um pedaço de bolo exposto na Figura 1 (Dante, 2018, p.172):

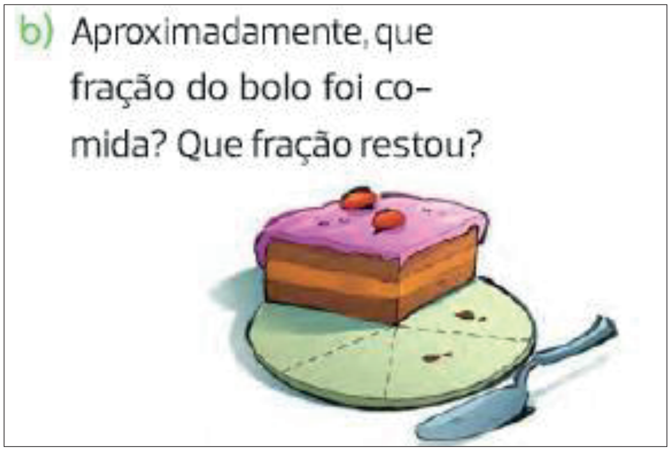
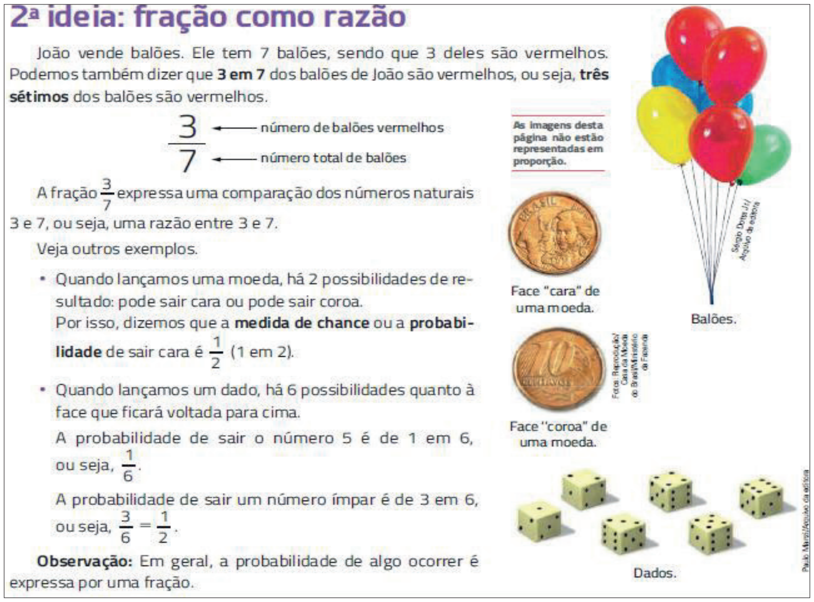


Figura 1: Relação parte-todo da fração

No conteúdo dessa figura, pode-se observar que o pedaço restante do bolo é composto por dois pedaços referente à divisão indicada na base, fazendo com que o aluno trabalhe a ideia de que nem sempre a parte a ser considerada, estará dividida conforme espera-se na relação parte-todo. Tal situação pode desencadear um erro de aprendizado, uma possível categoria do subdomínio KFLM.

A segunda ideia das frações que envolve a razão, é abordada através de uma situação em que João tem 7 balões dos quais 3 são vermelhos, conforme conteúdo da Figura 2 (Dante, 2018, p.174):



2ª ideia: fração como razão

João vende balões. Ele tem 7 balões, sendo que 3 deles são vermelhos. Podemos também dizer que **3 em 7** dos balões de João são vermelhos, ou seja, **três sétimos** dos balões são vermelhos.

$\frac{3}{7}$ ← número de balões vermelhos / ← número total de balões

A fração $\frac{3}{7}$ expressa uma comparação dos números naturais 3 e 7, ou seja, uma razão entre 3 e 7.

Veja outros exemplos.

- Quando lançamos uma moeda, há 2 possibilidades de resultado: pode sair cara ou pode sair coroa.
  Por isso, dizemos que a **medida de chance** ou a **probabilidade** de sair cara é $\frac{1}{2}$ (1 em 2).
- Quando lançamos um dado, há 6 possibilidades quanto à face que ficará voltada para cima.
  A probabilidade de sair o número 5 é de 1 em 6, ou seja, $\frac{1}{6}$.
  A probabilidade de sair um número ímpar é de 3 em 6, ou seja, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Observação: Em geral, a probabilidade de algo ocorrer é expressa por uma fração.

Figura 2: Razão como representação de fração

No livro há uma orientação didática para o professor referente ao conteúdo da Figura 2: "ao trabalhar a ideia de parte/todo das frações, temos, por exemplo, uma figura dividida em partes iguais. Agora, na ideia de razão, temos um conjunto de figuras iguais das quais algumas estão pintadas" (Dante, 2018, p. 174). A forma restrita de conceber a relação parte-todo e razão denota uma lacuna no subdomínio KoT, pois ao remetermos a situação-problema dos pedaços de bolo (Figura 1) observamos a relação parte-todo associada à situação contínua (medida) e, no caso dos balões (Figura 2) ao caso discreto (contagem).

A ideia de fração como razão está adequada quando associada às medidas de chances de lançamentos de moedas e dados (fiFgura 2), dado o contexto probabilístico de eventos equiprováveis, ou seja, todos os elementos têm a mesma chance de ser sorteados. Em termos de subdomínio do modelo MTSK e as respectivas categorias, converge para o KFLM (Teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo) e para o KoT (conceitos e significados associados).

Na seção relativa à ideia de fração como operador há situações-problemas envolvendo a utilização de malha quadriculada (Figura 3) para ampliar ou reduzir figuras planas (Dante, 2018, p.194), o que configura o subdomínio KFLM na categoria teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo e o KMT na categoria formas de apresentar o conteúdo.

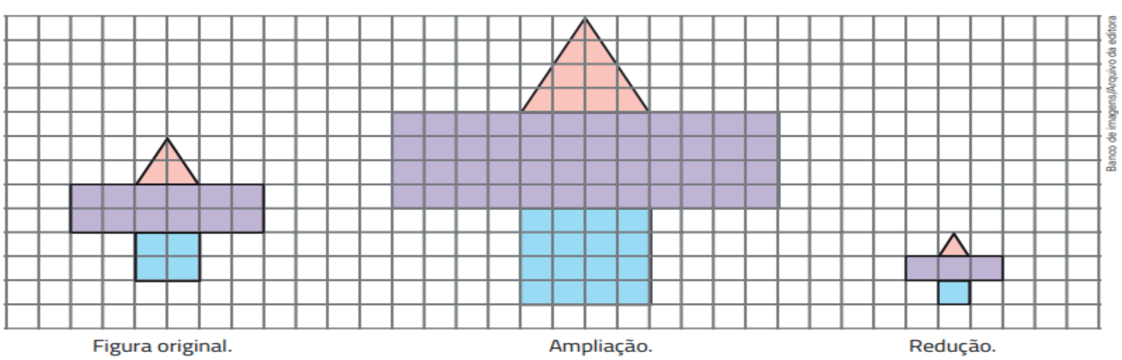


Figura 3: Fração como operador

Na ampliação da figura original (Figura 3), as medidas de abertura dos ângulos foram mantidas e as medidas de comprimento dos segmentos de reta foram dobradas, ou seja, foram multiplicadas por 2. Na redução da figura original, as medidas de abertura dos ângulos foram mantidas e as medidas de comprimento dos segmentos de reta foram consideradas pela metade, ou seja, foram divididas por 2 ou foram multiplicadas por ½ (Dante, 2018).

A quarta e última ideia das frações é a de quociente, ou seja, “a fração indica uma divisão” (Dante, 2018, p.178). Em termos de subdomínio e categoria, vincula-se ao KoT (conceitos e significados associados).

O livro traz, por fim, a relação de frações e medidas, cujas tarefas propostas permitem associar diferentes grandezas. Uma recomendação didática é a verificação dos conhecimentos prévios dos alunos sobre as principais grandezas e a relação entre as respectivas unidades de medidas, para que possam aplicar ao conteúdo de frações. As situações-problemas envolvem os submúltiplos de litro, da moeda Real, hora, quilograma e metro, evidenciando o subdomínio KFLM na categoria teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo e o KMT nas formas de apresentar o conteúdo, conforme recomendado em Kieren (1976).

Considerações finais

A proposta de redação deste relato de pesquisa a partir do trabalho desenvolvido por Batista (2023) visa responder quais conhecimentos especializados do professor/autor que ensina matemática acerca dos números racionais, o livro didático está priorizando em suas escolhas didáticas?

Na forma de apresentação do objeto de conhecimento fração segundo as ideias parte-todo, razão, operador como uma estrutura multiplicativa e quociente, houve convergência com os fundamentos matemáticos, cognitivos e instrucionais dos números racionais propostos por Kieren (1976).

No que diz respeito às escolhas didáticas foi priorizado conhecimentos especializados dos dois domínios (Conhecimento Matemático (MK) e Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (PCK)). Em relação ao domínio MK foram contemplados os subdomínios Conhecimento de Tópicos (KoT) e Conhecimento da Estrutura da Matemática (KSM). Em relação ao domínio PCK foram contemplados os subdomínios Conhecimento do Ensino de Matemática (KMT) e Conhecimento das Características da Aprendizagem da Matemática (KFLM).

O subdomínio KoT inicialmente foi associado por conta da ausência conceitual dos números racionais. Em outro momento, o vínculo estabeleceu-se pela forma restrita de conceituar a relação parte-todo com grandeza contínua e razão com grandeza discreta.

Posteriormente, a associação foi esstabelecida pela utilização da representação pictórica como forma de acesso ao objeto matemático fração. Na categoria conceito, duas ideias de fração, a razão como forma de quantificar a chance probabilísitica e o quociente foram associados ao KoT.

O subdomínio KSM, na categoria conexão trnsversal foi associado à reprodução de uma atividade lúdica na História da Matemática, referente a construção de nós equidistantes em um pedaço de corda como exemplo de acesso ao objeto matemático via imagem conceitual de fração.

Em relação ao subdomínio Conhecimento do Ensino de Matemática (KMT) a associação inicial deu-se pela forma como Dante (2018) organizou o livro didático para a produção de significados via ideias de fração: parte-todo, razão, operador como uma estrutura multiplicativa e quociente. No que diz respeito à categoria formas de apresentar o conteúdo, foi associado o subdomínio KMT por utilizar o material didático malha quadriculada para promover a ampliação e redução de figuras planas via operador como estrutura multiplicativa para fração.

O subdomínio KFLM na categoria dificuldades dos alunos foi associada à ausência de exposição de que a forma fracionária e decimal são representações matemáticas dos números racionais. A teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo enquanto categoria, foi associado à utilização de material didático como a malha quadriculada e aplicação de situações-problemas envolvendo medidas como forma de desenvolvimento das habilidades relativas à ideia de frações.

Finalizamos a redação deste relato de pesquisa sugerindo a inclusão do aporte teórico metodológico dos Registros de Representação Semiótica no processo de análise dos dados na categoria formas de registros e representações, vinculado ao subdomínio Conhecimento de Tópicos (KoT). Na seção “Resultados e discussões” constatamos que na formulação de tarefas contidas no livro didático, não foi considerado a importância do custo cognitivo na conversão das representações matemáticas entre registros.

Por exemplo, no conteúdo da tarefa exposta com o auxílio daa Figura 3, temos uma conversão de representação do registro pictórico para o registro numérico. Em termos de habilidade, a proposta da tarefa, requer que o aluno consiga utilizar o opearador como estrutura multiplicativa de fração e constate que na figura ampliada, cada segmento de reta tem o dobro do comprimento que o segmento original. No caso da redução da figura, o comprimento de cada segmento de reta é metade da medida do segmento original. Em ambos os casos, os ângulos internos mantém-se congruentes. No entanto, não há proposta de tarefa que valorize o sentido contrário dessa conversão de representação matemática entre registros. Mais especificamente, é importante que seja proposto uma tarefa que forneça o valor do operador, por exemplo, cada novo segmento de reta é o triplo do comprimento do segmento de reta original. A partir desta informação, propor que o aluno desenhe uma figura original composta de segmentos de reta e o respectivo “novo” desenho, levando em conta a necessidade de ser capaz de reconhecer uma ampliação de figura com invariância nos seus ângulos internos.

Essa valorização da atividade cognitiva do aluno na conversão das representações matemáticas no duplo sentido (ida e volta) requer um desequilíbrio em termos de custo cognitivo (ação mental) por conta da apreensão conceitual (conhecimento prévio do aluno) necessário para o êxito na resolução da tarefa. Acrescenta-se que a inclusão deste aporte teórico metodológico na análise do modelo MTSK traz implicações também no domínio do Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (PCK), mais especificamente no subdomínio KFLM, ao considerar como categoria de análise a teoria psicológica associada ao aprendizado do conteúdo.

Referencias

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Batista, E.F.M. (2023). *Análise de livros didáticos á luz do modelo MTSK: um foco nos números racionais* [Dissertação de mestrado, Universidade Federal de São Carlos]. https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/18128

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The mathematics teacher’s specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Dante, L.R. (2018). *Teláris matemática: 6º ano do Ensino Fundamental.* 7a 3. ed. Ática.

Editora Moderna (Org.). (2018). *Araribá mais: Matemática, 6º ano do Ensino Fundamental*. Moderna.

Flores-Medrano, E., Montes, M.A. Carrillo, J., Contreras, L. C., Muñoz Catalán, M. C., Liñán, M. M. (2016). El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema, 30*(54), 204-221. https://www.redalyc.org/pdf/2912/291245156011.pdf

Gil, A. C. (2022). *Como elaborar projetos de pesquisas.* 7ª ed. Atlas.

Kieren, T. E. (1976). On the Mathematical, Cognitive, and Instructional Foundations of Rational Numbers. En R.A. Lesh, y D.A. Bradbard (Eds.), *Number and measurement* (pp.101-144). OHERIC/SMEA.

Litoldo, B. F., Almeida, M.V.R. y Ribeiro, M. (2018). Conhecimento especializado do professor que ensina matemática: uma análise do livro didático no âmbito das frações. *Tangram – Revista de Educação Matemática, 1*(3), 3-23. https://doi.org/10.30612/tangram.v1i3.7370

Marques, A. B. A. (2018). *Um estudo de conhecimentos de futuros professores de matemática para o ensino de números racionais* [Tese de doutorado, Universidade Anhanguera de São Paulo]. https://repositorio.pgsskroton.com/handle/123456789/32033

Ministério da Educação de Brasil [MEC]. (2018). *Base Nacional Comum Curricular.* Autor.

Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo., J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *XVII Investigación en Educación Matemática* (403-410). SEIEM.

Ribeiro, M. (2018). Das Generalidades às Especificidades do Conhecimento do Professor que Ensina Matemática: Metodologias na Conceitualização (Entender e Desenvolver) do Conhecimento Interpretativo. En A.M.P. Oliveira y M.I.R. Ortigão (Eds.), *Abordagens Teóricas e Metodológicas nas Pesquisas em Educação Matemática* (pp. 167-186). Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Ribeiro, N. S., Oliveira, F., Dalben, A. y Ribeiro, M. (2021). O uso do modelo MTSK para a análise do livro didático: algumas problemáticas. En J.G. Moriel Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 373-380). Congresseme.

Rodrigues. A.L. y Teixeira, B.R. (2021). Conhecimento Especializado do Professor de Matemática em Dissertações e Teses Brasileiras. *Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas, 22*(3), 310-316. https://doi.org/10.17921/2447-8733.2021v22n3p310-316

Rogeri, N.K.O. (2015). *Conhecimentos de professores dos anos iniciais para o ensino dos números racionais em sua representação decimal* [Tese de doutorado, Universidade Anhanguera de São Paulo]. https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/

Zero, B.M., Oliveira, P.C. y D`Alessandro Neto, R. (2021). Conhecimento matemático para o ensino através do Estado da Arte envolvendo Números Racionais em pesquisas brasileiras. *Revista Baiana de Educação Matemática, 2*(1), 1-23. https://doi.org/10.47207/rbem.v2i01.12450

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL FUTURO PROFESOR QUE ENSEÑA EL ESPACIO PROYECTIVO EN EL ENTORNO RURAL

Specialized Knowledge of the Future Teacher Teaching Projective Space in the Rural Environment

Mejía-Barajas, M.
Universidad Industrial de Santander, Colombia

Temática: 1 – MTSK en la formación docente

Introducción

La enseñanza de la geometría es una de las ramas matemáticas más olvidadas por los profesores, pues ha sido desplazada hacia el final de los planes de área, para desaparecer en la Educación Secundaria (Aguilar, 2008). Aun así, cuando se enseña se limita al espacio euclidiano, referente a la medición, ángulos y figuras bidimensionales. Esto se remite a una consecuencia, y es que no se enseñan las bases espaciales para el aprendizaje de la geometría (como lo es el espacio proyectivo) (Ball et al., 2008). Dicha problemática surge desde la educación inicial del profesorado, donde se generan tendencias de enseñanza como la predilección hacía la enseñanza del pensamiento numérico. Por ello, esta investigación pretende caracterizar el Conocimiento Especializado del profesor que enseña el espacio proyectivo a partir del modelo que plantean Carrillo et al. (2018), desde la vertiente de la formación inicial, pues resulta relevante el estudio de la perspectiva del futuro profesional en los deberes esenciales de la profesión como el diseño de tareas y planeaciones matemáticas (Acevedo-Rincón, 2020).

Bases teóricas

El estudio del pensamiento espacial es imprescindible en los currículos de Colombia, pues el sentido espacial es necesario en el área de las matemáticas y la vida diaria. Así, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia [MEN] (1998) a través de documentos como los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas y los Lineamientos Curriculares presentan el sistema geométrico en el denominado Pensamiento Espacial, el cual es considerado como "el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales" (MEN, 1998, p. 37). En los documentos anteriores los sistemas geométricos constituyen un soporte para la exploración del espacio tridimensional, el cual es mediado por la realidad externa. Este pensamiento debe ser desarrollado desde dimensiones espaciales como la topológica, proyectiva y euclidiana (Piaget e Inhelder, 1956). La dimensión proyectiva se desarrolla continuamente y tiene su fuerte en la etapa de la Educación Básica Primaria, pues en ella se deben establecer relaciones entre objetos, y habilidades proyectivas tales como traslación, rotación, el corte y el dibujo a escala. En este trabajo, usando el modelo Mathematics Teachers' Specialised Knowledge (MTSK, Carrillo et al., 2018) se busca explorar los subdominios del conocimiento matemático de futuros profesores al adaptar una planeación para el entorno rural.

Enfoque metodológico

Este estudio se desarrolla desde una perspectiva cualitativa de investigación, entendida como aquella comprensión de los fenómenos sociales desde su espacio natural y contextual (Hernández-Sampieri, 2018). De ella, procede el

Mejía-Barajas, M. (2023). Conocimiento especializado del futuro profesor que enseña el espacio proyectivo en el entorno rural. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.178-179). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

paradigma hermenéutico interpretativo que abarca el estudio de caso como un proceso en el que se "investiga un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto real de existencia, cuando los límites entre el fenómeno y el contexto no son claramente evidentes y en los cuales existen múltiples fuentes de evidencia que pueden usarse", (Yin, 1984, p.23). Metodológicamente, se aborda la investigación por medio del Estudio de Clase o Lesson Study, que es una propuesta de origen japonés donde se trabaja colaborativamente en un ciclo de fases de observación de dos entornos (urbano y rural), planeación de tareas conjunta con los futuros profesores, intervención en el campo rural y análisis y discusión; el cual busca apuntar a la mejora (Lewis y Tsuchida, 1998). Estos momentos trabajan de la mano con el modelo MTSK, donde a partir de talleres se espera caracterizar el conocimiento especializado que tienen los futuros profesores de Educación Básica Primaria de segundo semestre que cursan la asignatura de Didáctica de la Matemática I, en subdominios como el KoT que se refiere al conocimiento matemático en sí mismo; KPM entendido como el conocimiento de la práctica matemática y KMT como aquel conocimiento propio de la enseñanza de las matemáticas mediante la adaptación de tareas matemáticas escolares de un entorno urbano a uno rural. La recolección de datos se hará mediante videograbaciones para luego realizar transcripciones que permitan un análisis narrativo de los datos.

Resultados esperados

La adaptación de tareas matemáticas según las características del entorno en el que se encuentran los estudiantes (urbano a rural) presupone un reto al conocimiento especializado de los futuros profesores que enseñan el espacio proyectivo, pues actualmente no se cuenta con suficientes referencias de experiencias similares que medien la propuesta de llevar tareas matemáticas acordes a las necesidades y el contexto de los estudiantes y guiados por el modelo del MTSK. Se espera reconocer el nivel de comprensión y profundización que tienen los futuros profesores en los inicios de su formación profesional en el pregrado. Adicionalmente a esto, la especificidad de los resultados permite el estudio de los planes de estudio y fundamentos del área de matemáticas de la Licenciatura en Educación Básica Primaria.

Agradecimientos

Esta publicación es producto de la investigación que inicia en las asignaturas "Trabajo de Grado 1 y 2" de la Escuela de Educación de la Universidad Industrial de Santander (Colombia). Las investigadoras agradecen a la Vicerrectoría de Investigación y Extensión, por el apoyo al semillero de investigación STEAM+H del Grupo de Investigación Atenea, de la escuela de Educación de la Universidad Industrial de Santander.

Referencias

Acevedo-Rincon, J. (2020, March). Relevance of the mathematics teacher's specialized knowledge model in the planning and interpretation processes at the spatial thinking. *Journal of Physics: Conference Series* 1514, 012019. DOI 10.1088/1742-6596/1514/1/012019

Aguilar, J. (2008). La Geometría: de las ideas del espacio. *Investigación educativa, 12*(21), 171-180.

Ball, D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Meldrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N. ,Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Hernandéz-Sampieri, R. H. (2018). *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGraw Hill.

Lewis, C., y Tsuchida, I. (1998). A lesson is like a swiftly flowing river: Research lessons and the improvement of Japanese education. *American Educator, 14*(17), 50–52.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia [MEN]. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-89869.html

Piaget, J., y Inhelder, B. (1956). *The child's conception of space*. Routledge y Kegan Paul.

Yin, R. K. (1984). *Case Study Research: Design and Methods*. SAGE Publications.

.

EXPLORACIÓN DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO DE ECUACIONES LINEALES DE UNA PROFESORA EN FORMACIÓN

Exploring a pre-service teacher's didactic knowledge on the content of linear equation

Gazmuri-Sanhueza, M., Muñoz-Quezada, L.
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Temática: 1 – MTSK en la formación docente

Introducción

En los últimos años, Chile ha incorporado en las bases curriculares de educación básica nuevos Objetivos de Aprendizajes (OA) con respecto al eje temático Álgebra (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2018), hecho que requiere de los profesores conocimientos especializados para su enseñanza. Al respecto, Reyes-Escobar y Moreno (2021) señalan que los profesores se deben anticipar en su planificación a las diferentes formas de comprender e interpretar la variable; las dificultades con respecto al signo igual; las estrategias para las diversas representaciones; y los errores y obstáculos frecuentes que presentan los estudiantes durante su aprendizaje, con la intención de mejorar el proceso de enseñanza. Esto nos lleva a cuestionar: cómo los futuros profesores de matemática están preparados para enseñar Álgebra, particularmente, ecuaciones lineales. De este modo, el objetivo de este trabajo es caracterizar los elementos de los distintos subdominios del PCK de un PF sobre la enseñanza y aprendizaje de ecuaciones lineales.

Marco teórico

De acuerdo con Climent y Montes (2022), el MTSK permite analizar y comprender el conocimiento que un docente moviliza en distintos momentos de su actividad profesional. Está compuesto por dos dominios de conocimiento: el Conocimiento Matemático (MK) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), cada uno de los cuales se subdivide en tres subdominios.

Concordamos con Abell (2008) en que uno de los principales aportes del PCK es su utilidad para comprender y mejorar tanto la formación inicial como continua de los profesores, y, en este trabajo, nos enfocaremos en tres subdominios del PCK: Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS) (Climent y Montes, 2022).

Metodología

La investigación es de corte cualitativa, siendo un estudio de caso instrumental: una PF de la carrera Pedagogía en Matemáticas, que se encontraba realizando su Práctica final. La recogida de datos se realizó a través de un Plan de Clase (PC) de ecuaciones lineales diseñado por la PF y la observación, mediante la videograbación, de la

Gazmuri-Sanhueza, M. y Muñoz-Quezada, L. (2023). Exploración del conocimiento didáctico del contenido de ecuaciones lineales de una profesora en formación. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.180-181). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

implementación del PC en un curso de segundo año de enseñanza media (estudiantes entre los 14 y 16 años) en un colegio de la Región de Valparaíso en Chile.

Resultados

En este apartado, presentamos algunas evidencias del PCK de la PF.

En cuanto al KMT, observamos que la PF incluye en su planificación el uso de la balanza al comienzo de la clase con el objetivo de activar los conocimientos previos de los estudiantes. De este modo, podemos inferir, que la PF conoce un recurso didáctico material que utiliza como herramienta para introducir ecuaciones (Sosa y Reyes, 2022).

Respecto al KFLM, observamos que la PF aborda un error común en los estudiantes al resolver ecuaciones cuando la incógnita resulta ser negativa (e.g. de Prada y Martinez, 1994). En este caso, inferimos un indicio del conocimiento de la PF de las dificultades y errores asociados a las ecuaciones lineales.
Por último, el KMLS se evidencia en el objetivo de la clase que es "Resolver ecuaciones de primer grado en ejercicios y problemas planteados" el cual se encuentra en relación con el OA 08 de 8° Básico (MINEDUC, 2016). Podemos inferir que la PF acude a conocimientos previos de los estudiantes, evidenciando que tiene conocimiento de la secuenciación de los temas previos, con el propósito de llevarlos al objeto matemático ecuaciones cuadráticas, el cual es el tema que corresponde a este nivel escolar, presente en su planificación de la unidad.

Comentarios finales

Los resultados muestran evidencias del PCK de la PF en la planificación e implementación de una clase de ecuaciones lineales, destacando su conocimiento de algunas categorías del KMT y el KMLS, e indicios del KFLM. Como proyección, consideramos importante profundizar en estos subdominios de la PF, a través de una entrevista o cuestionario al respecto.

Reconocimiento

Este trabajo se ha realizado con el apoyo de Beca ANID Magíster Profesionales de la Educación, 2022 Folio No. 50220077; y ANID FONDECYT REGULAR No. 1230434.

Referencias

Abell, S. (2008). Twenty years later: does pedagogical content knowledge remain a useful idea? *International Journal of Science Education, 30*(10), 1405-1416.

Climent, N y Montes, M. A. (2022). El Modelo MTSK: antecedentes y estructura. En J. Carrillo, M. A. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 27-34). Dykinson S. L.

De Prada, M. y Martinez, I. (1994). *Cómo enseñar el lenguaje algebraico, las ecuaciones y los sistemas*. Ágora.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2018). *Bases curriculares Primero a Sexto básico*. Unidad de Currículum y Evaluación. Autor.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2016). *Bases curriculares Primero a Sexto básico.* Unidad de Currículum y Evaluación. Autor.

Reyes-Escobar, M. y Moreno, A. (2021). El conocimiento profesional del contenido de ecuaciones manifestado en la evaluación de docentes de primaria chilenos. En J. Moriel (Ed.), *V Congreso Iberoamericano sobre el Conocimiento Especializado del profesor de matemática* (pp. 224-230). Congresseme.

Sosa, L. y Reyes, A. M. (2022). Conocimiento de las enseñanzas de las matemáticas. En J. Carrillo, M. A. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 71-82). Dykinson S. L.

LA "DOBLE MIRADA" DEL FORMADOR DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS COMO CARACTERÍSTICA IDENTIFICATIVA DE SU CONOCIMIENTO

The "double look" of the mathematics teacher educator as an identifying characteristic of their knowledge

Reyes-Bravo, M.[a], Pascual, M.I.[b], Estrella, S.[a], Tarisfeño, S.[a], Contreras, L.C.[b]

[a] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

[b] Universidad de Huelva, España

Temática: 2 – MTSK del formador de profesores.

Resumen.
Se presenta un estudio descriptivo del conocimiento de ocho formadores de profesores de matemáticas en el contexto de un grupo de Lesson Study para la formación de profesores de primaria. Con el objetivo de identificar la doble mirada de los formadores, quienes piensan a la vez en sus futuros profesores y en los aprendices a los que éstos enseñarán matemáticas, el análisis se enfocó en los momentos en que el grupo de formadores expresaban su pensamiento al diseñar y discutir un plan de lección. Los diferentes fragmentos han sido analizados en un proceso top-down y bottom-up, el que se ha mostrado eficaz en la identificación de elementos del conocimiento especializado del formador. Se muestran evidencias del conocimiento especializado de los formadores, diferenciándolo de otros conocimientos que comparten con profesores de matemáticas.

Palabras clave. Conocimiento del formador de profesores, Doble mirada, Futuros profesores de primaria, Lesson Study.

Abstract.
We present a descriptive study of eight mathematics teacher educators' knowledge in the context of a Lesson Study group for Primary Teacher Education. With the objective of identifying the double look of the educators, who think both of their future teachers and of the apprentices to whom they will teach mathematics, the analysis focused on the moments in which the group of trainers expressed their thoughts when designing and discussing a lesson plan. The different fragments have been analyzed in a top-down and bottom-up process, which has been shown to be effective in identifying elements of the specialized mathematics teacher educator' knowledge. Evidence of the specialized knowledge of the educators is shown, differentiating it from other knowledge that they share with mathematics teachers.

Keywords. Mathematics teacher educator' knowledge, Double look, Preservice primary teachers, Lesson study.

Reyes-Bravo, M., Pascual, M.I., Estrella, S., Tarisfeño, S. y Contreras, L.C. (2023). La "doble mirada" del formador de profesores de matemáticas como característica identificativa de su conocimiento. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.182-189). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

Como señalan Beswick y Goos (2018), el alto grado de comprensión que han alcanzado las investigaciones acerca del conocimiento del profesor ha dado paso recientemente a estudios acerca del conocimiento del formador de profesores que enseñarán matemáticas (en adelante MTEK, utilizando las siglas en inglés de la nomenclatura acuñada por Jaworsky, 2008). Esta línea ha adquirido una relevancia creciente en los últimos años y su conceptualización forma parte emergente de la agenda de investigación en este ámbito. Son múltiples los foros de discusión donde hoy se debaten las diferentes aportaciones: en revistas, como *Journal of Mathematics Teacher Education*- en especial el monográfico de 2018- o *ZDM* -mográfico de 2014-, en los *International Handbook of Mathematics Teacher Education* (de 2008 y 2020), en los *ICMI Studies* o en los *Working Groups* de PME. De la misma forma que se ha asumido que el conocimiento a desarrollar en los estudiantes es una parte significativa del conocimiento que ha de tener el profesor, las primeras aproximaciones al MTEK han asumido que el conocimiento a construir en los futuros profesores ha de formar parte esencial del conocimiento del formador, como un metaconocimiento (Beswick y Chapman, 2012). Asimismo, se asume que estos dos conocimientos (el del profesor y el del formador) son de diferente naturaleza (Ball, 2008; Jaworski, 2008; Zopf, 2010), entre otras razones, porque el contenido que se moviliza es diferente en ambos casos y porque las personas a quienes se enseña son también diferentes. Estas dos diferencias han llevado a algunos autores (Zaslavsky y Leikin, 2004) a sugerir que “la mirada” del formador puede ayudar a diferenciar, en estudios empíricos, entre conocimientos que pueden ser propios tanto de formadores como de profesores, de aquellos que son específicos del formador. Debemos entender la idea de “mirada” desde la doble perspectiva de a quién va dirigido el proceso de enseñanza y de cuál es el contenido que se moviliza. No olvidando que, como se ha señalado (Lloyd, 2006), a veces el contenido que se moviliza es el mismo (en nuestro caso el contenido matemático), aunque se aborde desde diferente perspectiva, y que, por tanto, obviar este elemento común podría distorsionar nuestra capacidad analítica. En este sentido, es importante señalar que, mientras el profesor centra su mirada en sus estudiantes, el formador tiene una doble mirada, en los futuros profesores y sus futuros estudiantes.

En este trabajo nos centraremos en esa doble mirada, analizando fragmentos de la transcripción de las discusiones entre formadores de profesores acerca de un diseño de actividades formativas en el contexto de Lesson Study. En el transcurso de esa discusión se ponen de relieve diferentes aspectos del conocimiento del formador de los que seleccionaremos aquellos que entendemos que son claramente diferentes de los conocimientos propios de un profesor de matemáticas y en los que se evidencia esa doble mirada, para responder a la pregunta de cómo la doble mirada del formador caracteriza distintos elementos de su conocimiento profesional.

Fundamentos teóricos

El análisis de los avances en la conceptualización del conocimiento del formador como un metaconocimiento sobre la enseñanza es esclarecedor en relación con los dos escenarios entre los que oscila su discurso. En adelante, debido a las características del contexto donde se ha desarrollado la investigación, estos escenarios serán la formación inicial docente y la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria.

De un lado, se podría decir que, el grado de madurez alcanzado a través de los diferentes modelos de conocimiento del profesor en las últimas décadas, ha servido como base y referente en las investigaciones sobre el conocimiento del formador (Abell et al., 2009; Chick y Beswick, 2018). La nota común que tienen la mayoría de estas aportaciones es considerar al formador como un profesor, tomando como punto de partida la diferenciación entre conocimiento del contenido (CK) y conocimiento didáctico del contenido (PCK) propuesta por Shulman (1987) y reconfigurando cuál es ese contenido. Así, entendemos que el formador debe, como en el caso del profesor, conocer lo que enseña y cómo enseñarlo.

Se ha especulado acerca de qué subdominios y categorías podrían formar parte de estos dominios de conocimiento (Contreras, 2021; Escudero-Ávila et al. 2021; Masingila, Olanoff, y Kimani et al., 2018; Pascual et al., 2021; Ponte, 2011; Zopf, 2010), en algunos casos como reflexión teórica y en otros con alguna evidencia empírica. En todos ellos se asume que, de la misma manera que el conocimiento de las matemáticas es una parte clave del conocimiento del profesor de matemáticas, el propio conocimiento del profesor constituye gran parte del conocimiento del contenido de la enseñanza para el formador (Castro-Superfine, 2020; Zaslavsky y Leikin, 2004).

Así, diferentes modelos de conocimiento profesional del profesor se han ido integrando en el conocimiento del formador, lo que nos lleva a reflexionar sobre cómo son las relaciones entre estos dos conocimientos. Una de las aportaciones clave en esta línea, que inicia la discusión entre la forma en que ambos conocimientos se imbrican, es la de Jaworski (2008). La autora propone una relación modelizada por la intersección de conjuntos entre el conocimiento exclusivo del formador y el conocimiento distintivo del profesor, que genera un cuerpo de conocimiento compartido entre formador y profesor.

La identificación de los conocimientos que son propios del formador podría realizarse desde el análisis de lo que caracterizan sus prácticas. En ese sentido, Zaslavsky y Leikin (2004) reflexionan sobre una adaptación de la tríada de enseñanza de Jaworski (1992, 1994) a la formación docente; así, la creación de oportunidades para que los estudiantes aprendan matemáticas se transformaría en la creación de oportunidades para que los futuros profesores aprendan a enseñar matemáticas. De esta forma, los elementos de la tríada serían la gestión del aprendizaje de los futuros profesores de matemáticas, contenidos desafiantes para ellos (dentro del cual se encuentra la tríada de enseñanza de los profesores) y sensibilidad del formador hacia los futuros profesores.

Tener como referencia la adaptación de la tríada es otra forma de ver la doble transferencia que cita Olanoff (2011) y que es objeto de estudio en nuestra investigación. Para esta autora, el aprendiz en el que pone el foco el formador (el estudiante de matemáticas o el futuro profesor) podría ayudar a identificar estos conocimientos que son específicos del formador. En este sentido, podemos considerar el papel del conocimiento del profesor que movilizan los formadores cuando el foco es el estudiante de matemáticas y el conocimiento del formador sobre cómo construir este y otros contenidos cuando el foco es el futuro profesor.

Para analizar el conocimiento del profesor que moviliza el formador hemos recurrido a los presupuestos teóricos y a las herramientas analíticas del Modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK - Carrillo, et al., 2018). Si bien el conocimiento del profesor movilizado por el formador puede estructurarse con MTSK, hemos de tener en cuenta las diferencias entre cómo cada uno de estos actores se apropia y desarrolla este conocimiento. Investigaciones anteriores (Pascual, 2021; Zopf, 2010) ponen de manifiesto estas diferencias. De estos resultados, se desprende la consideración de un conocimiento matemático de mayor alcance y profundidad y de un conocimiento profesional, en su globalidad, más rico en conexiones, en el caso del formador.

Cuando la mirada del formador se posa en el futuro profesor, entendemos que el contenido a enseñar se reconfigura y el conocimiento didáctico de ese contenido se expande hacia consideraciones propias, de la enseñanza-aprendizaje de los estudiantes de primaria, de los futuros profesores. En relación con el contenido, siguiendo las aportaciones de Ponte (2011) sobre la estructuración del contenido de la formación docente, consideramos el conocimiento profesional a construir, las prácticas profesionales de los profesores de matemáticas y el desarrollo de la identidad profesional. Con respecto a la organización del conocimiento didáctico de ese contenido, partimos de una adaptación del PCK propuesto por el MTSK para diferenciar conocimiento de la enseñanza del contenido, conocimiento de las características de aprendizaje del contenido y conocimiento de los estándares de aprendizaje del contenido.

Metodología

Este estudio adopta el paradigma cualitativo de tipo descriptivo (Hernández, et al., 2010) y tiene el objetivo de identificar la doble mirada del formador al diseñar y discutir un plan de lección para la formación inicial de profesores de primaria como detonante para la identificación de su conocimiento profesional. Esta práctica se enmarca en el contexto de un Lesson Study (LS) entre formadores que promueve el desarrollo del sentido numérico en los futuros profesores que enseñarán matemáticas, específicamente sobre la división entre números naturales. El grupo se conformó con ocho formadores de profesores de primaria en Chile, siete mujeres y un hombre, cuyas edades oscilaban entre los 35 y 59 años. Desde su formación de pregrado, cinco de los formadores son profesores de primaria y tres son profesores de matemáticas de secundaria; según su formación de postgrado, seis tienen el grado de magíster y dos el grado de doctor, en las áreas de educación y educación matemática.

El proceso de LS se desarrolló durante el año 2022, con una duración de ocho sesiones y dos implementaciones. Las sesiones se efectuaron vía remota en modalidad sincrónica, empleando la plataforma Zoom, principalmente debido a la gran distancia que separa a los miembros del grupo (alrededor de 1500 km). Además, se trabajó de manera asincrónica a través de un documento compartido en Google Drive, donde se elaboró colaborativamente el plan de lección. Para este estudio se analizaron cinco sesiones del LS previas a la primera implementación de la versión 1 del plan de lección. Se seleccionaron unidades de información que atendieran al fenómeno de estudio, realizándose un análisis top-down y bottom-up (Grbich, 2003) de los datos. El análisis desde la teoría se ha realizado siguiendo las categorías del modelo MTSK para la identificación de conocimiento especializado, y la interpretación de las evidencias empíricas sobre conocimiento del formador ha seguido un proceso de análisis de contenido (Krippendorff, 1990).

Resultados

Las tres primeras evidencias que se muestran se encuentran en la segunda sesión de LS, cuya meta fue que los formadores concertaran qué conocimientos esperaban desarrollar en los futuros profesores sobre sentido numérico. En la primera evidencia, una de las formadoras plantea la necesidad de diseñar una situación problema en un escenario distinto al de manejo del dinero, considerando el contexto rural en que los futuros profesores que ella forma se desempeñarán.

> F: Es cierto que los niños rurales sí necesitan tener el manejo del dinero, pero el manejo del dinero no es tan espontáneo [por eso en la formación de futuros profesores incluiría actividades que permitieran] calcular cuánto afrecho voy a mezclar con trigos, avenas y cosas para los pollos, y [hacerles ver cómo] matematizar eso.

En este extracto la formadora manifiesta su doble mirada al diseñar un problema para futuros profesores, pero con la mirada puesta en el contexto de quienes serán sus estudiantes de primaria. Del ejemplo se desprende cómo la formadora aprovecha su conocimiento como profesora de matemática, específicamente *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT) para trabajar con sus futuros profesores, evidenciando su conocimiento sobre el diseño de tareas en formación inicial.

La segunda evidencia se presenta al momento de decidir qué conocimientos matemáticos y didácticos de las matemáticas guiarán el diseño de la lección para los futuros profesores de primaria, de acuerdo a los estándares para carreras de Pedagogía en Educación General Básica en Chile (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2022). Un formador propone un estándar disciplinario que indica "Justifica la pertinencia de estrategias de cálculo mental con números naturales y racionales, tales como descomposición, composición y compensación, y las aplica en situaciones de estimación de cantidades y medidas" (p. 114). Su decisión se basa en la reflexión generada entre los integrantes del grupo durante la sesión.

> F: Estábamos viendo también que los niños y las niñas [estudiantes de primaria] tienen problemas a veces con el tema del algoritmo, al parecer no son tan hábiles en eso, pero quizás podrían desarrollar ciertas destrezas para obtener divisiones mentalmente.

En este fragmento se observa cómo la mirada de una dificultad en Educación Primaria sirve como detonante para sugerir orientaciones en la lección que se diseñará para la formación de futuros profesores. De esta evidencia se infiere cómo el formador aprovecha su conocimiento como profesor de matemática sobre las dificultades de los niños de primaria al trabajar la división, particularmente su *conocimiento sobre las características de aprendizaje de las matemáticas* (KFLM), para enfocar la lección que se implementará con los futuros profesores, mostrando su conocimiento sobre cómo delimitar los objetivos de la tarea de formación docente, en su papel como formador.

En el contexto de decidir el objeto matemático a desarrollar en la lección desde el sentido numérico, una de las formadoras plantea que en su experiencia ha constatado el desconocimiento de los futuros profesores sobre la división, afirmando que en muchos casos “no saben dividir”. Es ahí cuando identificamos la tercera evidencia de doble mirada.

> F: Una [como formadora] tiene que […] trabajar con ellos [futuros profesores] desde explicarles como que estuviera trabajando con los niños [estudiantes de primaria], en el fondo modelando para que puedan ellos a su vez aprender.

Este episodio evidencia el empleo de una estrategia de formación de futuros profesores, siendo un conocimiento específico del formador, si bien su foco está en el aprendizaje de los futuros profesores, lleva a cabo el proceso de enseñanza como lo haría con estudiantes de primaria. Esta estrategia utilizada por los formadores ha recibido el nombre de *modelling*, entendiéndose como “la práctica de mostrar intencionalmente determinados comportamientos de enseñanza con el objetivo de promover el aprendizaje profesional de los estudiantes de pedagogía” (Lunenberg et al., 2007, p. 589). Se deduce de la evidencia cómo la formadora imbrica sus conocimientos sobre la formación de profesores y sobre la enseñanza en primaria a través del empleo de estrategias para la formación inicial docente, con la intención de desarrollar el *conocimiento de los temas matemáticos* (KoT sobre la división) y el *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT) de los futuros profesores.

Las siguientes evidencias responden a las sesiones 3, 4 y 5 de LS. El objetivo de las sesiones fue el diseño de la lección sobre división promoviendo el sentido numérico. Se lograron acuerdos sobre los fundamentos que regirán la situación problema que sustentará el plan de la lección. Durante la conversación, una de las formadoras plantea la siguiente afirmación.

> F: Creo que también es que el estudiante [futuro profesor] se dé cuenta de lo necesario que es el conocimiento, tanto el conocimiento disciplinar, pero [también] en el sentido de tener claridad de por qué existen esos algoritmos, el sentido de dónde viene… Porque en la medida que él [futuro profesor] tenga esa claridad, él va a poder aplicar distintas estrategias y va a poder entrar a discutir con sus estudiantes.

De este fragmento se evidencia conocimiento sobre la importancia de desempaquetar los conocimientos sobre la división con los futuros profesores, para que estos aprendan a desempaquetarlo con sus estudiantes de primaria. En efecto, se observa la doble mirada puesto que la formadora manifiesta su *conocimiento de los temas matemáticos* (KoT, procedimientos) con foco en que los futuros profesores puedan construir estrategias para enseñar la división a estudiantes de primaria, promoviendo el *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT, estrategias). Este conocimiento de la formadora es relevante, en tanto que en su discurso manifiesta como necesarias las relaciones entre distintos subdominios del MTSK que se promueven para desarrollar conocimiento en los futuros profesores. Continuando con su participación, la formadora agrega la siguiente locución, que permite robustecer la idea expresada previamente.

> F: Pero si él [futuro profesor] no tiene claridad en por qué, de dónde proviene el algoritmo, de por qué hay algoritmos alternativos, que en realidad están todos relacionados en el caso de la división, es poco probable que él pueda trabajar el sentido numérico con sus propios estudiantes después.

Respecto a las preguntas de discusión que se les plantearán a los futuros profesores durante la lección, una de las formadoras propone la identificación y reflexión sobre errores que podrían cometer estudiantes de primaria al resolver divisiones. En efecto, busca que la actividad que se proponga en la formación inicial docente tenga como horizonte las dificultades con las que podrían enfrentarse en su quehacer como profesores, convirtiéndose en una tarea profesional.

> F: También podría pedirse que [el futuro profesor] razonara por qué se equivocó [el estudiante de primaria], en que se equivocó, qué error cometió ahí [...], o sea dónde considera que el estudiante [...] cometió el error.

Esta evidencia se refuerza con lo expresado a continuación por la formadora, quien complementa su postura aludiendo a su ejercicio en la formación inicial docente. En este fragmento se observa la importancia que otorga a que el futuro profesor comprenda el error del niño, estableciéndose la doble mirada.

> F: Porque mientras uno como profe [que enseña matemáticas] no logra identificar el error del estudiante [de primaria] no lo puedes apoyar. O sea es lo que por ejemplo yo hago con mis estudiantes [de pedagogía], les pongo una situación donde hay errores y le digo “identifique el error y a partir de eso elabore una estrategia”, pero el problema es que si no identificaste el error cualquier estrategia que plantees no va a estar adecuada.

Ambas evidencias muestran el conocimiento de la formadora sobre el diseño de tareas para la formación inicial docente que permitan desarrollar la práctica profesional de *noticing*, sustentado en los errores de niños de primaria (Jacobs et al., 2010, p. 169). En definitiva, la doble mirada se expresa en la evidencia expuesta ya que la formadora pretende construir en los futuros profesores *conocimiento sobre las características de aprendizaje de las matemáticas* (KFLM), pensando en las dificultades de los niños de primaria al trabajar la división, por medio del desarrollo del *noticing*.

Discusión y conclusiones

Con el objeto de identificar la doble mirada de los formadores, quienes piensan a la vez en sus futuros profesores y en los aprendices a los que éstos enseñarán matemáticas, se rescataron evidencias sobre la “presencia del aprendiz” en el aula de la formación inicial de profesores. El conocimiento del formador sobre este niño hipotético actúa como detonante para el tipo de tareas que promueve en sus lecciones.

Con base en las reflexiones analizadas, esta doble mirada del formador incide en el MTSK que fomenta en los futuros profesores de primaria. Por esta razón, se infiere que la existencia de una doble mirada formaría parte del conocimiento del formador, observable en las afirmaciones emitidas por el grupo de formadores durante el diseño de la lección del LS.

Se encontró que el conocimiento del formador comparte elementos del MTSK relacionado con el conocimiento de un profesor de matemática. Así, las evidencias encontradas al respecto soportan los resultados de investigaciones anteriores en las que se considera la inclusión de ambos conocimientos (Castro-Superfine, 2020; Zaslavsky y Leikin, 2004).

Los resultados obtenidos podrían servir como contribución al desarrollo de un modelo de conocimiento del formador de profesores, ya que se muestran evidencias del conocimiento especializado de los formadores, diferenciándolo de otros conocimientos que comparten con profesores de matemáticas. En especial, pueden diferenciarse en el conocimiento del contenido (matemática como objeto de enseñanza y aprendizaje y práctica docente de noticing), y el conocimiento didáctico de ese contenido, principalmente en cómo se estructura su enseñanza, en términos de Shulman. Estos resultados, podrían encuadrarse en categorías que algunos autores han avanzado como posibles modelos teóricos (Pascual, 2021). En particular, sobre el conocimiento didáctico del contenido de la formación, se destaca la presencia del conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje del contenido de la formación inicial de profesores que enseñarán matemáticas.

Referencias

Abell, S. K., Rogers, M. A. P., Hanuscin, D. L., Lee, M. H., y Gagnon, M. J. (2009). Preparing the next generation of science teacher educators: A model for developing PCK for teaching science teachers. *Journal of Science Teacher Education, 20*(1), 77-93. https://doi.org/10.1007/s10972-008-9115-6

Ball, D.L. (2008). Mathematical knowledge for teaching: Explicating and examining a program of research. *Presentation made at the annual meeting of the AERA*. New York.

Beswick, K. y Chapman, O. (2012). Paper for discussion group 12: Mathematics teacher educators' knowledge for teaching. In S. J. Cho (Ed.), *The proceedings of the 12th International Congress on Mathematics Education: Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 629–632). Springer.

Beswick, K., y Goos, M. (2018). Mathematics teacher educator knowledge: What do we know and where to from here?. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21,* 417–427. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9416-4

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M; Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco-Mora, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalan, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Contreras, L. C. (2021). Una aproximación a un modelo de conocimiento del formador de profesores de matemáticas. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática, 1*(1), e202101. https://doi.org/10.54541/reviem.v1i1.12

Chick, H., y Beswick, K. (2018). Teaching teachers to teach Boris: a framework for mathematics teacher educator pedagogical content knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*, 475–499. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9362-y

Escudero-Ávila, D., Montes, M., y Contreras, C. (2021). What do mathematics teacher educators need to know? Reflections emerging from the content of mathematics teacher Education. En M. Goos y K. Beswick (Eds.), *The learning and development of mathematics teacher educators* (pp. 23-40). https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8_2

Grbich, C. (2003). *New Approaches in Social Research.* SAGE.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L., y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for research in mathematics education, 41*(2), 169-202. https://doi.org/10.5951/JRESEMATHEDUC.41.2.0169

Jaworski, B. (1992). Mathematics teaching: What is it? *For the Learning of Mathematics, 12*(1), 8–14.

Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry.* The Falmer Press.

Jaworski, B. (2008). Development of the mathematics teacher educator and its relation to teaching development. En B. Jaworski, y T. Wood (Eds.), *The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 335-361; Volume 4). Sense Publishers.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica.* Paidós.

Lloyd, G. M. (2006). Using K-12 mathematics curriculum materials in teacher education: Rationale, strategies, and preservice teachers' experiences. En K. Lynch-Davis, y R. L. Rider (Eds.), *The work of mathematics teacher educators: Continuing the conversation* (vol.3, pp.11-27). Association of Mathematics Teacher Educators Monograph.

Lunenberg, M., Korthagen, F., y Swennen, A. (2007). The teacher educator as a role model. *Teaching and teacher education, 23*(5), 586-601. https://doi.org/10.1016/j.tate.2006.11

Masingila, J. O., Olanoff, D. E., y Kimani, P. M. (2018). Mathematical knowledge for teaching teachers: Knowledge used and developed by mathematics teacher educators in learning to teach via problem solving. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21,* 429–450. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9389-8

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2022). *Estándares de la Profesión Docente. Carreras de Pedagogía en Educación General Básica*. Autor. https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2023/02/basica_2023_digital.pdf

Olanoff, D. (2011). Mathematical Knowledge for Teaching Teachers: The Case of Multiplication and Division of Fractions. *Mathematics Disertations.* Paper 64.

Pascual, M.I. (2021). *El conocimiento del formador de maestros en la etapa de formación inicial, en relación con la enseñanza de la Didáctica de las Matemáticas. Un estudio de caso* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. https://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/20208

Pascual, M. I., Montes, M., y Contreras, L. C. (2021). The Pedagogical Knowledge Deployed by a Primary Mathematics Teacher Educator in Teaching Symmetry. *Mathematics, 9*(11), 1241. MDPI AG. http://dx.doi.org/10.3390/math9111241

Ponte, J. P. (2011). Teachers' knowledge, practice, and identity: Essential aspects of teachers' learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(6), 413–417. https://doi.org/10.1007/s10857-011-9195-7

Zaslavsky, O., y Leikin, R. (2004). Professional development of mathematics teacher educators: Growth through practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7,* 5–32. https://doi.org/10.1023/B:JMTE.0000009971.13834.e1

Zopf, D. (2010). *Mathematical knowledge for teaching teachers: The mathematical work of and knowledge entailed by teacher education* [Doctoral dissertation, University of Michigan]. https://hdl.handle.net/2027.42/77702

CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO DA FORMAÇÃO: O CASO DO FORMADOR DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA QUE É INVESTIGADOR DA DOCÊNCIA

Pedagogical knowledge of the training content: the case of the mathematics teacher educator who being a researcher of teaching

Coura, F. C. F.[a], Passos, C. L. B.[b]

[a] Universidade Federal de São João del Rei, Brasil
[b] Universidade Federal de São Carlos, Brasil

Temática: 2 – MTSK del formador de profesores

Resumo.
Neste trabalho, focalizamos o formador de professores de Matemática, para compreender seu conhecimento especializado, identificando seus subdomínios. Exploramos a narrativa de experiências profissionais de uma formadora caracterizada como investigadora da docência, que se compromete com a formação de professores e com a docência, a partir das quais realiza suas investigações e produz conhecimentos da prática, que ofereçam suporte à sua atuação profissional e à de outros. Com a análise paradigmática de narrativas foi possível distinguir os três subdomínios que compõem o conhecimento pedagógico do conteúdo da formação entre os conhecimentos manifestados pela formadora.

Palavras-chave. Formador de professores de Matemática; Conhecimento do formador; MTSK, Narrativa.

Abstract.
In this work, we focus on Mathematics teacher educators to understand their specialized knowledge, identifying their subdomains. We explored the narrative of professional experiences of a Mathematics teacher educator who is a researcher of teaching, who is committed to the training of teachers and teaching, from which she conducts her investigations and produces knowledge of practice offering support to their own and other's professional practices. With the paradigmatic analysis of narratives, it was possible to distinguish the three subdomains that make up the pedagogical knowledge of the training content among the knowledge manifested by the teacher educator.

Keywords. Mathematics teacher educators; Teacher educator's knowledge; MTSK; Narrative.

Coura, F. C. F. y Passos, C. L. B. (2023). Conhecimento pedagógico do conteúdo da formação: o caso do formador de professores de matemática que é investigador da docência. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.190-197). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introdução

Voltamos o olhar para o formador, ou seja, o docente no Ensino Superior que atua na formação de professores que ensinam Matemática. Assim como Carrillo et al. (2019), em Coura e Passos (2017, p. 21), identificamos que a formação desse docente, no contexto das universidades brasileiras, se deu no campo das disciplinas que serão seu objeto de ensino. Argumentamos sobre "a necessidade de pesquisas que tomem como objeto de investigação os conhecimentos de que o formador necessita para seu exercício profissional, principalmente para formar professores de Matemática (...)".

O presente estudo se coloca nesse sentido, com o objetivo compreender o conhecimento especializado do formador de professores de Matemática, identificando seus subdomínios. Exploramos a narrativa de experiências profissionais de uma formadora caracterizada como investigadora da docência, por se comprometer com a formação de professores e com a docência, a partir das quais realiza suas investigações e produz conhecimentos da prática, que ofereçam suporte à sua atuação profissional e à de outros.

Centrar foco em uma formadora com esse perfil, que concentra sua atuação profissional no ensino de segunda ordem (Mure y Male, 2005), pode trazer contribuições para o campo de pesquisa especialmente no que se refere ao conhecimento pedagógico do conteúdo da formação de professores. Também pode colaborar para a superação de um dos desafios enumerados por Carrilo (2019, p. 10): "concentrar-se no Conhecimento (Especializado) do formador de professores de Matemática" [1].

Referencial teórico

O campo de pesquisa sobre o conhecimento do formador tem autores que adotam uma perspectiva que emerge do MTSK (Carrilo et al., 2019; Contreras et al., 2017) e outros (Sánchez García y García Blanco, 2004; Tamir, 2005) que não se relacionam com o modelo, mas que também argumentam a respeito da especificidade do conhecimento desse profissional em relação ao dos professores. Para a análise, tomamos como referencial teórico as reflexões de Carrilo et al. (2019), pela potencialidade que o conhecimento pedagógico do conteúdo da formação traz para demarcar diferenças em relação ao conhecimento de formadores que circunscrevem sua atuação profissional (ensino e pesquisa) ao campo disciplinar da Matemática.

Esses autores propõem organizar o conhecimento especializado do formador de professores de Matemática em dois subdomínios: o conhecimento do conteúdo da formação e o conhecimento pedagógico do conteúdo da formação. O conhecimento do conteúdo, refere-se ao conteúdo da formação de professores, que inclui o conhecimento especializado do professor de Matemática (MTSK)[2] (Carrillo et al., 2018) e o extrapola, incluindo também as conexões que o formador deve estabelecer entre os diferentes aspectos do conteúdo matemático quanto à profundidade desse conhecimento e habilidades vinculadas ao exercício profissional do docente.

O conhecimento pedagógico do conteúdo da formação, conforme Carrilo et al. (2019), permitirá ao formador transformar o conteúdo da formação em sua forma mais acessível para os estudantes da licenciatura e professores. Inspirados no conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) do professor, os autores o organizam em três subdomínios. O conhecimento do ensino do conteúdo da formação

[1] "Enfocar el Mathematics Teacher Educators' (Specialized) Knowledge" (Carrillo, 2019, p. 10)

[2] O MTSK é um modelo para explicar o conhecimento que os professores têm da matemática como objeto de ensino e aprendizagem (Carrillo et al., 2018). É organizado em três domínios: Crenças, sobre matemática e sobre ensino e aprendizagem de Matemática, Conhecimento Matemático (Mathematical Knowledge – MK) e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (Pedagogical Content Knowledge – PCK), sendo cada um dividido em três subdomínios. O MK é composto por: Conhecimento sobre os tópicos (Knowledge of topics – KoT), Conhecimento da estrutura da Matemática (Knowledge of the structure of mathematics – KSM) e Conhecimento da prática em Matemática (Knowledge of practices in mathematics – KPM). O PCK é dividido em Conhecimento do ensino de Matemática (Knowledge of mathematics teaching – KMT), Conhecimento das características da aprendizagem da Matemática (Knowledge of features of learning mathematics – KFLM) e Conhecimento dos padrões de aprendizagem em Matemática Knowledge of mathematics learning standards (KMLS).

abarca teorias e enfoques dessa formação, incluindo dinâmicas e tarefas que permitam desenhar cenários formativos para os futuros professores de Matemática, ou seja, organizar a formação. O conhecimento das características do desenvolvimento profissional do Professor de Matemática (PM) se refere como constroem o conhecimento e a identidade profissional e também os diferentes graus de evolução das habilidades profissionais. O conhecimento dos padrões da formação de professores abrange o nível educativo em que os professores em formação atuarão e outros níveis, assim como o currículo da formação de professores, proporcionando ao formador estabelecer, justificar e avaliar as metas de aprendizagem dos futuros professores.

Metodologia e contexto do estudo

Realizamos uma pesquisa qualitativa do tipo estudo de caso instrumental (Stake, 2009), ou seja, a partir de uma necessidade de compreensão global, tomamos um caso particular em estudo, tendo em vista alcançar um conhecimento mais profundo, mais do que conhecer o caso em particular. Então, focalizamos o caso de uma formadora de professores que ensinam matemática caracterizada em Coura (2018) como investigadora da docência, por se comprometer com a formação de professores e com a docência, a partir das quais realiza suas investigações e produz conhecimentos da prática, que ofereçam suporte à sua atuação profissional e à de outros. Com isso, almejamos compreender um fenômeno de espectro mais amplo: o conhecimento especializado do formador de professores de Matemática.

O material analisado é uma narrativa que registra parte da história de vida e de formação de Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino[3], produzida como recomendam Clandinin e Connelly (2011). A narrativa apresentada é uma sequência temporal de experiências que identificamos na fala da formadora e foi composta preservando sua voz proferida em uma entrevista e em sua própria produção acadêmica.
Em vista do recurso à sua produção bibliográfica, fizemos referência à formadora de dois modos: ora pelo primeiro nome, ao reportar o que revelou na entrevista, registrado em itálico; ora segundo as normas técnicas para citação de documentos, quando nos referimos à sua fala, presente em sua obra. Há trechos na narrativa que entendemos denotar conhecimentos que fundamentam e orientam suas ações e suas práticas como formadora.

A análise paradigmática de narrativas (Bolívar, 2002) foi usada para identificar os subdomínios do conhecimento revelados, recorrendo às reflexões de Carrillo et al. (2019) sobre o conhecimento do formador de professores de Matemática. Registramos entre colchetes o tipo de conhecimento revelado em um parágrafo ou em parte dele. No final do texto, registramos considerações sobre o conhecimento especializado de Márcia como formadora de professores de Matemática.

Narrativa de márcia cristina de costa trindade cyrino

Márcia concluiu a Licenciatura em Matemática na UNESP de Presidente Prudente em 1988. Foi professora de matemática na rede pública estadual de São Paulo, de 1986 a 1997, ano em que concluiu o Mestrado em Educação Matemática na UNESP de Rio Claro, com estudo realizado sobre material bibliográfico de referência na formação do professor de Matemática das séries iniciais do Ensino Fundamental, orientado pelo professor Rômulo Campus Lins. Em 1998, ingressou na Universidade Estadual de Londrina (UEL) como professora substituta e, desde então, tem trabalhado na Licenciatura em Matemática. Em 2001, aprovada em concurso público, tornou-se servidora efetiva na instituição. Em 2003, defendeu a tese “As várias formas de conhecimento e o perfil do professor de Matemática na ótica do futuro professor”, desenvolvida na Universidade de São Paulo (USP), sob orientação do professor Ubiratan D’Ambrosio.

[3] A realização da pesquisa, identificando as participantes, ocorreu conforme processo registrado na Plataforma Brasil com Certificado de apresentação para Apreciação Ética (CAAE) número 49632015.3.0000.5504

No triênio de 2007 a 2009, foi coordenadora do GT7 (Grupo de Trabalho): “Formação de professores que ensinam Matemática”, da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (Sbem), que tem por escopo a pesquisa sobre a formação inicial ou continuada, bem como outros processos constitutivos da docência, de professores que ensinam matemática, inclusive de seus formadores, em todos os níveis e modalidades de ensino e contextos socioculturais de aprendizagem docente. Realizou dois estágios de pós-doutorado na Universidade de Lisboa e ocupou vários cargos de gestão na UEL – vice-diretora do Centro de Ciências Exatas, coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação, coordenadora do curso de matemática, entre outros – e, fora da instituição, foi membro de Comitês Assessores de Área da Fundação Araucária, do Conselho Fiscal da SBEM e da Comissão Editorial Nacional da SBEM. Em 2016, se tornou professora titular da UEL e, quando conversamos, era bolsista de produtividade em pesquisa do CNPQ.

Na entrevista que gerou a narrativa, Márcia contou sua trajetória de vida, de formação e atuação profissional, defendeu a perspectiva de formação de professores de matemática em que acreditava e que trabalhou para colocar em prática. O texto em tela tem como marco inicial o ano de 1985, com o ingresso na Licenciatura em Matemática, e contempla especialmente sua transição de professora de Matemática a formadora. Ainda que se refira a período anterior à sua atuação na formação inicial de professores de Matemática, a fala e a produção acadêmica são de uma docente que acumula mais de 30 anos de atuação e de pesquisa no campo da docência e da formação de professores.

A minha inserção como professora da educação básica, ela foi paralela à minha formação

Durante o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, Márcia estudou em escolas públicas – *“Eu sempre estudei em escola pública”*. Gostava de matemática e tinha facilidade para aprender – *“A matemática sempre foi uma disciplina que eu gostava. Porque bastavam as aulas para que eu conseguisse resolver tudo aquilo que me era pedido”* –, por isso (Cyrino, 2016b), em 1985, iniciou o curso de Licenciatura em Matemática da UNESP de Presidente Prudente, cidade do interior do estado de São Paulo.

Atuou como professora na Educação Básica quando ainda era estudante da Licenciatura em Matemática, o que lhe “permitiu adquirir experiência em sala de aula, com uma carga pequena, e possibilidade de articulação com as discussões teóricas que ocorreram nas disciplinas de Prática e Metodologia de Ensino” (Cyrino, 2016b, p. 7), algo importante para sua formação e de seus colegas.

E eu acho que isso, para mim, foi bastante importante, porque eu levava as situações que aconteciam nas minhas aulas para a licenciatura. Então, quando eu fui para fazer o estágio, para fazer as disciplinas de didática, de prática, eu sempre dizia: “Olha, mas lá na minha escola, acontece assim, assim”. E isso, eu acho que, não só para mim, mas, para minha turma, foi bastante importante, levar essa experiência que eu tinha na escola para as aulas. Porque, quando eu fiz o curso de licenciatura, o estágio era muito curtinho Eram poucas horas. Eu acho que nós dávamos umas cinco aulas só. E tinha uma pasta imensa para ser preenchida. Muito tempo dedicado à observação. [Conhecimento dos padrões de formação].

Para ela, esse tipo de estágio, proposto como espaço isolado para a experiência prática, com finalidade em si mesmo e que se realiza de modo desarticulado do restante do curso, não tem contribuído para preparação e emancipação profissional na formação inicial de professores (Cyrino, 2008) [Conhecimento do ensino do conteúdo da formação]. Foi o que ela vivenciou como estagiária que a levou a considerar que, em comparação com seu ingresso na carreira docente, o estágio “não chegou ‘nem aos pés’ desta experiência. Pena que meus professores da graduação não exploraram mais minhas inquietações” (Cyrino, 2016b, p. 7). Sua prática como professora de matemática foi que lhe proporcionou uma imersão no campo profissional.

Trabalhar com a formação me fazia pensar na minha própria atuação como professora

Em 1989, ano seguinte à sua formatura na Licenciatura em Matemática, começou a trabalhar também em escolas particulares. Nesse ano, ingressou no Centro Específico de Formação e Aperfeiçoamento do Magistério (CEFAM) de Presidente Prudente, ministrando aulas de matemática, e, a partir de 1990, ficou responsável pela disciplina Conteúdo e Metodologia de Ciências e Matemática. Como registrou em Cyrino (1996), os CEFAM tinham condições especiais de organização do trabalho. As vivências e as condições de trabalho proporcionadas por essa instituição foram importantes para a sua formação e para a sua trajetória: *"para mim, foi muito importante trabalhar no CEFAM e eu fiquei lá por muito tempo. Eu deixei o CEFAM quando eu fui para o mestrado. E isso de trabalhar com a formação me fazia pensar na minha própria atuação como professora. E foi isso que me levou para o mestrado".*

Pensar sobre sua atuação como professora incluía considerar a formação dos futuros professores que ensinam matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental – "Dentre estas disciplinas, encontram-se a Matemática e a Metodologia do Ensino de Matemática que são estudadas separadamente, não permitindo assim uma identificação entre o objeto do conhecimento e o objeto de ensino na formação dos futuros professores" (Cyrino, 1996, p.1). [Conhecimento do ensino do conteúdo da formação]

A partir de sua vivência no CEFAM, ela passou a considerar que a "formação do professor tem que ser entendida como um processo contínuo de troca e de criação coletiva, devendo ser apenas mais um processo partilhado de aprendizagem" (Cyrino, 1997, p. 10) [Conhecimento das características do desenvolvimento profissional do PM]. Para Márcia, o ser professor, que na ocasião era o que atuaria nas séries iniciais do Ensino Fundamental, contemplava as características de um professor, um corpo de conhecimentos que se relacionavam com o conteúdo matemático, mas não se limitavam a ele.

O futuro professor das séries iniciais do ensino fundamental precisa conhecer a forma com que a criança constrói o seu conhecimento e o modo pelo qual este se desenvolve; como se dão para ela as representações matemáticas e qual a importância da Matemática na sua formação para, em seguida, propor caminhos e métodos que transformem seus alunos em sujeitos ativos em relação à matemática. Precisa conhecer mais profundamente alguns conceitos matemáticos, suas definições e propriedades, suas inter-relações, e suas conexões com outras áreas do conhecimento de forma reflexiva e crítica. Para isso, faz-se necessário um permanente esforço de conhecer a evolução histórica da Matemática, o desenvolvimento da criança e o seu conhecimento prévio em Matemática, os processos envolvidos na aprendizagem e como a criança utilizará os conhecimentos matemáticos já adquiridos na sua formação. (Cyrino, 1997, p. 10). [Conhecimento dos padrões de formação]

Se o trabalho no CEFAM a levou a pensar sobre a formação de professores – *"a minha preocupação com a formação de professores, começou com essa minha atuação no CEFAM"* –, a sua atuação na formação continuada de professores de matemática reforçou esse interesse – *"E, em paralelo, eu atuava na Delegacia de Ensino como coordenadora de matemática e também fazia a capacitação de professores, essa preocupação já veio mesmo antes de eu entrar na UEL".*

Como coordenadora de matemática da Divisão Regional de Ensino (DRE) de Presidente Prudente, a partir do ano de 1992, Márcia era responsável por cursos de capacitação para professores de matemática da Educação Básica:

E uma outra coisa que me angustiava: como que era a modalidade das capacitações? Eram cursos. Cursos de trinta horas. Cursos de sessenta horas. E eu observava que os professores, muitos iam participar da capacitação, porque isso lhe daria uma ascensão funcional. Outros não. Outros iam, porque queriam aprender, queriam fazer diferente. E sempre a fala dos professores era: "O que é que tem de novo pra eu ensinar matemática?". E, naquele momento, eu sabia que não existia uma receita, "o que tem de novo". No entanto, eu sabia que essa era uma maneira de cativar os professores.

Então, eu usei muito aquele Atividades Matemáticas, que foi um material elaborado pela CENP. [Conhecimento do ensino do conteúdo da formação]

Nessa época, ela observava o que mais tarde confirmou (Cyrino, 2013, 2016a) mediante análises de capacitações como essa, que mostraram a baixa eficácia de programas de formação fundamentados em cursos de treinamentos, uma vez que quase nunca levavam em conta as diferentes necessidades da prática do professor.

A minha prática como formadora dentro da Delegacia de Ensino me fez ver que essa modalidade de formação que eles tinham não funcionava. Porque eu ia pra São Paulo, fazia os cursos e, depois, tinha que reproduzir esses cursos para os professores da região. Não funcionava do ponto de vista do que eu acredito que seja formação de professores. E isso direcionou a minha pesquisa. [Conhecimento das características do desenvolvimento profissional do PM].

Análise dos resultados e considerações

Focalizamos o formador de professores de Matemática, com o objetivo de compreender seu conhecimento especializado, identificando seus subdomínios. Exploramos a narrativa de uma docente que tem formação, atuação profissional e pesquisa vinculadas à formação de professores que ensinam Matemática e à docência. Analisando a narrativa, o recurso ao modelo proposto por (Carrillo et al., 2019) permitiu identificarmos exemplos dos três subdomínios que compõem o conhecimento pedagógico do conteúdo da formação, dimensão específica do conhecimento do formador.

O conhecimento do ensino do conteúdo da formação está presente quando ela afirma que a desarticulação entre dimensões prática (Estágio e disciplinas de metodologia de ensino) e teórica (disciplinas de Matemática) não contribuem para a formação de futuros professores e quando argumenta sobre as atividades selecionadas para cursos de capacitação de professores (Atividades Matemáticas), mostrando seu conhecimento sobre como organizar a formação. O conhecimento das características do desenvolvimento profissional do PM revela-se por seu entendimento da formação de professores como processo contínuo e partilhado de aprendizagem e de que cursos de capacitação orientados pela reprodução de práticas não funcionavam nessa perspectiva, indicando que ela entende como se constroem o conhecimento e a identidade profissional docentes. Pode-se ver o conhecimento dos padrões de formação, quando considera o estágio que cursou a licenciatura "curtinho", em comparação com a carga horária mínima obrigatória no currículo nacional de formação de professores vigente (Resolução CNE/CP nº 2, de 20 de dezembro de 2019, 2019), e quando enumera o que o professor dos anos iniciais precisa conhecer, mostrando conhecimento do currículo do nível educativo em que os professores em formação atuarão, e, em vista disso, o que precisam estudar na formação inicial.

Assim como outras docentes (Coura, 2018; Coura y Passos, 2021), Márcia se insere no grupo de formadores que passaram do ensino de primeira ordem, cujo objeto era a matemática na Educação Básica, para o de segunda ordem, ou seja, o de ensinar sobre o ensino (Murray y Male, 2005). Sua narrativa dá a ver como esse movimento e sua atuação profissional, incluindo a pesquisa, geraram conhecimentos específicos do formador, especialmente o conhecimento pedagógico do conteúdo da formação, que visa a contribuir para que seus alunos, futuros professores de Matemática ou docentes em exercício, constituam conhecimentos próprios da docência.

Trata-se de uma docente com perfil diferente do formador de professores de Matemática típico no contexto brasileiro, que embora licenciado, realizou seus estudos de pós-graduação na Matemática, ou seja, tem uma "(...) formação acadêmica voltada para os conteúdos circunscritos à área de conhecimento da Matemática, com pouca interlocução com aspectos relacionados ao ensinar e ao aprender e com a formação de professores" (Coura y Passos, 2017, p.12). Em virtude dessa diferença, é de se esperar que o conhecimento pedagógico do conteúdo da formação manifestado por uma formadora de professores que é investigadora da docência seja qualitativamente distinto. Isso se verifica comparando os resultados apresentados neste texto com os que Almeida e Ribeiro (2020) identificaram ao estudar sobre o conhecimento especializado de um formador de professores que é matemático, embora haja ressalvas a essa comparação no que se refere à diferença dos dados analisados nos dois estudos (narrativa de experiência e prática em contexto de formação inicial de professores).

Agradecimentos

Agradecemos as participantes da pesquisa de Coura (2018), especialmente, a Márcia Cyrino, cuja narrativa trouxemos em parte a este texto.

Referências

Almeida, M. V. R. de, y Ribeiro, M. (2020). Conhecimento Especializado de um formador de professores de Matemática ao ensinar o Teorema do Algoritmo da Divisão Euclidiana: um foco nos exemplos e explicações. *TANGRAM-Revista De Educação Matemática, 3*(4), 24-56.

Bolívar, A. (2002). ¿De nobis ipsis silemus?: Epistemología de la investigación biográfico-narrativa en educación. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 4*(1), 1-26.

Carrillo, J., Montes, M., Codes, M., Contreras, L. C., y Climent, N. (2019). El conocimiento didáctico del contenido del formador de professores de matemáticas: su construcción a partir del análisis del conocimiento especializado pretentido em el futuro professor. En F. Imbernón, A. S. Neto, y I. Fortunato (Orgs.), *Formação permanente de professores: experiências ibero-americanas* (pp. 324-343). Hipótese.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Carrillo, J. (2019). Panorámica de la investigación con MTSK en el mundo. En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.7-12). Universidad de Huelva Publicaciones.

Clandinin, D. J., y Connelly, F. M. (2011). *Pesquisa narrativa:* experiência e história em pesquisa qualitativa (Grupo de Pesquisa Narrativa e Educação de Professores ILEEI/UFU, Trads.). EDUFU.

Coura, F. C. F. (2018). *Desenvolvimento profissional de formadores de professores de Matemática que são investigadores da docência* [Tese de doutorado em Educação, Universidade Federal de São Carlos].

Coura, F. C. F., y Passos, C. L. B. (2017). Estado do conhecimento sobre o formador de professores de Matemática no Brasil. *Zetetike,* 25(1), 7–26.

Coura, F. C. F., y Passos, C. L. B. (2021). Conhecimento do formador de professores de matemática que é investigador da docência. *Zetetike,* 29(00), e021007.

Contreras, L. C., Montes, M., Muñoz-Catalán, M. C., y Joglar, N. (2017). Fundamentos teóricos para conformar un modelo de conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas. En J. Carrillo y L. C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 11-25). CGSE.

Cyrino, M. C. C. T. (1996). Tendências pedagógicas em Educação Matemática: categoria para análise de material bibliográfico de referência, na formação do professor de Matemática de 1a à 4a séries do primeiro grau. En: *Anais do 4º Encontro Paulista de Educação Matemática* (pp. 302-309), São Paulo, SP.

Cyrino, M. C. C. T. (1997). *Levantamento e análise de material bibliográfico de referência na formação do professor de matemática de 1ª a 4ª série do ensino fundamental* [Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista].

Cyrino, M. C. C. T. (2008). Preparação e emancipação profissional na formação inicial do professor de Matemática. En A.M. Nacarato y A.V.A. Paiva (Eds.), *A formação do professor que ensina Matemática:* perspectivas e pesquisa (pp. 77-88). Autêntica.

Cyrino, M. C. C. T. (2013). Formação de professores que ensinam matemática em Comunidades de Prática. En: *Anais do 7º Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 188-195), Montevideo, Uruguay.

Cyrino, M. C. C. T. (2016a). Mathematics teachers' professional identity development in communities of practice: Reifications of proportional reasoning teaching. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(54), 165-187.

Cyrino M. C. C. T. (2016b). *Memorial circunstanciado* (Memorial apresentado como requisito do Concurso público para provimento no cargo de professor de ensino superior da carreira do Magistério Público do Ensino Superior do Paraná, na classe de Professor Titular, no Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina). Universidade Estadual de Londrina.

Murray, J., y Male, T. (2005). Becoming a teacher educator: evidence from the field. *Teaching and Teacher Education: An International Journal of Research and Studies, 21*(2), 125-142.

Resolução CNE/CP nº 2, de 20 de dezembro de 2019 (2019). *Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica* (BNC Formação). Ministério da Educação.

Sánchez García, V. y García Blanco, M. (2004). Formadores de profesores de matemáticas: una aproximación teórica a su conocimiento profesional. *Revista de educación,* 333, 481-493.

Stake, R. E. (2009). *A arte da investigação com estudos de caso* (2ª ed.). Fundação Calouste Gulbenkian.

Tamir, P. (2005). Conocimiento profesional y personal de los profesores y de los formadores de profesores. Profesorado. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 9(2), 1-9*.

CONOCIMIENTO DEL FORMADOR DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS SOBRE LA CONSTRUCCIÓN DE LA IDENTIDAD DOCENTE: EL CASO DE LA VALIDACIÓN

Mathematics Teacher Educator's Knowledge about teacher's identity construction: a case of validation

Avalos-Rogel, A.[a], Hernández Escobar, M.[a], Bustos Rubilar, A. S.[b]

[a] Escuela Normal Superior de México, México
[b] Universidad de Valparaíso, Chile

Temática: 2 – MTSK del formador de profesores

Resumen.
Se indagaron saberes del formador de profesores sobre la constitución de la identidad profesional de los estudiantes para maestros de matemáticas, con el fin de contribuir a un modelo del Conocimiento Especializado del Formador de Profesores de Matemáticas. A partir de clases en las instituciones formadoras, se analizaron cualitativamente aspectos que atendían a rasgos de la identidad –lo específico del logos, del pathos y del ethos del docente de matemáticas-, en ambientes de discusión basado en el método cuasiempírico de pruebas y refutaciones, y su eventual reproducción en el practicum con adolescentes. Se reconocen estilos heurísticos en la enseñanza de la disciplina y la reflexión de las estructuras didácticas para la validación. Se discute la heterogeneidad de los conocimientos de los formadores y la transparencia de la formación y tránsitos de la identidad profesional de los futuros docentes.

Palabras clave. Formador de profesores, identidad docente, validación en matemáticas, MTSK.

Abstract.
The knowledge of teacher educators about identity construction of pre-service teachers of Mathematics was researched to supplement a Mathematics Teacher Educator's Knowledge Model. Identity traits aspects such as the logos, pathos, and ethos of mathematics teachers were researched qualitatively by means of analysing the lessons taught in teacher education schools in a process of discussion based on the quasi-empirical method of proofs and refutations as well as its eventual reproduction in their practicum with adolescents. Heuristic mathematics teaching styles and the reflection on didactic structures for validation are recognized. Also, the diversity in teacher educators' knowledge, the transparency of teacher education, and the pre-service teachers' identity transitions are discussed.

Keywords. Teacher educators, Professional identities, Validity in Mathematics, MTSK.

Avalos-Rogel, A., Hernández Escobar, M. y Bustos Rubilar, A. S. (2023). Conocimiento del formador de profesores de matemáticas sobre la construcción de la identidad docente: el caso de la validación. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.198-205). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

Esta comunicación tiene el propósito de contribuir a la construcción de un modelo sobre el conocimiento del formador de profesores de matemáticas mediante un estudio de tipo cualitativo que pretende recuperar sus saberes sobre la construcción de la identidad de los futuros docentes de matemáticas. El contexto se ubicó en las aulas del 4º semestre de la Licenciatura en Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas, en la Escuela Normal Superior de México, y se justifica en el marco de un proyecto de construcción colectiva propuesto por la Red Iberoamericana de Investigación sobre el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, y por una necesidad institucional en México de comprender los saberes de los formadores en el marco del diseño del currículum de la formación inicial en sus actuales reformas.

Se documentó el desarrollo de estrategias heurísticas de instalación de pruebas y refutaciones con estudiantes de un curso en el que se trabajan contenidos de geometría plana, así como la implementación de estrategias de reflexión sobre dichas técnicas (Diario Oficial de la Federación [DOF], 2018). Esta elección obedeció al supuesto de que los saberes y las prácticas de los formadores en torno a la conformación de la identidad del docente de matemáticas se instalan y desarrollan en las aulas donde se estudia matemáticas, y no solo en las de las asignaturas donde tiene lugar el practicum (Even y Ball, 2009). El caso de la validación matemática en geometría plana podría ser un buen nicho para la investigación, por ser un lugar donde los formadores de profesores podrían tener mayor consciencia de sus conocimientos para la construcción de la identidad.

Planteamiento del problema

Este estudio tiene una doble restricción en la construcción del objeto de estudio: la caracterización de los saberes de los formadores de profesores y la del proceso de conformación de la identidad de los profesores de matemáticas. Dada la emergencia de ambos campos, en este planteamiento del problema se advierte que la poca sedimentación conceptual hace difícil la construcción del nudo epistémico entre ambos.

El campo de los saberes de los formadores de docentes de Matemáticas es muy reciente, con poca producción (Avalos-Rogel y Hernández-Escobar, 2021; Pascual, Montes y Contreras, 2019). Se reconoce una línea de investigación inspirada en el marco teórico conocido como *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*, o modelo MTSK (Carrillo et al., 2018), que, como se verá en los referentes conceptuales, lleva a tener como primer acercamiento la caracterización del conocimiento en dominios: el del conocimiento matemático y el del conocimiento pedagógico del contenido.

La construcción del objeto de estudio es la relativa a la caracterización de los saberes de los formadores de profesores sobre la identidad del profesor de matemáticas en marcos institucionales y sobre los procesos para su conformación. Los estados de conocimiento sobre los estudios de la construcción de la identidad de los docentes en formación (Beijard et al., 2004; Ducoing, 2011) muestran que hay pocos consensos en la definición de identidad, y sólo en unos pocos estudios se explicita la relación entre el conocimiento de la disciplina y la identidad profesional.

La pregunta para el caso de los docentes de matemáticas está relacionada con el saber que da especificidad e identidad a su profesión, y cómo se adquiere en la formación. Algunos estudios destacan el componente del conocimiento práctico como rasgo de distinción profesional identitaria. Se han documentado casos en los que la reflexión sobre las metodologías de enseñanza del formador de profesores son utilizadas por los docentes en formación en su propia enseñanza (Fuenlabrada, 2011). Sin embargo, pocos estudios recuperan otros componentes no cognitivos (Beijard et al., 2004), como el ético y el emocional.

Dado que la construcción identitaria es relacional, y que desde los estándares y enfoques de los programas de la formación inicial hay un componente que la prevé ¿Cuáles son los saberes, conocimientos y prácticas de los formadores de docentes que favorecen el desarrollo de la identidad y cómo se actualizan en el desarrollo de actividades de matemáticas, particularmente las de validación geométrica?

El objetivo es entonces dar cuenta de algunos saberes de los formadores de docentes en la conformación de la identidad, comprender algunos tejidos simbólicos que se construyen y la manera como se instalan en el imaginario colectivo (Castoriadis, 1986) para que sirvan al estudiante para profesor como referente en su querer ser docente y su devenir como tal.

Referentes conceptuales

Para el análisis del referente empírico se recurrió a dos marcos teóricos: el MTSK y la Teoría de la acción comunicativa. El conocimiento de los formadores de profesores de matemáticas es una línea inspirada en el marco teórico conocido como *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*, o modelo MTSK (Carrillo, et al., 2018). El MTSK consta de seis subdominios, tres referentes al conocimiento matemático (MK); y otros tres referentes al conocimiento pedagógico de contenido (PCK).

Se ha admitido que el conocimiento del formador de profesores de matemáticas incluye conocimientos, saberes y prácticas compartidos con los profesores de matemáticas, y otros que son distintos a los del profesor de matemáticas (ver Figura 1), justo los que se refieren a la construcción de la identidad profesional. Por esta razón se retoma la propuesta, que aún sigue en construcción, conocida como MTEK (Pascual et al., 2019), y con la cual se discute en este trabajo.

Figura 1. Aproximación a un modelo de conocimiento del formador MTEK
Fuente: Pascual (2020)

El formador de profesores de matemáticas tendría un papel central en la conformación de la identidad profesional: "Esta conceptualización implica que el formador tendría que poseer conocimiento que le permitiese: enseñar a pensar como un profesor, enseñar a conocer como un profesor, enseñar a sentirse como un profesor y enseñar a actuar como un profesor" (Feiman-Nemser, 2008, cit. en Pascual, 2020, p. 21)

Para recuperar los saberes de los formadores de profesores sobre la construcción de la identidad del docente de matemáticas, los que son explícitos por ellos mismos, y los que se manifiestan en la relación formativa, partimos de la Teoría de la acción comunicativa (Habermas, 1981). Desde la perspectiva de la racionalidad comunicativa, lo paradigmático es la relación intersubjetiva entre sujetos que son capaces de comunicarse por medio de una acción conjunta, para compartir techos simbólicos de significaciones desde su cultura, en este caso de la cultura de los profesores de matemáticas. Para Avalos-Rogel (2013a) el orden simbólico de las culturas magisteriales son entramados de significaciones entretejidas por un *ethos*, un *logos* y un *pathos* de la profesión docente, y recupera saberes de formadores de profesores en este entramado.

El *ethos* del docente de matemáticas es un sistema de disposiciones personales y sociales hacia la formación matemática que da cuenta de valores y pautas de conducta en relación con los otros. Los saberes del formador permiten hacer explícito su propio *ethos*, brindando un marco de identificación valoral, y con ello, como lo menciona Pascual (2020) enseñar a actuar como un profesor.

Y el *pathos* del docente se refiere a los procesos afectivos y motivacionales, ligados tanto al trabajo matemático como a la percepción de los aprendizajes de sus estudiantes y de su propia situación emocional hacia las matemáticas (Avalos-Rogel, 2013a), por lo tanto, los formadores ayudarán a construir la mirada para identificar indicios que permita desarrollar un tacto pedagógico y enseñar a sentirse como profesor.

El *logos* del docente es el saber docente relacionado con los saberes matemáticos. El formador tiene los conocimientos para hacer explícitas las normas socio matemáticas asociadas, y con ello eventualmente enseñar a pensar como un profesor y enseñar a conocer como un profesor. En este estudio, se recuperan saberes para fomentar a que se realice un proceso de experimentación en matemáticas. De acuerdo con De Villiers (2010), este proceso permite generar instancias para que los estudiantes exploren, verifiquen y expliquen con palabras sus afirmaciones durante el proceso de reformulación de conjeturas, tal como recomiendan Fahlgren y Brunström (2014).

Metodología

Se partió del supuesto de que la conformación de la identidad docente se inicia en la institución formadora, en el tránsito de la autopercepción como estudiante a una autopercepción como docente de matemáticas, con la mediación de un formador de profesores. Dado que la construcción de la identidad tiene lugar durante las interacciones sociales, se recurrió a la investigación cualitativa como perspectiva metodológica, para que fuera posible identificar redes simbólicas y significados compartidos de actores específicos en situaciones determinadas. Para lo cual se requirió el análisis de registros de observaciones de las clases de dos formadores, cada uno con un grupo de estudiantes en formación de cuarto semestre que cursaban la asignatura “Figuras y Cuerpos Geométricos” en la Licenciatura en Educación Secundaria Especialidad Matemáticas de la Escuela Normal Superior de México (Subsecretaría de Educación Básica y Normal, 2001). Los formadores tenían más de 10 años de experiencia en la formación, habían realizado maestrías en Matemática educativa, y estaban estudiando el doctorado en esa área. Uno de ellos tenía experiencia en educación secundaria.

Se eligió la validación matemática, la formulación de conjeturas y el proceso de refutación visto a través del contraejemplo, debido a que esto ha sido una estrategia de los formadores de profesores para la construcción del conocimiento y desarrollo del pensamiento matemático, en el sentido del Modelo de Lakatos simplificado para la heurística del descubrimiento matemático (Davis et al., 1983).

Se observaron y analizaron ambientes de formación que implicaron el desarrollo de estrategias heurísticas de los dos formadores, con la intención de que sus estudiantes descubrieran o redescubrieran conocimiento. Además se les cuestionó sobre su planeación, los fundamentos conceptuales en los que basaban sus estrategias, el tipo de problemas planteados, y con preguntas semiestructuradas, si estaban conscientes de que sus saberes y prácticas formativas contribuían a la formación de la identidad docente.

Las evidencias se codificaron por formador, el número de la secuencia y de la clase. Para el análisis de resultados, se recurrió a las categorías del *ethos*, *logos* y *pathos* de la identidad de los docentes de matemáticas.

Resultados

Los resultados del análisis de entrevistas, registros de observaciones y producciones escritas mostraron tres tipos de saberes y conocimientos de los formadores de profesores: sobre el impacto del estudio del contenido, sobre emociones y sentimientos en la interacción matemática y sobre el estilo docente en la actividad grupal.

Logos: saberes conceptuales y procedimentales matemáticos y de la didáctica implicada

Los formadores escogieron en su planeación proposiciones de geometría euclidiana conocidas por los futuros profesores, y las modificaron para convertirlas en conjeturas matemáticas falsas: "Un cuadrilátero siempre puede inscribirse en una circunferencia" (F1, sec 1, clase 1); "Traza una circunferencia, una cuerda en ella y la perpendicular a dicha cuerda que pasa por el centro del círculo. ¿En qué punto de la cuerda interseca la perpendicular?" (F2, sec 2, clase 5). Para el diseño de las actividades incorporaron lineamientos de la experimentación matemática formulada por De Villiers (2010).

Se identificó la siguiente estructura en la clase de uno de ellos, que se ratificó en la entrevista: el planteamiento de una conjetura; la verificación de que la conjetura era fundamental, y estar convencido de su veracidad o reformularla; la exploración con software de Geometría Dinámica; el momento de la refutación global, en la que el formador ayudó a someter la conjetura a pruebas experimentales (verificaciones), y disponer de contraejemplos que las refutaran; y la heurística de refutación, que permitió la refutación de la conjetura, para reformular la conjetura y perfeccionarla.

Ambos formadores fomentaron que su estilo heurístico causara controversia en los estudiantes, y conscientemente recurrieron a la discusión con el método cuasi empírico de pruebas y refutaciones (Davis et al.,1983): durante el análisis de la conjetura, el docente generaba oportunidades para propiciar contraejemplos, conjeturas que eran falibles y esa falibilidad permitió ponerla a prueba mediante ejemplos o contraejemplos. Finalmente, mediante el contraste del trabajo docente en geometría, se reflexionó sobre la posible implementación en el aula.

Pathos: emociones y sentimientos de los formadores, estudiantes y su expresión en la interacción

El conflicto cognitivo derivado del estudio de las matemáticas, por ejemplo en la prueba y su refutación, puede causar impacto emocional (Soto-Cerros et al., 2023) y este sería un conocimiento de los formadores de profesores en la construcción de la identidad.

Una de las técnicas enunciadas en el método de pruebas y refutaciones es la exclusión de monstruos, la que consiste en la modificación de concepto o definición al cual hace referencia una conjetura, a fin de excluir aquellos monstruos (contraejemplos) en los cuales la conjetura se invalida. Un monstruo es un contraejemplo que encaja en el concepto o definición del objeto u objetos matemáticos a los que hace referencia la conjetura, pero que no fue considerado en el momento de elaborar la conjetura.

Según Larrauri (2013, p. 1) la palabra monstruo viene del "...verbo monere que quiere decir "advertir ","avisar "... De este verbo se gestan otros dos: monstrare y demonstrare cuyos significados fácilmente se dejan percibir en castellano" pero también monstruo comparte el significado de lo que está apartado de la norma "...cuya presentación causa estupefacción y espanto".

Este espanto podría llevar a rechazar la conjetura que es objeto de análisis. En la clase 2 de la secuencia 1 del formador 2, surgió un monstruo en el proceso de reformulación de la conjetura *"cualquier cuadrilátero puede inscribirse en una circunferencia"*, un estudiante, luego de un proceso sucesivo de reformulaciones de la conjetura, afirmó que esta es válida siempre y cuando las mediatrices de los lados del cuadrilátero sean concurrentes. El formador de profesores, con el fin de causar conflicto y a sabiendas de que las afirmaciones enunciadas por el estudiante estaban sostenidas en la exploración y verificación de cuadriláteros convexos, construyó un cuadrilátero cóncavo (ver Figura 2).

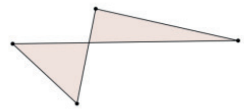


Figura 2. Cuadrilátero cóncavo.
Nota: cuadrilátero construido por el formador de profesores (F1, sec 1, clase 2).

Al consultar al estudiante para saber si la conjetura se mantenía válida con este tipo de figuras, este se mostró sorprendido al ver el cuadrilátero (ver Figura 2), ya que no incluyó la familia de cuadriláteros cóncavos cuando formuló su conjetura.

Este ejemplo, aunque es válido para la conjetura enunciada por el estudiante, es un ejemplo considerado como monstruo, dado que el estudiante no tomó en cuenta tales figuras, lo cual ocasionó en él un conflicto que pudo llevar al descarte inmediato de la conjetura, en vez de someterla a prueba en este tipo de cuadriláteros. Esta sorpresa puede ser agradable o desagradable. Depende del tacto pedagógico del formador y su adecuado manejo en la interacción para que el estudiante retome el trabajo de análisis.

Ethos: estilo docente frente a una problemática

Ambos formadores implementaron actividades diseñadas bajo los principios del método de enseñanza de aprendizaje colaborativo, debate científico y autorreflexión (ACODESA). Se identificó en ambos casos un trabajo individual-colaborativo-grupal con las siguientes etapas: 1. Trabajo individual en entorno de papel; 2. Trabajo en equipo para contraste de conjeturas individuales; 3. Discusión en grupo; 4. Autorreflexión; y 5. Institucionalización (Brousseau, 1986).

Desde el inicio se establecieron de manera explícita por el formador 2 e implícita por el formador 1, las reglas de respeto y convivencia para la interacción. Incluso el formador 2 introdujo estrategias lúdicas, cambios de lugar y ritmos específicos para favorecer el contraste entre tipos de interacciones.

Los formadores condujeron posteriormente la reflexión sobre las reglas para la interacción al interior del aula que facilitan el diálogo e intercambio matemático, así como la gestión del aula, de los tiempos y los recursos, los principios éticos y de tacto pedagógico que es necesario que el futuro profesor construya. Esta reflexión fue contrastada con los saberes sobre el impacto del estudio de tendencias de la didáctica en su misma aula (Hernández, 2018).

Conclusiones y discusión

En esta investigación se identificaron conocimientos de formadores de profesores que favorecen tres componentes de la identidad: el *logos*, el *pathos* y el *ethos*.

Se identificó que cierto abordaje del contenido, fuertemente estructurado y contrastante con las vivencias de aprendizaje en las trayectorias de los estudiantes, contribuye a la construcción de lo profesional en la identidad, pues dicho contraste, según los formadores, genera reflexión y toma de conciencia de sus estrategias heurísticas. En efecto, en esta investigación se muestra que la reflexión en torno a la estructura argumentativa sobre cómo los estudiantes descubrieron el conocimiento matemático a partir de una conjetura falsa, que reformularon en un proceso de discusión basado en elementos del método cuasi empírico de pruebas y refutaciones, favorece la construcción de una identidad basada en el contenido. Esto conforma el *logos* del estudiante. Esto no habría sido posible sin el conocimiento del formador sobre el funcionamiento del contenido (Contreras, 2021)

Ahora bien, la identidad se consolida con el autoconcepto y los componentes emocionales derivados de las interacciones. Lo que constituye el *pathos* del docente que se relaciona con el conocimiento didáctico de contenido (Soto-Cerros et al., 2023). En esta investigación se muestra cómo el trabajo con los contraejemplos impacta emocionalmente a los estudiantes, y llevó a la reflexión con los estudiantes, por parte de los formadores, de que es preciso el desarrollo de un tacto pedagógico y un clima de aula.

Finalmente, se identificó que los formadores de profesores consideraron que la identidad profesional se desarrolla en un diálogo respetuoso, inserto en las formas culturales de la docencia y de las matemáticas, el *ethos* del docente, lo que forma parte del conocimiento del contenido y del conocimiento didáctico de contenido. En efecto, los formadores favorecen una reflexión sobre las interacciones en la adquisición del conocimiento convencional y a las normas sociomatemáticas (Avalos-Rogel, 2013a): la construcción de conocimiento matemático depende de la posibilidad de intercambio de ideas y su validación. Y por otro lado la posibilidad de establecer normas y valores para la interacción y la convivencia, que posibiliten el diálogo y la construcción conjunta.

Cabe señalar que estos conocimientos se mostraron heterogéneos en ambos formadores: el formador 2 da más peso a la reflexión sobre su propia estrategia, mientras que el formador 1 apuesta más a la reflexión que puede causar el impacto de su propia estrategia heurística. A pesar de una formación similar, ambos muestran diferencias en el manejo del conocimiento del contenido y del conocimiento didáctico del contenido, ligados tanto al trabajo matemático como a la percepción de los aprendizajes de sus estudiantes y de su propia situación emocional hacia las matemáticas.

A pesar de esos saberes, consideramos que los tránsitos de la identidad profesional de los futuros docentes siguen siendo transparentes.

Referencias

Avalos-Rogel, A. (2013a). ¿La formación como prescripción? Cuatro modelos de formación inicial de docentes a partir del análisis de redes sociosimbólicas. En I. Lozano y E. Gutiérrez (Eds.), *Procesos formativos y prácticas de los formadores de docentes* (pp. 111-124). Ediciones Díaz de Santos.

Avalos-Rogel, A. (2013b). Ámbitos y dominios de validación del conocimiento matemático escolar durante las prácticas de los estudiantespara profesor de secundaria. En A. P. Preciado Babb, A. Solares Rojas, I. Sandoval Cáceres, y T. Butto Zarzar (Eds.), *Proceedings of the First Meeting between the National Pedagogic University and the Faculty of Education of the University of Calgary* (pp. 73-77). Faculty of Education of the University of Calgary.

Beijard, D., Meijer, P. C. y Verloop, N. (2004). Reconsidering research on teachers' professional identity, *Teaching and Teacher Education, 20* (2), 107-128. https://doi.org/10.1016/j.tate.2003.07.001

Carreño, E., Hernández, M. y Sandoval, I. T. (2022). Definir y clasificar cuadriláteros en situaciones hipotéticas de enseñanza : ¿qué conocimientos especializados comunican futuros profesores? En J. Carrillo, M. A. Montes y N. Climent. (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) : 10 años de camino.* (pp. 151-163). Dykinson. https://doi.org/10.14679/1461

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco-Mora, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A. Ribeiro, M. y Muñoz-Catalan, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Castoriadis, C. (1986). *Los dominios del hombre. Las encrucijadas del laberinto.* Gedisa.

Contreras, L. C. (2021). Una aproximación a un modelo de conocimiento del formador de profesores de matemáticas. *Revista Venezolana De Investigación En Educación Matemática, 1*(1), e202101. https://doi.org/10.54541/reviem.v1i1.12

Davis, P., Hersh, R. y Marchisotto, E. (2012). *The Mathematical Experience.* Birkhäuser. http://dx.doi.org/10.1007/978-0-8176-8295-8

de Villiers, M. (2010). *Experimentation and Proof in Mathematics.* En G. Hanna, H. Jahnke, y H., Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics* (pp.205-221). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0576- 5_14

D.O.F. (2018). *Acuerdo número 14/07/18 por el que se establecen los planes y programas de estudio de las licenciaturas para la formación de maestros de educación básica.* Secretaría de Gobernación.

Ducoing, P. y Fortoul, B. (2013). *Procesos de formación 2002-2011. Vol. 1.* COMIE.

Even, R. y Ball, D. L. (2009). *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics The 15th ICMI Study*. Springer.

Fahlgren, M. y Brunström, M. (2014). A Model for Task Design with Focus on Exploration, Explanation, and Generalization in a Dynamic Geometry. *Technology, Knowledge and Learning.* http://dx.doi.org/10.1007/s10758-014-9213-9

Fuenlabrada, I. (2011). La socialización de las experiencias y la formación docente. *XIII CIAEM-IACME*. https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1116/287

Hernández, M. (2018). El conocimiento especializado de futuros profesores en temas de triángulos y círculos con el uso de Geogebra [Tesis de Doctorado, CINVESTAV – IPN].

Larrauri, G. (2013). Psicoanálisis y monstruosidad. *Consecuencias. Revista digital de psicoanálisis, arte y pensamiento 13*. https://www.revconsecuencias.com.ar/ediciones/010/template.php?file=arts/Aplicaciones/Psicoanalisis-y-monstruosidad.html

Pascual, M. I., Montes, M. y Contreras, L. C. (2019). Un acercamiento al conocimiento del formador de profesores de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 473-482). SEIEM.

Pascual, M. I. (2020). *Una aproximación al conocimiento del formador de maestros de matemáticas sobre la simetría*. Presentación el 11 de diciembre de 2020. Seminario MTSK [On line]. *Red Iberoamericana de Investigación sobre el Conocimiento Especializado del Profesorado de Matemáticas.*

Soto-Cerros, S., García-González, M. S. y Pascual-Martín, M. I. (2023). La relación entre el dominio afectivo y el modelo MTSK: una oportunidad de investigación. *Revista Educación Matemática, 35*, 226-246. https://doi.org/10.24844/EM3502.09

Subsecretaría de Educación Básica y Normal. (2001). *Figuras y Cuerpos Geométricos. Temario y bibliografía sugerida. Cuarto Semestre.* Programa para la Transformación y el fortalecimiento Académicos de las Escuelas Normales. SEP.

FORMADORES DE PROFESORES DE MATEMÁTICA Y LA PRÁCTICA PROFESIONAL DEL NOTICING

Mathematics teacher educators
and the professional practice of noticing

López, L.M.[a], Reyes-Bravo, M.[a]

[a] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Temática: 2 – MTSK del formador de profesores

Resumen.
En esta comunicación se explora el conocimiento de un grupo de formadores de profesores de primaria sobre la práctica del "noticing" en el contexto de un Lesson Study centrado en el sentido numérico de la división. A través del análisis de las sesiones de trabajo, se encontró que la mayoría de los formadores no estaban familiarizados de manera directa con el concepto de noticing, aunque algunos hicieron menciones breves al respecto. Si bien los formadores no reconocieron explícitamente el término, se percibe que han desarrollado enfoques intuitivos relacionados con esta práctica en su experiencia docente. Los resultados sugieren la necesidad de brindar una mayor conciencia y desarrollo del noticing como una práctica profesional en la formación de formadores de profesores de matemáticas.

Palabras clave. Formadores, Noticing, Prácticas profesionales, Lesson Study.

Abstract.
This paper explores the knowledge of a group of primary teacher educators about the practice of noticing in the context of a Lesson Study focused on the number sense of division. Through the analysis of the working sessions, it was found that most of the educators were not directly familiar with the concept of noticing, although some made brief mentions of it. While the educators did not explicitly recognize the term, it is perceived that they have developed intuitive approaches related to this practice in their teaching experience. The results suggest the need to provide greater awareness and development of noticing as a professional practice in the formation of mathematics teacher educators.

Keywords. Mathematics teacher educators, Noticing, Professional practice, Lesson Study

López, L.M. y Reyes-Bravo, M. (2023). Formadores de profesores de matemática y la práctica profesional del noticing. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 206-213). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

En las últimas décadas, se ha producido un notable avance en la investigación sobre profesores de matemáticas, tanto en formación como en ejercicio, con enfoques específicos para comprender su conocimiento (Ball et al., 2008; Carrillo-Yañez et al., 2018; Rowland, 2005). En cambio, los estudios sobre el conocimiento de los formadores de profesores de matemática son escasos, pero incipientes (Beswick y Goos, 2018; Chapman, 2021).

Jaworski (2008) señala que los formadores son los responsables del desarrollo del conocimiento en los futuros profesores de matemáticas, ya que ellos son los "profesionales que trabajan con profesores en ejercicio y/o futuros profesores para desarrollar y mejorar la enseñanza de las matemáticas" (p. 1). Frente a esta labor, es pertinente preguntarse qué elementos podría considerar un formador para llevar a cabo su tarea de formar profesores que enseñarán matemática.

En el caso de pregrado, algunos autores exponen que el contenido de la formación inicial docente en matemáticas no está supeditado únicamente al conocimiento matemático, sino también a la concepción de las matemáticas como objeto de enseñanza y aprendizaje (Chick y Beswick, 2018; Pascual, 2021). Basados en Ponte (2011), Escudero-Ávila et al. (2021) mencionan tres elementos constitutivos de la formación inicial: el conocimiento profesional que se debe conseguir en el proceso formativo, por ejemplo, conocimiento especializado del profesor de matemática (MTSK, por sus siglas en inglés) (Carrillo-Yañez et al., 2018); las prácticas profesionales que permiten construir el conocimiento profesional de los futuros profesores en la acción; y la identidad profesional que se desarrolla en la formación inicial docente. En esa línea, los futuros profesores dependen, en parte, del conocimiento que posea y promueva el formador en las áreas mencionadas (Amador, 2021), con objeto de fomentar su conocimiento especializado.

Ante lo planteado, el objetivo de este trabajo es describir el conocimiento de un grupo de formadores de profesores de primaria sobre la práctica profesional del noticing mediante su participación en un Lesson Study (LS) centrado en el sentido numérico de la división entre números naturales.

Referentes teóricos

Conocimiento profesional: MTSK

Como hemos mencionado, el conocimiento profesional a desarrollar en los futuros profesores que enseñarán matemática es parte de la labor que convoca a los formadores. Adoptamos en esta comunicación como conocimiento profesional el modelo MTSK (Carrillo-Yañez et al., 2018).

Este modelo se compone de tres dominios de conocimiento: el conocimiento matemático (MK) y el conocimiento didáctico del contenido (PCK). En el núcleo del modelo, que impregna los otros conocimientos, se encuentra el dominio de creencias del profesor. Tanto el MK y el PCK se dividen en tres subdominios, los cuales, a su vez, se dividen en categorías. Por un lado, el dominio del conocimiento matemático se refiere al conocimiento propio de la disciplina. Sus subdominios son: Conocimiento de los temas (KoT), Conocimiento de la estructura matemática (KSM) y Conocimiento de la práctica matemática (KPM). Por otro lado, el dominio del conocimiento didáctico del contenido se refiere al conocimiento que tiene el profesor sobre la enseñanza del contenido matemático. Sus subdominios son: Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), Conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM) y Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS).

Prácticas de enseñanza de la matemática

Para Ponte (2011) las prácticas y habilidades profesionales del profesor de matemática (o futuro profesor) responden a su quehacer profesional. En esta misma línea, el trabajo de Pascual (2021) se centra en el conocimiento del formador de profesores de matemática, y plantea que la práctica profesional va

> más allá del conocimiento matemático y didáctico-matemático que sustenta las acciones del maestro, la formación inicial debe configurarse como un espacio donde tenga lugar la construcción de ese conocimiento en acción que es *el hacer* o el *ser capaz de.* (p. 27)

Esta concepción destaca la importancia de enfocarse en el desarrollo de prácticas de enseñanza de la matemática, ya que al ser desplegadas en la formación inicial contribuirían a la capacidad de desarrollar el conocimiento profesional que los futuros profesores van adquiriendo. En consecuencia, implica que la formación inicial debe brindar oportunidades para que los futuros profesores adquieran un conocimiento que les permita enfrentar desafíos reales en su desempeño laboral y tomar decisiones fundamentadas.

Siguiendo esta idea, el National Council of Teachers of Mathematics (NTCM) plantea una lista con ocho prácticas de enseñanza que podrían ser consideradas como eficaces para el aprendizaje de la matemática. Una de ellas es obtener y utilizar evidencias del pensamiento de los estudiantes, la que definen como "una enseñanza eficaz de las matemáticas utiliza evidencia del pensamiento del estudiante para evaluar el progreso en la comprensión matemática y para adecuar continuamente la enseñanza en formas que apoye y extienda el aprendizaje" (p.10). Algunos autores del campo de la investigación en educación matemática han conceptualizado esta práctica como *noticing*.

El noticing como práctica de enseñanza de la matemática

En décadas recientes, el noticing se ha identificado como una práctica profesional necesaria en los profesores de matemáticas (p.e. Llinares, 2013). Este constructo se refiere a la habilidad del profesor para percibir y darse cuenta de eventos relevantes que ocurren en el aula de clase (López y Zakaryan, 2021). El noticing permite a los profesores tomar decisiones fundamentadas sobre cómo enseñar y cómo respaldar el aprendizaje de sus estudiantes. Al mismo tiempo, les brinda la oportunidad de razonar sobre su propia práctica docente y mejorar de manera continua. Además, la literatura especializada sugiere que el noticing está relacionado con el conocimiento del profesor de matemáticas (Köning et al., 2022; Sherin et al., 2011, van Es y Sherin, 2021).

Existen distintas formas de conceptualizar el noticing, una de ellas es el *Teachers' Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking* descrito por Jacobs y colaboradores (2010, 2022). Desde esta conceptualización, el noticing involucra tres destrezas interrelacionadas que ocurren casi simultáneamente durante la instrucción. La primera destreza se refiere a la *atención* a los detalles de las estrategias de los niños, es decir, cómo los profesores reconocen los aspectos matemáticamente relevantes de las estrategias de los estudiantes. La segunda destreza se relaciona con la *interpretación* de la comprensión de los niños, es decir, cómo los profesores razonan sobre los detalles de las estrategias para discernir la comprensión matemática de los estudiantes. La tercera y última destreza es la habilidad de *decidir cómo responder* en función de la comprensión de los niños, lo cual describe cómo los profesores utilizan lo que han aprendido de los detalles de las estrategias y de la comprensión de los niños para determinar los siguientes pasos pedagógicos (Jacobs et al., 2010, 2022).

Aunque el noticing es una práctica profesional importante en la formación del profesorado de matemática, las investigaciones que involucran el noticing con los formadores son escasas. En consecuencia, es importante aportar con datos empíricos sobre cómo los formadores conciben y potencian esta práctica profesional en la formación inicial docente. Y a la vez, comprender cómo el conocimiento se relaciona con dicha práctica profesional. Así, a partir de un Lesson Study (LS) centrado en el sentido numérico de la división entre números naturales, en esta comunicación se busca dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación:

a) ¿Los formadores que participan en el Lesson Study tienen conocimiento del concepto de noticing?
b) ¿De qué manera los formadores fomentan el desarrollo de la práctica profesional del noticing al diseñar una lección?
c) ¿Qué conocimiento especializado promueven los formadores en los futuros profesores al fomentar la práctica profesional del noticing?

Metodología

Este estudio se enmarca en un paradigma cualitativo de tipo descriptivo (Hernández et al., 2010), que busca comprender el conocimiento sobre la práctica profesional del noticing de un grupo de formadores de profesores de primaria, en el contexto de un Lesson Study (LS).

El grupo de estudio estuvo compuesto por ocho formadores de profesores de primaria en Chile, conformado por siete mujeres y un hombre (F1 a F8), con edades que oscilan entre los 35 y 59 años. En este grupo, cinco formadores tienen formación de pregrado en educación primaria y tres en matemáticas. Respecto a su formación de postgrado, seis formadores tienen un grado de magíster y dos tienen un grado de doctor.

El proceso de LS se llevó a cabo durante el año 2022, constando de ocho sesiones y dos implementaciones. Las sesiones se realizaron de manera remota y sincrónica a través de la plataforma Zoom, debido a la distancia en que se encontraban los formadores (alrededor de 1500 km). También, se trabajó de manera asincrónica utilizando un documento compartido en Google Drive, donde los formadores colaborativamente elaboraron el plan de lección. Durante el proceso de LS, se monitorearon todas las sesiones y se recopilaron datos cualitativos mediante la grabación de las sesiones de trabajo.

Para este estudio, se analizaron cinco sesiones (S1-S5) previas a la implementación de la primera versión del plan de lección en el LS. Las transcripciones de estas sesiones se utilizaron como unidades de información para identificar fragmentos en los que los formadores manifestaron su conocimiento sobre la práctica del noticing. Los datos fueron triangulados entre investigadores en Didáctica de la Matemática.

Resultados

La *primera pregunta* de este estudio tiene como objetivo investigar si los formadores manifiestan conocimiento sobre *noticing* al diseñar una lección que promueve el sentido numérico de la división para futuros profesores de primaria.

Al revisar las transcripciones de las sesiones de LS abordadas, se desprende que la mayoría de los formadores no están familiarizados de manera directa con el concepto de *noticing*, puesto que no emerge de manera explícita en sus discursos. En la S5 de diseño de la lección, una de las formadoras menciona el *noticing* cuando revisan propuestas de actividades en que los futuros profesores analizarán respuestas de estudiantes de primaria ficticios resolviendo divisiones. Sin embargo, no se observa una reacción significativa frente al concepto por parte de los integrantes de grupo [1]-[4]:

1. F1: es parecido al noticing, que ahora se usa harto, cómo identificar el pensamiento matemático de los niños, cierto, que es una práctica que hay que desarrollar en la formación [inicial de profesores].
2. F3: como elicitar, parece que es algo así ...
3. F1: Noticing
4. F3: Sí, el pensamiento del estudiante, y es lo que en el fondo el estudiante [futuros profesor] tiene que hacer en el futuro

En otro momento de la S5, la misma formadora menciona nuevamente la idea del noticing, específicamente desde la perspectiva de la mirada profesional (Llinares, 2013), pero los demás formadores no retoman la mención del término [5]:

5. F1: Y como dijo (F3) también es una mirada profesional, es mirar lo que están haciendo los niños [...] no lo que hacemos nosotros, sino que lo quehacen los niños

La *segunda pregunta* de este estudio se enfoca en cómo los formadores fomentan el desarrollo de la práctica profesional del noticing en los futuros profesores de matemáticas al diseñar una clase centrada en el sentido numérico en el contexto de LS.

A partir de los extractos de las sesiones de clase, podemos profundizar en cómo los formadores consideran el noticing cuando diseñan una clase en el contexto de un LS, aunque no conozcan el concepto de noticing ni su teoría:

6. F3: Porque en la medida que él [el futuro profesor]tenga esa claridad [conocimiento disciplinar], él va a poder aplicar distintas estrategias y va a poder entrar a discutir con sus estudiantes.
7. F4: por ejemplo, el hecho de la pandemia (...) Las características de estos estudiantes [estudiantes de primaria postpandemia] son bien particulares, significa que él [el futuro profesor] tiene que adecuar lo que está aprendiendo con estos niños de la mejor manera, con esta variedad de estrategias que pudiera desarrollar.
8. F5: Un poco escuchando a F3 se empieza a dar vuelta la idea, y lo importante es que [el futuro profesor] logre visualizar qué estrategia utiliza para la tarea que enfrenta, es decir que sea capaz de definir una estrategia de acuerdo a la tarea que va a desarrollar y eso requiere una amplia gama de conocimiento de estrategias.

En [6], una de las formadoras menciona la importancia de "discutir" con los estudiantes, lo que sugiere que, si el futuro profesor conoce y aplica diferentes estrategias, podrá comunicarse y ayudar a los estudiantes cuando presenten soluciones. Esto podría relacionarse con las destrezas de interpretación y de decidir cómo responder. De manera similar, en [7], F4 destaca la necesidad de que el futuro profesor realice adaptaciones en función de las características y estrategias de los estudiantes, lo que implica el uso de ambas destrezas mencionadas anteriormente. En [8], F5 enfatiza la importancia de que el profesor sea capaz de observar las estrategias o soluciones utilizadas por los estudiantes, lo que se relaciona con la destreza de atención en el noticing.

Para contestar a la *tercera pregunta*, se presentan relaciones que responden al conocimiento especializado que se promueve en los futuros profesores al desarrollar la práctica del noticing. En el fragmento [8], la formadora destaca la importancia de que el futuro profesor tome conciencia de la necesidad del conocimiento disciplinario y comprenda los temas y procedimientos en el contexto de la división numérica (KoT). Esto implica que los futuros profesores deben comprender los conceptos, principios y algoritmos relacionados con el sentido numérico y otras áreas relevantes.

En los extractos [9] y [10] revelan cómo los formadores consideran situaciones donde los futuros profesores tienen que analizar estrategias para desarrollar la práctica del noticing.

9. F5: o sea es lo que por ejemplo yo hago con mis estudiantes, les pongo una situación donde hay errores y le digo "identifique el error y a partir de eso elabora una estrategia", pero el problema es que si no identificaste el error cualquier estrategia

que plantee no va a estar adecuada, [hay que] anticiparse

10. F3: Sí yo pienso que es interesante que los estudiantes vean la estrategia y que digan "¿qué está pensando el estudiante con esa estrategia?", porque tiene que entender qué hizo el estudiante, porque una cosa es decir está bueno, pero por qué el estudiante usó esa estrategia, qué pensó, en qué se basó

Estos fragmentos indican que las formadoras promueven que los futuros profesores sean capaces de identificar errores en las estrategias de los estudiantes (KFLM), anticiparse a posibles dificultades y comprender el pensamiento detrás de las estrategias utilizadas (KFLM). Esto refuerza la importancia de analizar diversas estrategias y entender el razonamiento de los estudiantes en el desarrollo del noticing.

Conclusiones

Tal como hemos visto, aunque las formadoras pueden desconocer el concepto de noticing, han desarrollado enfoques intuitivos relacionados con esta práctica, particularmente desde la postura de Jacobs et al. (2022), ya que son conscientes de su importancia y ven la necesidad de que los futuros profesores lo incorporen en su quehacer docente.

Además, los fragmentos [6-10] sugieren que las formadoras promueven el desarrollo de un conocimiento especializado en la enseñanza y aprendizaje del sentido numérico. Al relacionar el noticing con las estrategias, promueven el desarrollo del conocimiento de los temas (KoT) y conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM).

Lo anterior es consistente con la postura de Jacobs et al. (2022), quienes afirman que el noticing se relaciona estrechamente con las estrategias y el pensamiento matemático de los estudiantes. Al notar y comprender las estrategias que utilizan los estudiantes, los profesores pueden identificar patrones en su pensamiento matemático y comprender mejor cómo abordan los problemas. Esto les permite adaptar su enseñanza para satisfacer las necesidades individuales de cada estudiante y ayudarles a desarrollar habilidades matemáticas más sólidas y estrategias más efectivas.

Además, al tomar decisiones informadas sobre cómo responder al pensamiento matemático de los estudiantes [9 – 10], los profesores pueden fomentar un ambiente de aprendizaje más colaborativo y constructivo en el aula. En este proceso, los profesores ponen en manifiesto su conocimiento (van Es y Sherin, 2002, 2021), tanto su conocimiento matemático como su conocimiento didáctico del contenido junto a la práctica de noticing (López y Zakaryan, 2021).

Las formadoras que participaron en el LS manifiestan que impulsar la práctica del noticing (implícitamente) favorece el desarrollo del conocimiento profesional de los futuros profesores de primaria que enseñarán matemática, específicamente la idea del conocimiento especializado que se toma como referente para este estudio.

Reflexión final

Los resultados y la discusión previa revelan la presencia implícita del noticing como conocimiento en acción que las formadoras promueven en la formación inicial, aunque no estén familiarizadas con el término. En consecuencia, se sugiere impulsar programas de desarrollo profesional para formadores que contemplen diversas prácticas de enseñanza de la matemática que favorezcan el conocimiento profesional de futuros profesores, y a su vez de profesores en ejercicio, dentro de ellas el noticing. Desde la literatura se rescata la importancia del noticing en el aula de clase, por lo que se requiere que los formadores de profesores tengan conocimiento sobre dicha práctica profesional para desarrollarla en su ejercicio.

También, surgen interrogantes sobre ¿Qué nivel de desarrollo de noticing debe esperar el formador como práctica profesional en los futuros profesores? ¿Cómo se puede identificar y medir dicho nivel de desarrollo? Si bien se ha visto que las formadoras relacionan noticing con KoT y KFLM, ¿qué sucede con aquellos subdominios no tan evidentes, como el KPM y el KSM? Estas preguntas generan espacios para nuevas investigaciones sobre el noticing y conocimiento del formador.

Referencias

Amador, J. M. (2022). Mathematics teacher educator noticing: examining interpretations and evidence of students' thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education, 25*(2), 163–189. https://doi.org/10.1007/s10857-020-09483-z

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177%2F0022487108324554

Beswick, K., y Goos, M. (2018). Mathematics teacher educator knowledge: What do we know and where to from here?. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(5), 417-427.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Chapman, O. (2021). Mathematics teacher educator knowledge for teaching teachers. En M. Goos y K. Beswick (Eds.), *The learning and development of mathematics teacher educators: International perspectives and challenges* (pp. 403–416). Springer.

Escudero-Ávila, D., Montes, M., y Contreras, L. C. (2021). What do mathematics teacher educators need to know? Reflections emerging from the content of mathematics teacher education. En M. Goos y K. Beswick (Eds.), T*he Learning and Development of Mathematics Teacher Educators International Perspectives and Challenges* (pp. 23–40). Springer.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación*. McGraw Hill Education.

Jacobs, V. R., Empson, S. B., Jessup, N. A., Dunning, A., Pynes, D., Krause, G., y Franke, T. M. (2022). Profiles of teachers' expertise in professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*. https://doi.org/10.1007/s10857-022-09558-z

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

Jaworski, B. (2008). Mathematics teacher educator learning and development. En B. Jaworski y T. Woods (Eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional* (pp. 1-11). Sense Publishers.

König, J., Santagata, R., Scheiner, T., Adleff, A.-K., Yang, X., y Kaiser, G. (2022). Teacher noticing: A systematic literature review of conceptualizations, research designs, and findings on learning to notice.

Educational Research Review, 36(100453). https://doi.org/10.1016/j.edurev.2022.100453

Llinares, S. (2013). Professional noticing: a component of the mathematics teacher's professional practice. *Sisyphus — Journal of Education, 1*(3), 76-93.

López, L. M. y Zakaryan, D. (2021). Relacionando el conocimiento especializado del profesor de matemáticas con la competencia noticing. En J. G. Moriel Junior (Ed.), *Actas de V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp.349-356). Congresseme. https://cdn.congresse.me/ho20198vnz5ar0pp4l3wt33iit5t

National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

Pascual, M. (2021). *El conocimiento del formador de maestros en la etapa de formación inicial, en relación con la enseñanza de la Didáctica de las Matemáticas. Un estudio de caso* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. http://hdl.handle.net/10272/20208

Ponte, J. P. (2011). Teachers' knowledge, practice, and identity: Essential aspects of teachers' learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(6), 413–417.

Rowland, T. (2005). The knowledge quartet: A tool for developing mathematics teaching. En A. Gagatsis (Ed.), *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp. 69-81). Cyprus Mathematical Society.

Sherin, M., Jacobs, V., y Philipp, R. A. (2011). Situating the study of teacher noticing. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 3-13). Routledge.

van Es, E. A., y Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10*(4), 571-596.

van Es, E. A., y Sherin, M. G. (2021). Extending on prior conceptualizations of teacher noticing. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 53*(1), 17-27. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01211-4

EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE EDUCACIÓN ESPECIAL: LA PERSPECTIVA DE LOS FORMADORES

Mathematical Knowledge in Special Education Teacher Training: Teachers Educators' Perspective

Piñeiro, J.L [a], Calle, J.P. [b]

[a] a Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile
[b] Universidad de Barcelona, España

Temática: 2 –Investigaciones sobre el formador de profesores de matemáticas

Resumen.
El conocimiento del profesor es uno de los factores más relevantes en el aprendizaje de los estudiantes. No obstante, en la formación inicial de profesores de educación especial suele quedar relegado. Este trabajo explora las ideas que sostienen formadores de profesores respecto al alcance que debiese tener el conocimiento matemático en la formación inicial de profesores de educación especial. Para su consecución, se realizó un análisis de contenido deductivo, usando las categorías del MTSK, a datos recogidos mediante entrevistas semiestructuradas a 15 formadores. Los resultados revelan que existe un énfasis por aspectos relativos a la fenomenología y la resolución de problemas. Concluimos con un llamado de atención a formadores, tanto especialistas en didáctica de la matemática y educación especial, para que se generen espacios de discusión que permitan la mejora de la formación inicial de profesores de educación especial.

Palabras clave. Educación especial, Formación inicial, Conocimiento matemático, Formador de profesores.

Abstract.
Professional knowledge is one of the most significant factors influencing student learning. However, the initial training of special education teachers often overlooks this aspect. This paper aims to examine the perspectives of teacher educators regarding the role of mathematical knowledge in the initial training of special educators. To accomplish this, a deductive content analysis was conducted, utilizing the MTSK categories, based on data gathered through semi-structured interviews with 15 educators. The findings highlight an emphasis on phenomenology and problem-solving aspects. In conclusion, we urge educators, including experts in mathematics education and special education, to create opportunities for discussion that can enhance the initial training of special educators.

Keywords. Special education, Initial training, Mathematical knowledge, Teacher educator.

Piñeiro, J.L. y Calle, J.P. (2023). El conocimiento matemático en la formación de profesores de educación especial: la perspectiva de los formadores. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 214-221). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

El conocimiento de las matemáticas de los profesores es clave en el aprendizaje de los estudiantes (Blömeke et al., 2022) e incluso en la calidad de las clases que puedan ofrecer los profesores (Kelcey et al., 2019). Esto sugiere que el conocimiento que sostengan los profesores sobre las matemáticas tendrá un impacto en los estudiantes que atienden en las escuelas y colegios que imparten Educación Básica. No obstante, no existe claridad sobre qué matemáticas deberían conocer algunos profesores que enseñan matemáticas, por ejemplo, los profesores de educación especial (Griffin et al., 2014). En este sentido, la revisión realizada por Griffin y colaboradoras (2014) señala que, al igual que el caso chileno, las recomendaciones y estándares sobre qué debe saber sobre matemáticas un profesor de educación especial son vagas. Esto debido a que los documentos ofrecen una guía mínima para decidir qué contenido matemático deben saber y ser capaces de enseñar los profesores de educación especial (por ejemplo, suma, multiplicación, conceptos de números racionales, álgebra). Este último hecho es un nudo crítico pues las recomendaciones que la investigación en educación especial reporta sobre cómo mejorar la enseñanza de estudiantes que aprenden matemáticas (Gersten et al., 2009), difiere en aspectos centrales con las recomendaciones que se extraen de la investigación en educación matemática (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2014). Concretamente, mientras en educación especial se aboga por una enseñanza directa y explícita de estrategias y heurísticas, la educación matemática fomenta una enseñanza en que el estudiante explore sin que el profesor muestre el camino de manera explícita.

Así, es necesario que investigadores y formadores de profesores, tanto de educación especial como de educación matemática, discutan sobre el conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores de educación especial. En este contexto, este trabajo tiene como meta describir el conocimiento matemático para la enseñanza de profesores de educación especial en las respuestas de formadores de profesores sobre esta temática. Particularmente, estamos interesados en describir a qué conocimientos, matemáticos y didácticos del contenido, hacen referencia formadores (de educación especial y de educación matemática) cuando se les pide indicar los conocimientos que los profesores de educación especial deben sostener. Desde nuestra perspectiva, este primer paso permitirá que posteriormente se pueda discutir respecto a la especialización del conocimiento de profesores de educación especial. Es necesario que esta discusión se realice pues, la preparación de los profesores de educación especial para enseñar matemáticas ha sido una de las áreas que menor atención ha tenido, en donde se observa un número menor de oportunidades para aprender matemáticas (Greer y Meyen, 2009). Si bien, esto puede deberse a numerosos factores, Park y colaboradores (2019) señalan que esto puede deberse a que cuándo los académicos de Educación Especial discuten lo que los profesores necesitan saber, tienden a enfocarse en el conocimiento de las prácticas basadas en evidencia, experimentos de enseñanza, el monitoreo del progreso para tomar decisiones en la enseñanza y la colaboración efectiva con otros profesionales y padres; dejando de lado el conocimiento de las disciplinas.

Perspectiva teórica

La literatura sobre conocimiento del profesor de educación especial ha tenido un desarrollo sostenido en los últimos años, aunque aún es insuficiente para comprender cabalmente el conocimiento matemático para la enseñanza de educadores especiales (Allsopp y Haley, 2015). Los avances que se han realizado tienen un marcado foco en el conocimiento didáctico del contenido (e.g., Firestone et al., 2021; van Garderen et al., 2013) y bastante disímiles entre sí. En conclusión, no hay claridad sobre el contenido o qué aspectos de las matemáticas escolares deberían saber los profesores de esta especialización. En este contexto, hemos recurrido a la educación matemática en donde el panorama es bastante diferente. El trabajo desarrollado por Carrillo y colaboradores (2018), el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK por sus siglas en inglés) "presenta una reconfiguración del conocimiento matemático, una reinterpretación del conocimiento del contenido pedagógico y una nueva forma de conceptualizar la noción de especialización” (Carrillo et al., 2018, p. 240), considerando dos áreas de conocimiento: conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido y una dimensión de creencias; que resultan idóneas para nuestro objetivo.

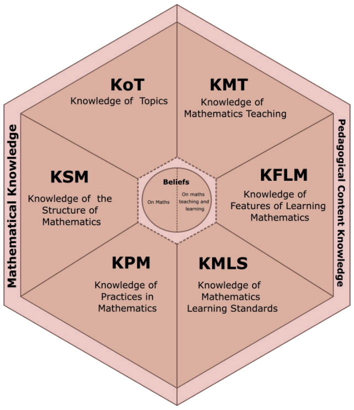


Figura 1. Conocimiento especializado del profesor de matemáticas – MTSK (Adaptado de Carrillo et al., 2018, p. 241).

Tal como lo indican los autores, el conocimiento matemático (Mathematical Knowledge, MK, a la izquierda del hexágono) es entendido:

> como una red de conocimiento sistémico estructurada de acuerdo con sus propias reglas. Al comprender bien esta red (los nodos y las conexiones entre ellos), las reglas y características relacionadas con el proceso de creación de conocimiento matemático le permiten al profesor enseñar el contenido de manera conectada y validar sus propias conjeturas y las de los alumnos. (Carrillo et al., 2018, p. 241)

Este conocimiento se compone de tres subdominios: el contenido matemático en sí (Conocimiento de los temas - KoT); los sistemas de interconexión que unen los conceptos (Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas - KSM); y cómo se avanza en matemáticas (Conocimiento de Prácticas en Matemáticas - KPM). Respecto al conocimiento didáctico del contenido (Pedagogical Content Knowledge, PCK, a la derecha del hexágono), Carrillo et al. (2018) señalan que:

> más que tratarse de la intersección entre el conocimiento matemático y el pedagógico general, es un tipo específico de conocimiento de la pedagogía que se deriva principalmente de las matemáticas. Por lo tanto, no incluimos en este subdominio el conocimiento pedagógico general aplicado a contextos matemáticos, sino solo ese conocimiento en el que el contenido matemático determina la enseñanza y el aprendizaje que tienen lugar. (p. 246)

Esto ha llevado a que identifiquen tres subdominios que se han denominado Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), y Conocimientos sobre estándares de aprendizaje matemático (KMLS).

Metodología

De manera general, esta investigación tiene un planteamiento cualitativo, donde el interés está puesto en comprender y describir los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto (Cohen et al., 2018). Asimismo, el carácter de esta investigación es descriptiva y exploratoria, ya que el interés está dado por describir el conocimiento matemático para la enseñanza de profesores de educación especial presente en las respuestas de formadores.

Participantes

En esta investigación participaron 15 académicos de universidades del Consejo de Rectores de Chile (CRUCH). El objetivo de esta consulta es identificar las áreas, dimensiones o contenidos que los formadores consideran críticas en el constructo conocimiento matemático para la enseñanza en profesores de educación especial. Desde nuestra perspectiva, la opinión de este grupo de participantes, basados en experiencia y trayectoria formadora e investigativa, proporciona un insight al constructo de interés.

De manera general, todos eran formadores de profesores; pero además utilizamos como criterios generales los expuestos por Skjong y Wenwortht (2001): a) experiencia investigativa, publicaciones y proyectos; b) reconocimiento en la comunidad científica; c) disponibilidad y motivación para participar en el proceso; y d) imparcialidad en el proceso de investigación. Asimismo, se cauteló que los participantes tuvieran algunas características específicas de acuerdo a su rol (ver tabla 1), a saber:

Tabla 1. Características de los participantes de la segunda fase

	Formadores de profesores de educación especial	
Formadores de profesores de educación básica (FP1)	*Con experiencia en educación matemática (FP2)*	*Sin experiencia en educación matemática (FP3)*
- Experiencia investigativa, publicaciones y/o proyectos en el área de la educación matemática en Ed. Básica. - Experiencia formando profesores de Ed. Básica en el área de las matemáticas escolares.	- Experiencia investigativa, publicaciones y/o proyectos en el área de la educación matemática. - Experiencia formando profesores de Ed. Especial en asignaturas dedicadas a las matemáticas escolares.	- Experiencia investigativa, publicaciones y/o proyectos en el área Ed. Especial. - Experiencia formando profesores de Ed. Especial en cualquiera de sus especialidades.

Fuente: Elaboración propia.

Procedimiento e instrumentos de recogida de la información

La técnica de recogida de información fueron entrevistas personales individuales semi-estructuradas con cada uno de los participantes. Los protocolos de las entrevistas fueron diseñados utilizando las dimensiones de conocimiento matemático y didáctico (Carrillo et al., 2018) y las áreas de conocimiento presentes en el currículo escolar de matemáticas (Ministerio de Educación [MINEDUC], 2012). No obstante, ninguna de las preguntas hacía referencia a un subdominio del MTSK en específico, sino que se preguntaba de manera general (e.g. ¿Qué conocimiento matemático debería contemplar la formación inicial de educadores especiales? ¿Por qué? Parafrasear lo que se entiende por conocimiento matemático). Esto responde a que no todos los participantes conocen o han trabajado esta perspectiva teórica. Para la aplicación se tuvieron en cuenta las recomendaciones de Cohen et al. (2018), quienes señalan que el entrevistador tiene la libertad de hacer más preguntas para aclarar ideas o profundizar en las razones dadas por el participante.

Análisis de los datos

En primer lugar, se transcribieron las 15 entrevistas y a este corpus se les realizó un análisis de contenido que combina un desarrollo *concept-driven* y *data-driven* y que fue llevado a cabo secuencialmente

(Kuckartz, 2019). Para las categorías del análisis deductivo, se partió del modelo proporcionado por Carrillo y colaboradores (2018); asimismo se tuvieron en consideración los ejes de contenido propuestos por el currículo escolar chileno (MINEDUC, 2012). Este análisis inicial se completó con un análisis inductivo, específicamente, un análisis dentro de cada categoría, lo que llevó a identificación de patrones más específicos. Ambos enfoques nos permiten cumplir con nuestro objetivo de describir los conocimientos matemáticos para la enseñanza presentes en las respuestas de los formadores

Resultados

Conocimiento de los temas

Respecto al conocimiento de los temas, un primer elemento que emerge de los datos tiene relación con las características de las asignaturas que deberían ser parte de la formación inicial de profesores de educación especial. Un primer elemento que emerge tiene relación con las áreas de las matemáticas escolares y en la que emergen 12 menciones que señalan a números, álgebra, geometría y medida, y datos y azar. Asimismo, existen menciones que señalan debiese existir un énfasis o en números (3[1]), o números y álgebra (2) o en geometría y datos y azar (1). Otro patrón se corresponde con las menciones que señalan que el alcance de las matemáticas escolares debería estar dado por un ciclo escolar. Particularmente, identificamos 5 menciones sobre que se deberían incluir los contenidos de la educación básica chilena (1º a 8º curso). Luego, un tercer patrón tiene relación con los focos que debieran tener las asignaturas. Entre estos encontramos: la competencia matemática, el pensamiento matemático, la nivelación de contenidos escolares y herramientas de autoformación. Finalmente, un grupo de menciones trata sobre aspectos relativos a la diversidad existente en los cursos relativos a las matemáticas en las diferentes universidades, o que los cursos debieran tratar una formación disciplinar antes de la enseñanza o que debieran presentarse cursos con conocimiento disciplinar y didáctico al mismo tiempo.

Un segundo patrón tiene relación con el conocimiento sobre las definiciones, donde encontramos 4 menciones. Según los formadores, este conocimiento debería ser revisitado por los futuros docentes de manera de desarrollar comprensión sobre ellos. Un tercer patrón trata sobre el conocimiento de las propiedades y en las que se identificaron 7 menciones. En ellas es posible inferir que su utilización en los cursos tendría relación con permitir a los estudiantes explicar y justificar conceptos y procedimientos. Un cuarto patrón se corresponde con el conocimiento de los procedimientos que debieran sostener los futuros maestros y que se localizaron en 7 menciones. En ellas, se hace referencia a un uso funcional de las matemáticas escolares y la importancia de relevarlo por sobre un aprendizaje de solo definiciones y propiedades. Un quinto patrón tiene relación con las representaciones con solo 2 menciones. En dichos extractos es posible observar una preocupación por el tránsito entre los diferentes registros por parte de los futuros profesores. Un sexto patrón trata sobre la fenomenología y en la que se identificaron 25 menciones. Un elemento común en ellas trata sobre que el conocimiento de los futuros profesores debiese contemplar un sentido o modo de uso en contexto de los diferentes conceptos matemáticos que aprende en su formación inicial para que sus futuros estudiantes pudiesen ser funcionales. Finalmente, también fue posible identificar ideas sobre el enfoque y la finalidad que deberían tener los cursos que traten aspectos disciplinares, y las características del formador que dicta dichos cursos.

Conocimiento de la práctica matemática

Sobre el conocimiento de la práctica matemática, los datos arrojaron menciones a las formas de proceder en esta asignatura, pero de manera general (7). Concretamente, nos referimos a que es posible inferir que los participantes se están refiriendo a conocimiento de la práctica matemática, pero no es posible identificar a qué elemento específico.

[1] Se utilizan números entre paréntesis para indicar el número de menciones encontradas en los datos.

Un segundo patrón tiene relación con el lenguaje matemático y particularmente con la argumentación (2). Ambas mencionan lo esencial para el conocimiento de los futuros profesores y lo dificultoso que es para ellos.

Finalmente, un tercer patrón se relaciona con la resolución de problemas (13). En estos extractos de las entrevistas, se hace referencia a esta práctica matemática como un medio para que los futuros profesores aprendan matemáticas. Asimismo, en las menciones se señala lo poco desarrollada que esta competencia está en los futuros profesores y cómo esto dificulta que puedan avanzar en su conocimiento matemático para la enseñanza.

Conocimiento de la estructura matemática

En relación al conocimiento de la estructura matemática, fue posible identificarlo en 5 menciones. En ellas se hace alusión a las conexiones transversales, señalando lo importante que son para que futuros profesores puedan relacionar y profundizar en su conocimiento matemático.

Análisis por perfil del formador

En este apartado y a modo de resumen, la tabla 2 permite relacionar el tipo de conocimiento presente en las respuestas de los formadores de acuerdo a su perfil. Concretamente, la tabla 2 muestra la frecuencia en cada uno de los patrones identificados estaba presente en los diferentes perfiles de formadores. Por ejemplo, en la columna de educadores matemáticos (FP1) y en la fila referida a las asignaturas, el 18 muestra la frecuencia con que aspectos referidos a las asignaturas aparecieron en las respuestas de los 5 formadores participantes en ese grupo. Este ejercicio permite inferir los énfasis que cada aspecto tiene para el perfil que participó en la investigación. Particularmente, destacamos el énfasis existente en que los futuros maestros puedan dar sentido y conozcan los diferentes modos de uso de las matemáticas escolares, i.e., fenomenología. Por otro lado, también destacamos el comportamiento diferente que tuvo en grupo de educadores especiales en sus respuestas. Con esto nos referimos a que no se identificaron todos los elementos que incluirían el KoT y tampoco existe un énfasis identificable en sus respuestas. Finalmente, el tercer aspecto que se destaca de la tabla 2 tiene relación con la poca presencia de las conexiones matemáticas.

Tabla 2. Presencia de MK en las respuestas de los formadores

		EM	EE	
		FP1	**EM**	**EE**
KoT	Asignaturas	18	11	14
	Definiciones	2	1	1
	Propiedades	2	-	6
	Procedimientos	1	1	5
	Representaciones	1	-	2
	Fenomenología	14	1	10
KPM	General	2	3	2
	Lenguaje Matemático	-	1	1
	Resolución de Problemas	4	3	6
KSM	Conexiones transversales	1	3	1

Nota: EM: educadores matemáticos; EE: educadores especiales. Elaboración propia.

Reflexiones finales

Este trabajo explora el conocimiento de profesores de educación especial desde la perspectiva de los formadores de profesores. En este sentido, hemos identificado las diferentes ideas que los formadores tienen respecto a dicho conocimiento. Los resultados muestran que existe un fuerte énfasis en aspectos relativos al KoT y particularmente a la fenomenología. Al respecto, existen varios elementos que podrían explicar este resultado. Un primer elemento a tener en cuenta tiene relación con la perspectiva que se tiene en la investigación respecto al grupo de estudiantes con que los futuros profesores de educación especial trabajan. Lambert y Tan (2020) señalan que existe una mirada deshumanizadora en la que los estudiantes con alguna necesidad educativa no son vistos como seres pensantes. Las menciones a aspectos de la fenomenología estaban acompañadas de justificaciones que señalaban la necesidad de que los futuros profesores puedan dar sentido y tener diferentes modos de uso de los conceptos. De esta forma, podrían enseñar unas matemáticas conectadas a la vida diaria de los estudiantes con necesidades. Si bien esta premisa pareciera noble, se corre el riesgo de que las matemáticas se transformen en utilitarias. Las matemáticas, en esencia son una forma de pensar. Así, cuando perdemos de vista este aspecto, dejamos de mirar al estudiante como un ser pensante y limitamos la oportunidad para que esto ocurra. Otro aspecto que revelan los resultados tiene relación con la importancia que dan los formadores a la resolución de problemas dentro de las diferentes prácticas matemáticas. Esto puede explicarse por la relevancia que tiene este proceso dentro de las matemáticas escolares. Asumiendo que realizar actividades de resolución de problemas implica otras prácticas matemáticas, no explicitar estas últimas es peligroso. La literatura ha señalado que este hecho puede terminar provocando que se omitan dentro de las aulas.

Sobre el KMS, los formadores tuvieron pocas menciones al respecto. Este resultado puede deberse a que al no tener claridad sobre qué aspectos incluir, en general, en la formación de profesores de educación especial, los formadores omitieron estos aspectos que implican profundidad (Carrillo et al., 2018). Por ejemplo, solo fue posible inferir referencias a las conexiones transversales, lo que deja de lado otro tipo de conexiones como podrían ser las auxiliares o las basadas en la simplificación o en el incremento de la complejidad.

Finalmente, este trabajo es un llamado de atención a las escuelas de educación que forman profesores de educación especial. Particularmente, estos resultados permiten visualizar las diferentes perspectivas de formadores y que probablemente se plasmen en sus clases. En este sentido, los resultados aquí presentados pueden servir de insumo para que formadores de profesores, tanto en el área de educación matemática como de educación especial, discutan sobre qué aspectos debería contemplar la formación de los futuros profesores de educación especial. Este hecho es relevante pues al contar con estándares y guías poco claras sobre lo que se espera de los futuros docentes respecto a la enseñanza de las matemáticas, solo el trabajo colaborativo entre ambas áreas de conocimiento podrá contribuir a la mejora de la formación inicial.

Agradecimientos

Trabajo financiado por la Dirección de Investigación de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación bajo los Proyectos 23-2021-PIED y 05-2023-EFA.

Referencias

Allsopp, D. H. y Haley, K. C. (2015). A synthesis of research on teacher education, mathematics, and students with learning disabilities. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal, 13*(2), 177-206.

Blömeke, S., Jentsch, A., Ross, N., Kaiser, G. y König, J. (2022). Opening up the black box: Teacher competence, instructional quality, and students' learning progress. *Learning and Instruction, 79,* 101600. https://doi.org/10.1016/J.LEARNINSTRUC.2022.101600

Brownell, M. T., Steinbrecher, T., Kimerling, J., Park, Y., Bae, J. y Benedict, A. (2014). Dimensions of Teacher Quality in General and Special Education. En P. T. Sindelar, E. D. McCray, M. T. Brownell y B. Lingnugaris/ Kraft (Eds.), *Handbook of research on special education teacher Preparation* (pp. 423-444). Routledge.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8th ed.). Routledge.

Firestone, A. R., Aramburo, C. M. y Cruz, R. A. (2021). Special educators' knowledge of high-leverage practices: Construction of a pedagogical content knowledge measure. *Studies in Educational Evaluation, 70, 1-13.* https://doi.org/10.1016/J.STUEDUC.2021.100986

Gersten, R., Chard, D. J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P. y Flojo, J. (2009). Mathematics instruction for students with learning disabilities: A meta-analysis of instructional components. *Review of Educational Research, 79*(3), 1202-1242. https://doi.org/10.3102/0034654309334431

Greer, D. L. y Meyen, E. L. (2009). Special education teacher education: A perspective on content knowledge. *Learning Disabilities Research y Practice, 24*(4), 196-203. https://doi.org/10.1111/j.1540-5826.2009.00293.x

Griffin, C. C., van Garderen, D. y Ulrich, T. G. (2014). Teacher preparation. Mathematics. En P. T. Sindelar, E. D. McCray, M. T. Brownell, y B. Lignugaris/Kraft (Eds.), *Handbook of research on special education teacher preparation* (pp. 271-287). Routledge.

Kelcey, B., Hill, H. C. y Chin, M. J. (2019). Teacher mathematical knowledge, instructional quality, and student outcomes: A multilevel quantile mediation analysis. *School Effectiveness and School Improvement, 30*(4), 398-431. https://doi.org/10.1080/09243453.2019.1570944

Kuckartz, U. (2019). Qualitative text analysis: A systematic approach. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in mathematics education* (pp. 181-198). Springer.

Lambert, R. y Tan, P. (2020). Does disability matter in mathematics educational research? A critical comparison of research on students with and without disabilities. *Mathematics Education Research Journal, 32*(1), 5-35. https://doi.org/10.1007/S13394-019-00299- 6/TABLES/1

Ministerio de Educación [MINEDUC]. (2012). *Bases curriculares educación básica.* Autor.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all.* Autor.

Park, Y., Kiely, M. T., Brownell, M. T. y Benedict, A. (2019). Relationships among special education teachers' knowledge, instructional practice and students' performance in reading fluency. *Learning Disabilities Research y Practice, 34*(2), 85-96. https://doi.org/10.1111/LDRP.12193

Skjong, R. y Wentworth, B. (2001, mayo 27-junio 2). *Expert judgement and risk perception* [Presentación en una conferencia]. The 11th International Offshore and Polar Engineering Conference, Seattle, Estados Unidos.

van Garderen, D., Thomas, C. N., Stormont, M. y Lembke, E. S. (2013). An overview of principles for special educators to guide mathematics instruction. *Intervention in School and Clinic, 48*(3), 131-141. https://doi.org/10.1177/1053451212454006

ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UN PROFESOR DE MATEMÁTICAS AL ENSEÑAR EL CONCEPTO DE VARIABLE

Analysis of the Specialised Knowledge of a Mathematics Teacher when Teaching the Concept of Variables

Escudero-Domínguez, A.[a], Yepes-Montoya, A.[b]

[a] Universidad de Sevilla, España
[b] Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia

Temática: 3 – MTSK en diferentes temas y etapas

Resumen.
Esta investigación tiene como objetivo identificar y caracterizar el conocimiento especializado de un profesor de matemáticas en servicio, al enseñar el concepto de variable en un curso de álgebra en grado octavo de básica secundaria. Para ello se ha analizado una sesión de clase grabada en video y un cuestionario previo a la grabación a través del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), el cual se usa como herramienta teórica y analítica que permite evidenciar el conocimiento que el profesor moviliza al enseñar este concepto algebraico. En esta sesión de clase se observa que el profesor conoce elementos tanto del Conocimiento Matemático como del Conocimiento Didáctico del Contenido respecto del concepto de variable en su uso como número general, así como también se encuentran relaciones entre distintos subdominios del modelo.

Palabras clave. Variable, Álgebra escolar, Práctica educativa, MTSK.

Abstract.
This research aims to identify and characterize the specialized knowledge of a mathematics teacher in service, when teaching the concept of variable in an algebra course in eighth grade of secondary school. For this, a session of the class recorded on video and a questionnaire prior to the recording have been analyzed through the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge model (MTSK), which is used as a theoretical and analytical tool that allows demonstrating the knowledge that the teacher mobilizes when teaching this algebraic concept. In this class session it is observed that the teacher knows elements of both Mathematical Knowledge and Didactic Content Knowledge regarding the concept of variable in its use as a general number, as well as relationships between different subdomains of the model.

Keywords. Variable, School algebra, Educational practice, MTSK.

Escudero-Domínguez, A. y Yepes-Montoya, A. (2023). Análisis del conocimiento especializado de un profesor de matemáticas al enseñar el concepto de variable. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 222-229). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

Las investigaciones en torno al conocimiento profesional de los profesores son fundamentales para entender las dinámicas de su práctica docente (Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2020). Siguiendo esta línea de investigación, en este trabajo se pretende analizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas a través del modelo MTSK (Carrillo-Yañez et al., 2018) con lo cual se pretende caracterizar dos de los tres dominios del modelo, el Conocimiento Matemático (MK) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), a través de un análisis minucioso sobre el conocimiento profesional de un profesor en servicio, que permita evidenciar sus fortalezas para la enseñanza del concepto de variable en un curso de álgebra elemental para estudiantes de grado octavo de básica secundaria, y que sirva de fundamento para direccionar y fortalecer los conocimientos didácticos del profesor en una etapa posterior de la investigación.

En matemáticas, el álgebra escolar es quizás uno de los componentes que genera mayor dificultad a los estudiantes para su comprensión. Esto podría deberse a que esta área de conocimiento requiere un nivel más abstracto de pensamiento y, por lo tanto, de procesos cognitivos de orden superior como analizar, evaluar procesos y crear (Krathwohl, 2002), de allí que los conceptos algebraicos requieran una especial atención para su enseñanza. Sin embargo, algunos conceptos son usados con simpleza sin valorar su complejidad como es el caso del concepto de variable (Alonso et al., 1993; Radford, 2006; Rojas-Garzón et al., 2014), el cual se aborda como un concepto implícito en temas como ecuaciones, expresiones algebraicas o funciones. Algunos profesores usan la letra como abreviatura no como representación de una cantidad, lo cual conlleva a errores conceptuales y procedimentales en la interpretación y análisis de procesos algebraicos (Aké, 2019) que pueden afectar la comprensión del álgebra superior y otros contenidos matemáticos (Ladele et al., 2014).

Marco teórico

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)

El modelo MTSK se plantea como herramienta teórica y analítica buscando conseguir información sobre el conocimiento específico del profesor de matemáticas. Este modelo concibe el conocimiento de manera integral, aunque para su estudio se distinguen distintos dominios de conocimiento: Conocimiento Matemático (MK), Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) y Creencias (Carrillo-Yañez et al., 2018), aunque en este trabajo las creencias no serán objeto de estudio. Estos dominios están divididos a su vez en distintos subdominios, y dentro de cada uno de ellos, existen diversas categorías que hacen más fácil su caracterización.

Dentro del MK, se encuentran los siguientes subdominios:

El Conocimiento de los Temas (KoT) que es el conocimiento que posee el profesor sobre los temas y la manera de enseñarlos. Abarca los procedimientos, las definiciones, las propiedades, las distintas formas en las que se puede representar un determinado conocimiento, así como el uso y aplicación de un tema.

El Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM) corresponde al conocimiento que posee el profesor sobre las formas en que se conectan los diferentes temas en Matemáticas. Incluye el conocimiento sobre conexiones de complejización, simplificación, transversales y auxiliares.

El Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) que es el conocimiento que posee el profesor sobre el metaconocimiento relacionado con hacer matemáticas. Es el único subdominio que hoy en día no tiene definidas unas categorías claras (Carrillo-Yañez et al., 2018), sino una serie de indicadores que nos ayudan a su caracterización. Estos son la jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos, los procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas, las formas de validación y demostración, el papel de los símbolos y uso de lenguaje formal, las condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones, así como las prácticas particulares del quehacer matemático.

Dentro del PCK se encuentran los siguientes subdominios:

El Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) que abarca el conocimiento del profesor sobre cómo enseñar un contenido matemático. Contiene el conocimiento sobre distintas teorías de enseñanza asociadas a un determinado contenido matemático, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos e, incluso, sobre características de distintos recursos didácticos utilizados para enseñar matemáticas. El Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) que comprende el conocimiento del profesor sobre cómo el alumnado aprende un contenido matemático (Escudero-Ávila, 2022). Incluye el conocimiento sobre distintas teorías de aprendizaje y formas de interacción, así como el conocimiento de fortalezas y dificultades asociadas a un determinado contenido matemático. Además de esto, se ubican aquí los aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas.

El Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS) referido al conocimiento que posee el profesor sobre lo que está estipulado que aprenda un estudiante (Codes y Contreras, 2022). Este subdominio abarca el conocimiento sobre los resultados de aprendizaje esperados, el nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado y la secuenciación con temas anteriores y posteriores.

Concepto de Variable

El concepto de variable es considerado por autores como Ursini et al. (2000), Trigueros et al. (1996), entre otros, como uno de los aspectos más relevantes en el álgebra elemental, por lo cual se le ha prestado atención a su enseñanza durante las últimas décadas, especialmente en la interpretación que se hace de sus diferentes usos, los cuales según Ursini y Trigueros son: variable como incógnita, variable como número general y variable en su relación funcional. Para esta sesión de clase se trabaja la variable como número general, que según Ursini et al. (2000) implica:

> El reconocimiento de reglas y patrones en secuencias numéricas y familias de problemas, interpretar la variable simbólica como un ente que puede tomar cualquier valor, interpretar la variable simbólica como un objeto indeterminado que se puede operar, desarrollar la idea de método general distinguiendo los elementos variables de los invariantes en familias de problemas similares, hasta llegar a la simbolización de un método general y del objeto general sobre el cual éste actúa, y manipular el símbolo para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas. (p. 28)

Estas implicaciones del concepto de variable requieren por parte del profesor un profundo MK y PCK que le permita el planteamiento y desarrollo de problemáticas pertinentes para el uso de la variable que se pretende enseñar. En el estudio en mención, los autores concluyen que la enseñanza del concepto de variable a través de los diferentes niveles escolares evidencia que las características que hacen diferentes los usos de este concepto no se hacen explícitos en su enseñanza y, por el contrario, los errores que cometen los estudiantes que inician el aprendizaje del álgebra no son corregidos, lo que posiblemente explique las dificultades para la comprensión de procesos matemáticos más avanzados.

Metodología

En este trabajo se pretende caracterizar el conocimiento especializado de un profesor de matemáticas al enseñar el concepto de variable en un curso de grado octavo de básica secundaria. Este conocimiento es analizado en una etapa previa a la formación didáctica que se pretende implementar con algunos profesores de matemáticas de básica secundaria para la enseñanza del álgebra escolar en una institución pública de la ciudad de Pereira, Colombia, de tal forma que se promueva la adquisición de conocimientos didácticos que propicien prácticas de enseñanza innovadoras que permitan caracterizar cambios didácticos en la práctica docente (Mosquera, 2008). Este informe forma parte de una investigación cualitativa (Creswell, 2012) con enfoque de estudio de caso instrumental (Stake, 2013). La fuente de obtención de la información es una clase videograbada sin intervención externa y un cuestionario inicial previo a la grabación, que sirvió para reafirmar aspectos referentes a la clase. La información se analizó utilizando el software para análisis de información ATLAS.ti.

Juan (pseudónimo) es un profesor en servicio con más de 22 años de experiencia en docencia básica secundaria. Posee título de Licenciado en Matemáticas y Física y tiene un postgrado en Educación. En el cuestionario previo el profesor plantea que la importancia de la enseñanza del álgebra radica en que es útil *"para desarrollar la inteligencia matemática y resolver problemas sencillos de su vida cotidiana como problemas aditivos o multiplicativos, con porcentaje, áreas, volúmenes y para desarrollar el pensamiento lógico".* Este planteamiento el profesor lo evidencia en su conocimiento acerca de la enseñanza del concepto de variable, en este caso se tomó un episodio de la clase donde el profesor plantea un ejercicio basado en "adivinar la edad de una persona" con la finalidad de que los estudiantes comprendan el concepto de variable en su uso como número general[1] (Ursini et al., 2000).

Con el estudio se pretende analizar el conocimiento especializado del profesor a través del modelo MTSK, en dos de sus tres dominios: el Conocimiento Matemático (MK) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK).

Síntesis de la clase

En el desarrollo de la clase el profesor plantea tres problemas con los cuales pretende que los estudiantes se aproximen al concepto de variable a través de encontrar regularidades, desarrollar pensamiento lógico matemático y reconocimiento de los usos de la variable como número general y variable como incógnita. El profesor inicia la clase expresando el objetivo de esta: *"Hallar la expresión algebraica que liga un patrón numérico con una secuencia dada, eso se corresponde al estándar de uso de procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas".* Luego pasa a plantear un ejercicio que consiste en "adivinar la edad de una persona". El enunciado del ejercicio es el siguiente: *"Empiecen con su edad y vamos a multiplicarla por 4, tomen su edad y la multiplican por 4, luego le restamos 2, yo voy a ir haciendo la mía, … y luego la dividimos por 2 y le sumamos 1, repito multiplicamos por 4, le restamos 2, lo dividimos por 2 y finalmente le sumamos 1.* El profesor solicita a los estudiantes que realicen una serie de cálculos aritméticos y aleatoriamente pregunta por el resultado obtenido, con lo cual Juan les devuelve su edad. Después de captar la atención e interés de los estudiantes procede a desarrollar los cálculos aritméticos en la pizarra (Figura 1), tomando como ejemplo el resultado de un estudiante, llevando la secuencia de operaciones y encontrando su edad. A continuación, indaga sobre cómo sería el proceso empleando la variable y representa algebraicamente los cálculos indicados por los estudiantes en la pizarra (Figura 2). Con este ejemplo Juan enseña la variable como número general. Durante la clase no se hacen explícitas las características que diferencian los usos de la variable, y no se trabaja la variable en su relación funcional.

[1] En Colombia el currículo de matemáticas considera la iniciación de la asignatura de álgebra en grado octavo, pero en años anteriores se trabaja el componente variacional, por lo cual los estudiantes ya conocen el uso de la variable como incógnita

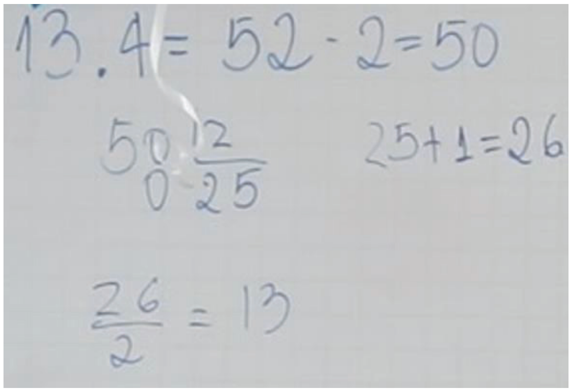


Figura 1. Representación aritmética

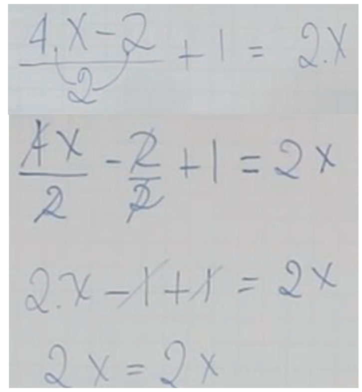


Figura 2. Representación algebraica

Análisis y resultados

El profesor inicia la sesión de clase proponiendo un ejercicio basado en “adivinar la edad de una persona”. Para ello emplea un proceso aritmético (Figura 1) y a partir del resultado dado por los estudiantes el profesor les “adivina” su edad, lo que genera interés en los estudiantes sobre el proceso realizado. Esto denota conocimiento de Juan sobre la utilización de este problema para causar expectativa a través de una situación llamativa basada en “adivinar la edad” con la posible finalidad de captar la atención de los estudiantes sobre el tema (KFLM, aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas). Además, se evidencia que el profesor conoce una situación problema que incluye diferentes operaciones y que permite la generalización a través de la variable (KoT, fenomenología y aplicaciones). Así mismo, conoce una serie de operaciones aritméticas para resolver el problema planteado (KoT, procedimientos).

Juan conoce como estrategia de enseñanza el planteamiento de un problema para trabajar la variable (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). Lo anterior está basado en su conocimiento sobre la definición y usos de la variable y lo evidencia al tratar de encontrar una regularidad (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos). Todo ello debido a su conocimiento sobre las formas de proceder al abordar el concepto de variable y las distintas fases de Polya para la resolución del problema (Polya, 1965) (KPM, jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos). También muestra que conoce un heurístico para la fase de planificación y exploración (Carrillo, 1998) concretamente buscar regularidades con la intención de regularizar (KPM, procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas). Este conocimiento es movilizado en este fragmento: “¿por qué se presenta eso? ¿cómo sería eso en términos de x?

El profesor representa en la pizarra las operaciones planteadas en el ejercicio y los respectivos cálculos aritméticos, evidenciando que conoce la representación simbólica (Duval, 2006) y la utiliza para mostrar la secuencia de operaciones involucradas (Figura 1 y Figura 2). Posteriormente solicita a los estudiantes que conviertan el registro numérico en un registro algebraico, haciendo uso de su conocimiento sobre los diferentes procedimientos (KoT, procedimientos) para lograr que los estudiantes realicen conversiones de un registro de representación a otro (Duval, 2006) (KoT, registros de representación). De tal manera que logren encontrar la regularidad que se presenta en el ejercicio (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), ya que sabe acerca del establecimiento de regularidades y patrones como paso previo a la generalización y hace uso de la variable como número general (Trigueros et al., 1996) (KPM, formas de validación y demostración). Ahora Juan hace la conversión del ejercicio de su representación simbólica a su representación algebraica (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos), evidenciando que conoce distintos registros de representación para abordar un problema (KoT, registro de representación) y conoce el proceso asociado a un heurístico concretamente analizar la consistencia del proceso (KPM, procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas).

De igual manera, al analizar el cuestionario proporcionado por el profesor previo a la grabación de la clase, se puede confirmar que respecto al conocimiento matemático (MK) Juan evidencia conocer situaciones en las que se puede utilizar el concepto de variable en sus diferentes usos para la resolución de problemas (KoT, fenomenología y aplicaciones). Sin embargo, estos usos no se abordan de forma explícita ni en el cuestionario ni durante la sesión de la clase. Juan considera que puede enseñar este concepto con elementos geométricos evidenciando que conoce la estructura de las matemáticas (KSM, conexiones auxiliares), así como los procesos asociados a la resolución de problemas en aplicaciones de la variable (KPM, procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas). De igual forma, Juan conoce las fortalezas y debilidades de sus estudiantes para interiorizar los diferentes componentes del álgebra y específicamente de temas como el concepto de variable (KFLM, fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas). Esto lo evidencia su respuesta: *“La enseñanza de conceptos más abstractos requiere un esfuerzo del pensamiento por parte del estudiantado y sobre todo a los que les falta fundamentación en las matemáticas básicas y pre-álgebra prefieren no hacer este esfuerzo mental” cuando se le preguntó “¿Cuáles son las dificultades y limitaciones conectadas con la enseñanza del concepto de variable?”.* También se evidencia que Juan conoce las formas de interacción con los contenidos matemáticos, así como que conoce las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). También conoce los contenidos del álgebra y la secuenciación con temas anteriores (KMLS, secuenciación con temas anteriores y posteriores), como lo evidencia cuando expresa que *“Se deben conceptualizar operaciones básicas desde primaria, y realizar una actividad intensa de operaciones y resolución de problemas para afianzar la pre-álgebra”.*

Tanto en los análisis del video de la clase como en el cuestionario proporcionado por el profesor se evidencia que conoce los distintos subdominios tanto de Conocimiento Matemático (MK) como del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). Juan evidencia conocimientos en la conceptualización de la variable y su uso como número general, en procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas. De igual forma, evidencia conocimiento sobre las fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas de sus estudiantes y conocimiento de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, para su enseñanza. Conoce también el nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado de sus estudiantes.

Conclusiones

En este trabajo se ha caracterizado el conocimiento especializado que posee un profesor de básica secundaria para la enseñanza del álgebra escolar. Para ello se han utilizado distintas herramientas metodológicas como la videograbación de la clase y un cuestionario inicial que permitieron identificar y analizar dicho conocimiento especializado a partir del modelo MTSK.

A partir de la sesión de clase y el cuestionario se evidencian los conocimientos que el profesor moviliza en cuanto al Conocimiento Matemático y Conocimiento Didáctico del Contenido. En este fragmento analizado se reflejan evidencias e indicios de conocimiento de la mayoría de los subdominios, excepto del Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM), debido a que este subdominio requiere preguntas específicas que no se hacen evidentes en el desarrollo de la clase (Escudero-Ávila et al., 2017). Este análisis refleja además relaciones entre los distintos subdominios, como, por ejemplo, el caso del conocimiento matemático que el profesor posee sobre los registros (simbólico, algebraico, pictórico) (KoT, registros de representación) el cual le ayuda y le permite diseñar estrategias o tareas que pueden ser útiles para el desarrollo de la clase (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos).

En el desarrollo del episodio analizado no se hacen explícitas las características que diferencian los usos de la variable ni sus aplicaciones. No se trabaja el uso de la variable en su relación funcional, ni en su connotación de variable como incógnita (Trigueros et al., 1996; Ursini et al., 2000). En el transcurso de la clase, aunque se trabajan los diferentes usos de la variable de manera aislada no se hace énfasis en que es un concepto multifacético.

La observación de la práctica educativa de profesores ha brindado información sobre los tipos de conocimientos y destrezas necesarias para enseñar. Esto ha servido como punto de partida en diferentes países para establecer programas de formación docente y diseño de políticas educativas.

Referencias

Aké, L. P. (2019). Conocimiento matemático de maestros en formación sobre la simbología algebraica. *IE Revista de Investigación Educativa de La Rediech, 10*(19), 55–70. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v10i19.506

Alonso, F., Barbero, C., Fuentes, I., Azcárate, A. G., Dozargarat, J. M., Gutierrez, S., Ortíz, M. A., Riviere, V., y Da Veiga, C. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Editorial Síntesis. S. A.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la Matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones.* Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Codes, M., y Contreras, L. C. (2022). Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas. En J. Carrillo-Yáñez, M. Á. Montes-Navarro, y N. Climent-Rodríguez (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado el profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 95–108). Dykinson. https://doi.org/1014679/1457

Creswell, J. W. (2012). *Educational Research* (4th ed., Vol. 4). Pearson.

Delgado-Rebolledo, R., y Zakaryan, D. (2020). Relationships Between the Knowledge of Practices in Mathematics and the Pedagogical Content Knowledge of a Mathematics Lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(3), 567–587. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Escudero-Ávila, D. (2022). Conocimiento de las características del aprendizaje matemático. En J. Carrillo, M. A. Montes, y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 83–94). Dykinson. https://doi.org/1014679/1456

Escudero-Ávila, D., Vasco, D., y Aguilar-González, A. (2017). Relaciones entre los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (vol 1, pp. 109-116). CIBEM.

Krathwohl, D. R. (2002). A Revision of Bloom's Taxonomy: An Overview. *Theory into Practice, 41*(4), 212–219.

Ladele, O., Ormond, C., y Hackling, M. (2014). The Effect of Professional Learning on Early Algebra Teachers' Content Knowledge in Nigeria. En J. Anderson, M. Cavanagh, y A. Prescott (Eds.), *Proceedings of the 37th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,* (pp. 351–356). Merga.

Mosquera, C. J. (2008). *El cambio en la epistemología y en la práctica docente de profesores universitarios de química* [Tesis doctoral, Universidad de Valencia]. https://roderic.uv.es/handle/10550/15335

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas.

Radford, L. (2006). *Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective.* En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the PME-NA XXVIII* (pp. 2–48).

Rojas Garzón, P. J., y Vergel Causado, R. (2014). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Revista Científica, 17*(2), 688–694. https://doi.org/10.14483/23448350.7753

Stake, R. E. (2013). Estudio de casos cualitativos. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Las estrategias de investigación cualitativa: Manual de investigación cualitativa* (3 ed, Vol. III, pp. 154-197). Editorial Gedisa.

Trigueros, M., Quintero, R., Reyes, A., y Ursini, S. (1996). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. *Enseñanza de Las Ciencias, 14*(3), 351–363.

Ursini, S., Trigueros, M., y Lozano, D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación Matemática, 12*(2), 27–48. https://doi.org/10.24844/em1202.02

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DOCENTE SOBRE FUNÇÕES: ANÁLISE DAS RELAÇÕES ENTRE KOT E KMT

Specialized teacher knowledge about functions:
Analysis of relations between KOT and KMT

Vianna-Júnior, H. C.[a], Moriel-Junior, J. G.[b]

[a] Secretaria de Educação do Estado de Mato Grosso, Brasil

[b] Instituto Federal de Mato Grosso, Brasil

Temática: 3 – MTSK em diferentes temas e etapas

Resumo.
O objetivo deste trabalho é analisar relações existentes entre o Conhecimento de Tópicos Matemáticos (KoT) e o Conhecimento do Ensino de Matemática (KMT) presentes em produções científicas sobre o ensino de funções na Educação Básica indexadas na Web Of Science entre 2015 e 2020. Utilizamos o Mathematics Teachers' Specialized Knowledge para identificar os conhecimentos no corpus analisado. Realizamos um estado do conhecimento qualitativo e documental resultando no corpus de seis trabalhos dentro da temática e do período em questão. Os resultados mostram dezesseis conexões entre KoT e KMT por meio do conhecimento das aplicações dos conceitos de funções em tarefas contextualizadas para melhor compreensão dos estudantes sobre propriedades, definições, registros, representações e procedimentos para o cálculo de imagem e pré-imagem de funções.

Palavras-chave. Funções, Ensino de Matemática, MTSK, Educação Básica.

Abstract.
The objective of this work is to analyze existing relationships between Knowledge of Mathematical Topics (KoT) and Knowledge of Teaching Mathematics (KMT) present in scientific productions on teaching functions in Basic Education indexed in the Web Of Science between 2015 and 2020. We use Mathematics Teachers' Specialized Knowledge to identify knowledge in the analyzed corpus. We carried out a qualitative and documentary state of knowledge resulting in the corpus of six works within the theme and period in question. The results show sixteen connections between KoT and KMT through the knowledge of the applications of the concepts of functions in contextualized tasks for a better understanding of the students about properties, definitions, registers, representations and procedures for the calculation of image and pre-image of functions.

Keywords. Functions, Teaching Mathematics, MTSK, Base Education.

Vianna-Júnior, H. C. y Moriel-Junior, J. G. (2023). Conhecimento especializado docente sobre funções: análise das relações entre KoT e KMT. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 230-237). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introdução

As investigações sobre o conhecimento docente têm sido uma das principais tendências de investigação na Educação Matemática (Pazuch y Ribeiro, 2017) e contribuem para melhorias da aprendizagem escolar (Vianna-Júnior y Moriel-Junior, 2021). Neste artigo abordamos o tópico de funções, cujas aplicações em situações cotidianas são vastas, mas o rendimento escolar dos estudantes neste tópico tem sido baixo no Brasil (Araujo, 2018).

Em estudos anteriores Vianna-Júnior (2022) caracterizou os conhecimentos especializados que aparecem nas produções científicas sobre o conhecimento docente para o ensino de funções na Educação Básica, unificando-os por subdomínios e categorias do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK). Entretanto, não houveram avanços nas descrições das conexões entre os conhecimentos, que é tão importante quanto os identificar e unificá-los por categorias (Vianna-Júnior y Moriel-Junior, 2021). Considerando a importância da articulação entre conhecimentos matemáticos e didáticos para o ensino de Matemática (McCrory et al., 2012; Araujo, 2018) nos questionamos sobre como se relacionam o Conhecimento de Tópicos Matemáticos e o Conhecimento do Ensino de Matemática para o ensino de funções na Educação Básica? Este trabalho tem por objetivo analisar as relações entre o Conhecimento de Tópicos Matemáticos e o Conhecimento do Ensino de Matemática docentes para o ensino de funções na Educação Básica em produções científicas indexadas na *Web Of Science* entre 2015 e 2020. Os resultados apresentados se inserem nos esforços do TSK *Group* do Instituto Federal de Mato Grosso, campus Cuiabá[1].

Conhecimento especializado de professores de matemática

O modelo *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK) descreve o conjunto de conhecimentos que um professor de Matemática pode ou deve mobilizar para desempenhar sua atividade profissional, cujo foco é o ensino e a aprendizagem dos estudantes (Araujo, 2018; Carrillo et al., 2018). Isto torna o MTSK uma ferramenta importante para a investigação analítica do conhecimento especializado de professores de Matemática (Moriel-Junior y Alencar, 2019).

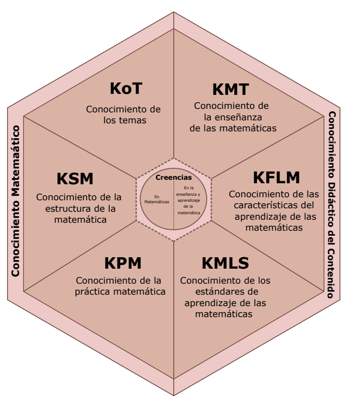


Figura 1. Modelo MTSK

O MTSK é composto por dois domínios. O primeiro deles é o Conhecimento Matemático (MK) com três subdomínios descritos a seguir. O Conhecimento Matemático é composto pelo Conhecimento de Tópicos Matemáticos (KoT) que envolve as definições, propriedades, aplicações, diferentes representações e procedimentos matemáticos (incluindo o como, o quando, o porquê realizar tal procedimento e seus resultados possíveis). O Conhecimento da Estrutura Matemática (KSM) que diz respeito às conexões entre tópicos matemáticos, incluindo os elementares e avançados e de diferentes níveis escolares. O Conhecimento da Prática Matemática (KPM) se refere ao metaconhecimento relativo ao fazer matemático, ao modo de produzir matemática.

[1] http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/529979

O segundo domínio é o Conhecimento Didático do Conteúdo é composto pelos seguintes três subdomínios. O Conhecimento do Ensino de Matemática (KMT) se refere aos materiais e métodos utilizados, bem como suas potencializações e limitações, as teorías de ensino, tanto institucionalisadas quanto pessoais e as tarefas, exemplos e estratégias que podem utilizar durante o ensino. O Conhecimento das Características de Aprendizagem de Matemática (KFLM) envolve o conhecimento sobre as teorias de aprendizagem, as linguagens que podem ser utilizadas para favorecer a aprendizagem e as potencialidades, dificuldades e possíveis erros dos estudantes em relação a um determinado tópico. Por sua vez, o Conhecimento dos Parâmetros de Aprendizagem de Matemática (KMLS) que diz respeito ao nível conceitual e procedimental que pode ou deve ser alcançado pelos estudantes em determinada etapa escolar de acordo com o currículo específico de cada país.

Metodologia

Trata-se de uma pesquisa bibliográfica que discute a literatura sobre o conhecimento docente para o ensino de funções na Educação Básica (Vilaça, 2010) através de uma abordagem qualitativa, analisando os dados em toda sua riqueza e respeitando as formas como foram transcritos (Bogdan y Bliken, 1994). Quanto à abordagem metodológica, realizamos os procedimentos para estabelecer o estado do conhecimento nas produções sobre o conhecimento do professor de Matemática ao ensinar funções na Educação Básica no período entre 2015 e 2020 a partir sistematização dos conhecimentos identificados para melhor compreensão sobre a temática em questão (Kohls-Santos y Morosini, 2021). Em relação aos objetivos, o trabalho é classificado como analítico-descritivo através de um levantamento e uma revisão das produções científicas (Romanowski y Ens, 2006).

A fonte de dados escolhida foi a *Web Of Science* por conter uma grande quantidade de pesquisas na área da educação (Gumiero y Pazuch, 2020). A delimitação por período ocorreu devido a grande quantidade de produções indexadas na base de dados e a escolha do período entre 2015 e 2020 com a finalidade de obter os avanços sobre a temática nos últimos anos.

Para a obtenção de dados, utilizamos os seguintes descritores para o levantamento bibliográfico: 1. (*Teaching, Knowledge, Functions, Mathematics*); 2. (*Teachers' Mathematics Knowledge AND Concept Functions*); 3. (*Teacher Mathematics Knowledge AND Functions*); 4. (*Mathematics Teacher Knowledge for teaching function*); e 5. (*Teacher Mathematics Knowledge "AND" Teaching Functions*), encontrando ao todo 1210 produções. Em seguida, realizamos a exclusão por período (464). Das 746 produções restantes, realizamos a leitura dos resumos, títulos e palavras-chave e excluimos as produções que não correspondiam a temática em questão (724). Dentre as 22 produções restantes, desconsideramos as produções que se repetiam nos diferentes descritores, obtendo o *corpus* de análise a seguir com 6 trabalhos selecionados para análise.

Tabela 1 . Corpus de análise

Código	***Referência***	***Título (em portugués)***	***Sujeitos***
A01	Rodríguez-Flores et al. (2016)	Conhecimento de conteúdo comum manifestado por um professor no ensino dos conceitos básicos de funções: um estudo de caso	1 Professor de escola pública
A02	Espinoza-Vásquez et al. (2016)	Em direção a uma relação entre ETS e MTSK através do conceito de função	1 professor (Arturo) de nível de ensino e escola não informados
A03	Espinoza-Vásquez et al. (2017)	Uso de analogia no ensino do conceito de função: relação entre o conhecimento de Tópicos e o conhecimento do Ensino de Matemática	1 professor de escola privada
A04	Hatisaru y Erbas (2017)	Conhecimento matemático para ensinar o conceito de função e resultados de aprendizagem do aluno	2 professores do Ensino Médio Profissionalizante (Ali e Fatma)
A05	Rodríguez-Flores et al. (2018)	Conhecimento especializado de professores de matemática: um estudo de caso sobre o ensino dos conceitos básicos de função	1 professor de escola pública
A06	Espinoza-Vásquez et al. (2018)	Os conhecimentos especializados do professor de Matemática na utilização da analogia no ensino do conceito de função	2 professores de escola privada (Jaime e Arturo)

Fonte: Elaboração própria.

A análise de dados se deu por meio da identificação de indícios e evidências de conhecimento especializado de professores de Matemática identificados nos trechos dos artigos (Moriel-Junior y Carrillo, 2014), que foram classificados de acordo com o domínio, subdomínio, categoria ou indicador do MTSK. Para este artigo, consideram-se os trechos em que foi possível identificar conexões entre o Conhecimento de Tópicos Matemáticos e o Conhecimento do Ensino de Matemática. O instrumento de análise utilizados foi o instrumento iMTSK (Moriel-Junior, 2021), conforme Figura 2.

Dados	**Análise do pesquisador**		
Manifestação do sujeito	**O sujeito manifestou conhecimento...**	**associado a...**	**que consiste em...**
Trecho do episódio (Fonte, linha ou página)	**[subdomínio]**	**[categoria]**	**[síntese do conhecimento][a]**
[Exemplo] A aula de resolução de problemas termina quando eu sistematizo o conceito de Princípio fundamental da contagem a partir das soluções dos alunos sobre combinar calças e camisas. (Professora, 3-5)	***do ensino de matemática (KMT)***	***Teorias de ensino***	***uma das etapas da metodologia 'resolução de problemas' para ensinar o 'Princípio fundamental da contagem': sistematização do conceito 'a partir das soluções dos alunos sobre [o problema de] combinar calças e camisas'***

Figura 2. Instrumento de análise MTSK - iMTSK (Moriel Junior, 2021)

Resultados e discussão

Nos artigos identificamos 16 conexões entre Conhecimento de Tópicos Matemáticos (KoT) e Conhecimento do Ensino de Matemática (KMT), em que diversas categorias de cada um deles se relacionam com foco na promoção do ensino e da aprendizagem de Funções, como descrevemos a seguir.

Para "introduzir os conceitos de função" (Rodríguez-Flores et al., 2018, p. 97), no artigo A05 é apresentado um problema de aplicação de função no cálculo do valor de uma corrida de taxi que envolve a tarifa e a quilometragem rodada (KoT - Fenomenologias e aplicações). Este problema deve ser resolvido pelos estudantes em grupo e um aluno de "cada grupo deve ir ao quadro negro apresentar o procedimento e a solução encontrada" (Ibid.), que segundo os autores, se configura como um ensino por resolução de problemas (KMT - Teorias de ensino).

No artigo A01 há uma tarefa que envolve as variáveis dependente e independente em uma aplicação de funções no cálculo do preço de uma corrida de taxi, em que "o cálculo do preço envolve a tarifa e a quilometragem rodada" (Rodríguez-Flores et al., 2016, p. 8). Assim, existe uma relação entre o conhecimento de uma aplicação de funções em uma situação do cotidiano (KoT - Fenomenologias e aplicações) que é discutida em uma tarefa para introduzir os conceitos de variável dependente e variável independente (KMT - Tarefas). Outra tarefa é proposta com o objetivo de "introduzir os conceitos de imagem e pré-imagem" (Rodríguez-Flores et al., 2016, p. 12), através de um problema que envolve o salário de um vendedor de revistas. "O salário recebido (y) do vendedor depende da quantidade (x) de revistas vendidas" (Rodríguez-Flores et al., 2016, p. 12). Tal situação também apresenta uma relação entre os conhecimentos de uma aplicação de função em um contexto do cotidiano para produzir conhecimento matemático (KoT - Fenomenologias e aplicações) a partir de uma tarefa (KMT - Tarefas).

Ao falar sobre funções, o professor (A03) reconhece que aplicação dos conceitos é semelhante ao de uma máquina de lavar roupas, em que "a função da máquina é lavar" (Espinoza-Vásquez et al., 2017, p. 3291). Tal analogia é utilizada como estratégia de ensino para instruir os estudantes sobre os conceitos de função (KMT - Estratégias de ensino) através de uma aplicação desses conceitos no funcionamento de uma máquina de lavar (KoT - Fenomenologias e aplicações). Ademais, o professor faz o uso de dois registros de representação de uma função (KoT - Registros de representação), o verbal através das informações descritas e o pictórico ao desenhar a máquina de lavar na lousa (Espinoza-Vásquez et al., 2017).

No artigo A04 Ali conhece uma aplicação de transformação por meio de um processo do conceito de função em uma máquina de moer café, em que "os grãos de café sendo colocados na máquina, são expostos a um processo e terminando em forma de pó" (Hatisaru y Erbas, 2017, p. 712). Tal analogia é uma estratégia de ensino para estabelecer a relação de uma função ao processo de transformação (KMT - Estratégia de ensino) através de uma aplicação dos conceitos de função (KoT - Fenomenologias e aplicações). Posteriormente, Ali apresentou um exemplo para mostrar uma "função por meio de uma lista e um mapeamento" (Hatisaru y Erbas, 2017, p. 713) e encontrar o domínio e o intervalo (KMT - Exemplos) e para isso, fez o uso de três representações de uma função, sendo elas: algébrica ($f(x) = 2x + 1$), pares ordenados e diagramas de flechas (KoT - Registros de representações).

Jaime (A06) faz uma analogia de funções com uma máquina de doces para "ajudar seus estudantes a compreender e realizar o cálculo da imagem e pré-imagem de uma função" (Espinoza-Vásquez et al., 2018, p. 313). Ao utilizá-la como uma estratégia para melhor compreensão dos estudantes (KMT - Estratégias de ensino), Jaime compara a máquina de doces com um processo que define uma função (KoT - Definições) e a aproveita para ensinar a determinar a imagem e a pré-imagem de uma função através de uma equação (KoT - Procedimentos) e para "enfatizar a característica de unicidade"

(Espinoza-Vásquez et al., 2018, p. 314) ao relacionar uma moeda a um produto, o que consiste em uma propriedade de univalência de funções (KoT - Propriedades).

Arturo (A02) propõe uma tarefa com “o uso de outra representação (algébrica)” (Espinoza-Vásquez et al., 2016, p. 202) e para essa tarefa utiliza uma representação algébrica de função ($y = x + 4$) e ensina dois procedimentos, um para encontrar a imagem e outro para encontrar a pré-imagem da função dada, seja por “estimativas ou para a realização do processo inverso (Se $y = x + 4$, logo $x = y - 4$)” (Espinoza-Vásquez et al., 2016, p. 202). A tarefa proposta por Arturo para identificar a imagem e a pré-imagem de uma função (KMT - Tarefas) tem como auxílio um registro de representação algébrico (KoT - Registros de representação) com a finalidade de ensinar dois procedimentos (KoT - Procedimentos).
Fatma (A04) propõe uma tarefa em que os estudantes devem identificar os elementos do conjunto A (domínio) e devem “descobrir uma regra que mapeou esses elementos para o conjunto B (contradomínio)” (Hatisaru y Erbas, 2017, p. 716) e através desta tarefa (KMT - tarefas) utiliza duas representações de uma função (KoT - Registros de representação) ao desenhar um diagrama de flechas e enfatizar “as relações entre o produto cartesiano, relação e função (algébrico)” (Hatisaru y Erbas, 2017, p. 716). Fatma também adapta uma tarefa de um livro didático para os seus alunos e “por meio dessa atividade, ela enfatizou o requisito de univalência de funções” (Hatisaru y Erbas, 2017, p. 716), que consiste em uma propriedade de função (KoT - propriedades) enfatizada através de uma tarefa adaptada (KMT - Tarefas). Ademais explicou o “domínio, alcance e o conjunto de imagens, e mostrou tudo isso em um diagrama “ (Hatisaru y Erbas, 2017, p. 716), que consiste em uma representação de função através do diagrama de flechas (KoT - Registros de representação).

No artigo A05 o professor propõe uma tarefa “que se encontra dentro do interesse dos seus alunos” (Rodríguez-Flores et al., 2018, p. 100) utilizada para identificar os elementos de uma função (KMT - Tarefas). Tal tarefa, permitiu ao professor relacionar “conceitos como funções e relações” (Rodríguez-Flores et al., 2018, p. 100), que podem ser utilizados para definir funções (KoT - Definições).

No artigo A03 É apresentado um exemplo que “visa trabalhar no domínio-alvo das funções” (Espinoza-Vásquez et al., 2017, p. 3293) envolvendo números (KMT - Exemplos). Para isso, o professor faz o uso de uma representação algébrica ao escrever $f(x) = x + 2$ (KoT - Registros de representação) e ensina um procedimento para determinar a imagem de uma função no qual deve-se adicionar 2 aos números que correspondem a pré-imagem (KoT - Procedimentos).

Fatma (A04) conhece alguns exemplos de aplicações dos conceitos de função em alguns objetos como estojo, gravador de voz, máquina de lavar e telefone (KoT - Fenomenologias e aplicações), mas enfatiza que “a definição matemática da função é diferente” (Hatisaru y Erbas, 2017, p. 716). Assim, há indícios de que Fatma reconhece as limitações dos exemplos citados por ela (KMT - Exemplos) em relação à definição formal de uma função (KoT - Definições).

No artigo A05 uma aplicação de função no cálculo do “peso P de uma baleia em função do seu comprimento L” (Rodríguez-Flores et al., 2018, p. 99) é utilizada como exemplo para facilitar a compreensão das variáveis dependente e independente, em que “o peso P depende do comprimento L” (Rodríguez-Flores et al., 2018, p. 99). Dessa maneira, o professor aproveita o conhecimento de uma aplicação do conceito para produzir conhecimento matemático (KoT - Fenomenologias e aplicações) através de um exemplo (KMT - Exemplos) que visa facilitar a compreensão dos estudantes sobre as variáveis dependente e independente (KoT - Propriedades).

Jaime (A06) relacionou os nomes com os sobrenomes dos estudantes e posteriormente cada aluno ao seu grupo musical favorito para “estabelecer condições para a definição de uma função” (Espinoza-Vásquez et al., 2018, p. 312), que consiste em dois exemplos de relações que correspondem a uma função (KMT - Exemplos) utilizadas para defini-la de modo que “cada elemento desse conjunto (nome) é atribuído um único elemento do outro conjunto (sobrenome ou banda favorita)” (Espinoza-Vásquez et al., 2018, p. 312), que consiste em uma definição de função como relação entre dois conjuntos (KoT - Definições).

Considerações finais

Neste trabalho analisamos como ocorrem as relações entre o Conhecimento de Tópicos Matemáticos e o Conhecimento do Ensino de Matemática docentes para o ensino de funções na Educação Básica em produções científicas indexadas na *Web Of Science* entre 2015 e 2020. Os dados mostram 16 conexões entre os referidos subdomínios e que a relação entre eles ocorrem principalmente através das aplicações contextualizadas dos conceitos de função que aparecem em diferentes tarefas, exemplos e estratégias de ensino para que os estudantes compreendam as propriedades e definições de uma função, utilizem diferentes registros de representação, bem como saibam identificar as variáveis dependente e independente, domínio, contradomínio e imagem e como encontrar a imagem e a pré-imagem de uma função.

Os resultados apresentados trazem melhor compreensão sobre os conhecimentos especializados utilizados por professores para ensinar Funções na Educação Básica através das conexões entre o Conhecimento de Tópicos da Matemática e o Conhecimento do Ensino de Matemática. Estes resultados podem interessar a professores em serviço como forma de reflexão sobre própria prática, a formadores que podem utilizá-los para capacitar futuros professores e a pesquisadores da área da educação matemática. Quanto às limitações, destacamos que não avançamos nas análises e descrições das conexões entre os conhecimentos existentes entre outros subdomínios do MTSK.

Referências

Araujo, W. R. D. (2018). *Conhecimento especializado do professor de matemática sobre função no contexto de uma experiência prévia de lesson study.* [Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas]. https://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UNICAMP-30_c43043ee76f6f9eb98e7c810338e7603
Bogdan, R. C., y Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação:* uma introdução à teoria e aos métodos. Porto Editora.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Espinoza-Vásquez, G., Verdugo-Hernández, P., Zakarayan, D., Carrillo, J. y Montoya-Delgadillo, E. (2016). Hacia una relación entre el ETM y el MTSK a traves del concepto de función. Toward a relationship between MWS and MTSK through the function concept. *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 197-206). SEIEM.

Espinoza-Vásquez, G., Zakaryan, D. y Carrillo, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(3), 301-324. https://doi.org/10.12802/relime.18.2133

Espinoza-Vasquez, G., Zakaryan, D., y Carrillo-Yañez, J. C. (2017). Use of analogies in teaching the concept of function: Relation between knowledge of topics and knowledge of mathematics teaching. En T. Dooley y G. Gueudet. (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3288-3295).

Gumiero, B. S. y Pazuch, V. (2020). Knowledge Quartet: Dimensões, pesquisas e reflexões sobre o conhecimento profissional do professor que ensina matemática. *Bolema, 34*(66), 268-293.

Hatisaru, V. y Erbas, A. K. (2017). Mathematical Knowledge for Teaching the Function Concept and Student Learning Outcomes. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(4), 703-722. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9707-5

Kohls-Santos, P. y Morosini, M. C. (2021). O revisitar da metodologia do estado do conhecimento para além de uma revisão bibliográfica. *Revista panorâmica, 33*, 123-145.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. D. y Senk, S. L. (2012). Knowledge of Algebra for Teaching: A Framework of Knowledge and Practices. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(5), 584-615. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.5.0584

Moriel-Junior, J. G. (2021). Rede de Conhecimentos Especializados Ativados em Formação Docente para Responder a um Porquê Matemático sobre Divisão de Frações. *Acta Scientiae*, *23(*1), 193-224. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6205

Moriel-Junior, J. G. y Alencar, A. P. (2019). Conhecimento especializado para ensinar Cálculo: Um panorama da produção do COBENGE 2012-2017. *Brazilian Journal of Development, 5*(7), 7687-7702. https://doi.org/10.34117/bjdv5n7-010

Moriel-Junior, J. G. y Carrillo, J. (2014). Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar matemática com o modelo MTSK. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 465-474). SEIEM. http://funes.uniandes.edu.co/6087/1/Moriel2014ExplorandoSEIEM.pdf

Pazuch, V. y Ribeiro, A. J. (2017). Conhecimento profissional de professores de matemática e o conceito de função: Uma revisão de literatura Professional knowledge of mathematics teachers and the concept of function: a literature review. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 19*(1), 465-496. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i1p465-496

Rodríguez-Flores, A., Picado-Alfaro, M., Espinoza-González, J. y Rojas-González, N. (2018). El conocimiento especializado de un profesor de matemáticas: Un estudio de caso sobre la enseñanza de los conceptos básicos de función. *Uniciencia, 32*(1), 89-107. https://doi.org/10.15359/ru.32-1.6

Rodríguez-Flores, A., Picado-Alfaro, M., Espinoza-González, J., Rojas-González, N. y Flores-Martínez, P. (2016). Conocimiento común del contenido que manifiesta un profesor al enseñar los conceptos básicos de funciones: Un estudio de caso. *Uniciencia, 30,*(1-16). https://doi.org/10.15359/ru.30-1.1

Romanowski, J. P. y Ens, R. T. (2006). As pesquisas denominadas do tipo “estado da arte” em educação. *Diálogo Educ., 6*(19), 37-50.

Vianna-Júnior, H. C. (2022). *Estado do conhecimento sobre o ensino de funções: Análise do conhecimento especializado de professores de matemática (MTSK)* [Dissertação de mestrado, Instituto Federal de Mato Grosso].

Vianna-Júnior, H. C. y Moriel-Junior, J. G. (2021). Conhecimento especializado para o ensino de funções: uma análise bibliográfica preliminar. En J. G. Moriel Junior (Eds.), *V Congreso Iberoamericano Sobre Conocimiento Especializado de Professor de Matemáticas* (pp. 142-149). Congresseme.

Vilaça, M. L. C. (2010). Pesquisa e ensino: considerações e reflexões. *Revista do Curso de Letras da UNIABEU Ninópolis, 1*(2), 59-74.

CONHECIMENTOS ESPECIALIZADOS PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO EM ARTICULAÇÃO COM OUTROS MODOS DE PENSAR

Specialized knowledge for the development of algebraic thinking in conjunction with other modes of thinking

Senhora, G. G.[a], Lima, G. L.[b] , Bianchini, B.L.[b]

[a] Secretaria de Educação de São Paulo, Brasil
[b] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil

Temática: 3 – MTSK em diferentes temas e etapas

Resumo.
Neste artigo, a partir de atividades elaboradas pelo primeiro autor a partir das habilidades estabelecidas na Base Nacional Comum Curricular, identificamos, à luz do Modelo MTSK quais conhecimentos especializados o professor que ensina Matemática no 2º ano do Ensino Fundamental brasileiro (7 anos de idade) precisa mobilizar para, ao trabalhar com o desenvolvimento do pensamento algébrico possa oportunizar também a consolidação de outros modos de pensar. No presente texto, especificamente, buscamos os conhecimentos necessários para articular o pensamento algébrico aos pensamentos aritmético, geométrico, proporcional e variacional.

Palavras-chave. Articulação entre pensamento algébrico e outros pensamentos matemáticos, Base Nacional Comum Curricular, Conhecimentos especializados do professor de Matemática.

Abstract.
In this article, based on activities developed by the first author from the skills established in the Common National Curricular Base, we identify, in the light of the MTSK Model what expertise the teacher who teaches Mathematics in the 2nd year of Brazilian Elementary School (7 years old) needs to mobilize to, when working with the development of algebraic thinking can also provide opportunities for the consolidation of other ways of thinking. In the present text, specifically, we seek the knowledge necessary to articulate the algebraic thought to the arithmetic, geometric, proportional, and variational thoughts.

Keywords. Articulation between algebraic thinking and other mathematical thinking, Common National Curricular Base, Specialized knowledge of the teacher of mathematics.

Senhora, G. G., Lima, G. L. y Bianchini, B.L. (2023).Conhecimentos especializados para o desenvolvimento do pensamento algébrico em articulação com outros modos de pensar. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 238-245). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introdução

A razão para se estudar Matemática na Educação Básica é que seu aprendizado favorece o desenvolvimento de uma estrutura mental analítica, sendo necessário, portanto, que em seu percurso formativo, o estudante perceba esta ciência “como base do funcionamento de uma determinada forma de pensar, capaz de moldar um objeto de estudo em torno do conhecimento matemático e do pensamento que o aborda” (Moreno-Jiménez, 2016, p. 38). Essa ideia é também compartilhada por Giga y Kobayashi (2013) que salientam a importância de dominar os modos de pensar da Matemática para o sucesso de um cidadão em sua vida.

Na pesquisa de mestrado em andamento do primeiro autor, sob orientação dos dois outros autores, assumimos como foco o desenvolvimento do pensamento algébrico por estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (que atende crianças dos 6 aos 10 anos de idade) e buscamos investigar de que modo, a partir de conhecimentos especializados, compreendidos conforme o modelo MTSK – Conhecimento Especializado do Professor de Matemática, o docente poderá planejar estratégias de ensino que possibilitem aos estudantes desenvolver o pensamento algébrico ao mesmo tempo em que potencializam a expansão de outros tipos de pensamento matemático, a saber: aritmético, geométrico, computacional, variacional, proporcional, combinatório, estatístico, probabilístico e financeiro.

Especificamente neste artigo, temos por objetivo identificar que conhecimentos especializados o professor de Matemática necessita ter disponíveis para, ao trabalhar no 2º ano do Ensino Fundamental (ou seja, com crianças na faixa de 7 anos de idade), com habilidades visando desenvolver aspectos do pensamento algébrico, oportunize também o desenvolvimento de elementos dos pensamentos aritmético, geométrico, variacional e proporcional, os quais estão implicitamente presentes nas atividades que elaboramos.

Obviamente, apenas ter tais conhecimentos disponíveis em sua estrutura cognitiva não é suficiente para que o docente desenvolva um trabalho articulando tais modos de pensar. É necessário também o que se denomina de *intencionalidade pedagógica*, que contempla não “apenas os saberes didáticos e metodológicos, mas, sobretudo, clareza e tomada de consciência em relação às concepções, escolhas e encaminhamentos que constituem todo projeto formativo” (Paoletti et al., 2016, p.173). Ou seja, “agir com intencionalidade pedagógica é organizar a aula de maneira consciente, planejada, criativa e capaz de produzir um efeito positivo na aprendizagem do aluno” (Negri, 2008, p. 5). Assumimos, portanto, que o nosso intuito na pesquisa em desenvolvimento é, partindo da premissa de que a intencionalidade pedagógica do professor já existe na orientação de trabalhar articuladamente os diferentes modos de pensar, identificar que conhecimentos especializados são necessários para tal ação.

Entendemos que estudos desta natureza têm o papel de despertar no professor uma reflexão acerca dos diferentes tipos de pensamentos matemáticos que, mesmo implicitamente, podem ser trabalhados em atividades visando explicitamente a consolidação do pensar característico da Álgebra. Além disso, a pesquisa mostra-se relevante uma vez que no documento de caráter normativo (Ministério da Educação [MEC], 2017, p. 7) que, desde 2017, define “o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica” brasileira, o desenvolvimento do pensamento algébrico, desde o ingresso da criança na escola, é tido como “essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos” (MEC, 2017, p. 270).

Fundamentação teórica

Neste artigo e na pesquisa de mestrado que lhe deu origem, assumimos a concepção semântica (isto é, seu significado e âmbito de aplicação) para o termo pensamento matemático formulada por Camarena et al. (2022, p. 71-72), a saber:

> o pensamento matemático, cujo âmbito de aplicação são as atividades cotidianas, sociais e profissionais exercidas por um indivíduo, resulta de abstrações da imaginação ou de processos racionais do intelecto "realizados a partir da observação e reflexão científica de fenômenos de diferentes naturezas, por meio da sistematização e contextualização de conhecimentos matemáticos, da capacidade de perceber visual e espacialmente, representar, memorizar, pensar de maneira criativa, objetiva, lógica, analítica e crítica.

Em relação ao objeto central de nosso estudo – o pensamento algébrico – e aos outros tipos de pensamentos matemáticos que, neste artigo, articulamos com tal modo de pensar, seus elementos essenciais são apresentados na Figura 1.

Pensamento Algébrico: vincula-se, sobretudo, à análise de relações entre quantidades, à detecção de uma estrutura, ao estudo de uma mudança, à generalização, à resolução de problemas, à modelagem, às ações de justificar, provar e predizer (Kieran, 2004)

Pensamento Aritmético:	**Pensamento Geométrico**:	**Pensamento Variacional**:	**Pensamento Proporcional**:
relaciona-se ao domínio, de forma integrada, de processos aritméticos gerais e à aquisição de um sentido numérico (Lins & Gimenez, 1997)	vincula-se à elaboração de estruturas geométricas mentais, à imaginação, à intuição e à visualização (Leivas, 2009)	forma dinâmica de pensar; vincula-se a padrões de covariação de magnitudes iguais ou diferentes (Vasco, 2002)	de natureza essencialmente multiplicativa; relaciona-se à descrição e à compreensão dos conceitos de taxa, proporção, proporcionalidade e escala (Norton, 2005, Ilany, Keret & Ben-Chaim, 2004)

Figura 1. Elementos essenciais dos pensamentos aritmético, geométrico, variacional e proporcional

Para identificar os conhecimentos que os professores necessitam ter para, objetivando desenvolver o pensamento algébrico, contribuir também para a construção dos pensamentos aritmético, geométrico, variacional e proporcional, recorreremos ao modelo MTSK (Carrillo et al. 2018, Flores-Medrano et al, 2014). Por se tratar de um congresso específico sobre o MTSK, pressupõe-se que tal modelo é de conhecimento dos participantes e leitores dos textos nele discutidos e, portanto, não apresentaremos mais detalhes a respeito dele.

Metodologia

A pesquisa relatada é qualitativa de cunho documental, uma vez que as reflexões apresentadas são todas decorrentes do que é preconizado na BNCC[1], em termos de desenvolvimento de habilidades matemáticas. A partir da análise dessas habilidades, foram elaboradas, pelo primeiro autor, exemplos de questões matemáticas destinadas ao 2o dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental que, ao mesmo tempo em que possibilitam o trabalho com aspectos específicos do pensamento algébrico, também

[1] BNCC é a sigla de *Base Nacional Comum Curricular*, documento normativo brasileiro que define aprendizagens essenciais a serem desenvolvidas na Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

têm potencial – se exploradas pelos docentes com a pressuposta intencionalidade pedagógica e os conhecimentos especializados adequados – de favorecer a construção de modos aritméticos, geométricos, variacionais e proporcionais de pensar. Tomando por base as resoluções das atividades propostas, a partir do MTSK buscamos explicitar os conhecimentos especializados que devem ser de domínio do professor para que este possa atuar em concordância ao objetivo visado

Apresentação das atividades

Ao todo, foram desenvolvidos três tipos de atividades matemáticas, ancoradas em três habilidades[2] distintas previstas na BNCC para o 2o ano e que estão diretamente relacionadas ao processo de desenvolvimento do pensamento algébrico, a saber: a atividade A1 ancorada na habilidade *(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida*; a atividade A2 ancorada na habilidade *(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos*; e a atividade A3 ancorada na habilidade *(EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.*

Na atividade A1, apresentada na Figura 2, nas primeiras duas questões apresenta-se um único termo de uma sequência numérica e os demais devem ser preenchidos baseando-se no padrão descrito. Na segunda questão apresenta-se o terceiro termo da sequência, de modo que é necessário descobrir também os termos anteriores e os posteriores, o que inclui um desafio extra: geralmente solicita-se a obtenção dos próximos termos da sequência e não dos anteriores. Na terceira questão propõe-se a escolha do termo inicial, seguida pelo comando de diminuir de 2 em 2 e, consequentemente, dependendo do número escolhido pelo estudante a sequência não poderá ser completada, pois nessa etapa escolar os números inteiros negativos não são abordados, o que direciona à escolha de valores que possam satisfazer o comando. Na quarta questão apresentam-se os três primeiros termos da sequência e o estudante terá que descobrir o padrão e completar a sequência.

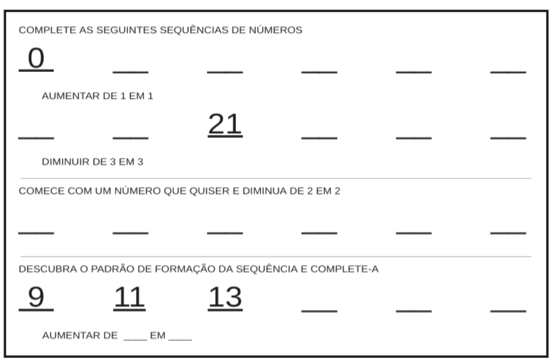


Figura 2. Questões da atividade A1

Na atividade A2, apresentada no quadro à esquerda na Figura 3, pede-se que o estudante descreva qual é o padrão presente nas sequências numéricas e de figuras planas e espaciais. Nas duas primeiras questões, as figuras geométricas que estão organizadas da mesma forma, porém, a primeira sequência é composta por cubos e a segunda por quadrados. Na sexta questão explora-se um padrão de rotação com cores em vitrais quadrados. Por fim, nas três últimas questões apresentam-se sequências numéricas. A primeira tem um padrão de aumento em uma unidade, na segunda o valor de cada termo é o dobro do anterior e na terceira o padrão é diminuir de dois em dois.

[2] A BNCC utiliza de um sistema de codificação de habilidades que segue a seguinte regra: **EF** remete a etapa do Ensino Fundamental, **02** ao ano da etapa de ensino citada anteriormente (neste caso, o segundo ano), **MA** classifica a habilidade à área de Matemática e o dois últimos dígitos (**09**, **10** ou **11**) refere-se ao número da habilidade no ano em questão.

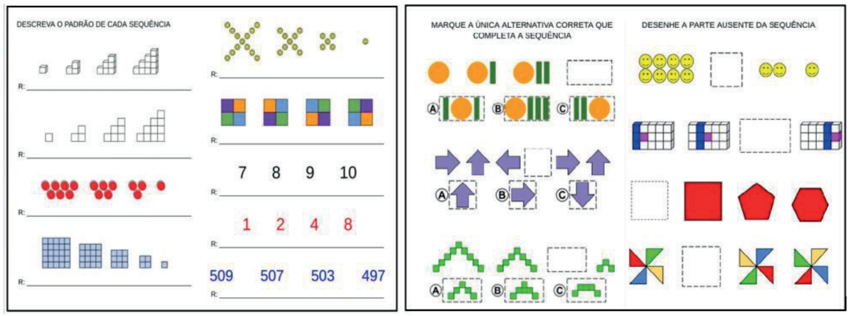


Figura 3. Questões da atividade A2 e A3

Por fim, A3 (no quadro à direita da Figura 3) é uma atividade com sequências de figuras nas quais há, em alguma posição da sequência, um termo ausente. As primeiras três questões possuem três alternativas, com o objetivo de que o estudante perceba as modificações em cada sequência e identifique qual das alternativas é a correta. Destaca- se a segunda questão, na qual é disponibilizado um conjunto de setas que apontam em diferentes direções, indicando uma mudança por rotação. As questões seguintes seguem a mesma lógica de ausência de um termo, mas o estudante, ao invés de escolher uma alternativa correta, por meio de desenhos, deve completar a sequência. Na primeira questão apresenta-se uma sequência de *emojis*[3] cujas quantidades diminuem pela metade a cada termo. Na segunda questão, observa-se uma regularidade por translação. Na terceira questão explora-se o padrão de aumento no número de lados de um polígono regular. Por fim, a quarta questão contempla um padrão de rotação.

Análise das atividades

À pergunta *"Que conhecimentos especializados o professor de Matemática precisa ter para trabalhar com tais atividades?"*, apresentamos possíveis respostas à luz do MTSK, explicitando os conhecimentos identificados a partir das perspectivas individuais de cada subdomínio do modelo, dando início por aqueles relativos ao Conhecimento Matemático (MK) no Quadro 1.

Quadro 1. Conhecimentos especializados do domínio MK relacionados às atividades propostas

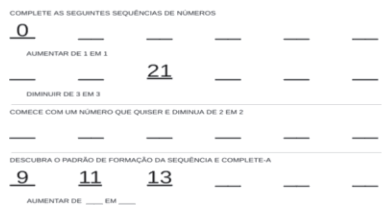
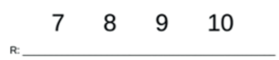
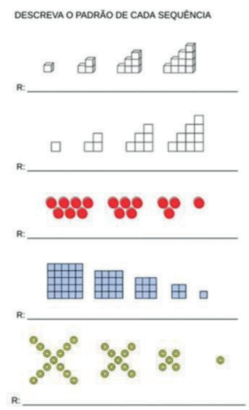
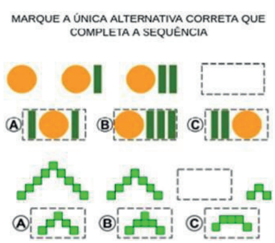
Conhecimentos Especializados do domínio MK
KoT (Conhecimento dos Tópicos): características do sistema de numeração decimal (especialmente, valor posicional e papel do zero); os significados de dobro, metade, triplo e terça parte; sequências repetitivas e recursivas; regularidade de sequências; elementos ausentes na sequência; localização e movimentação de objetos no plano e no espaço, segundo pontos de referência, e indicação de mudanças de direção e sentido; reconhecimento e características de figuras geométricas planas e espaciais
KSM (Conhecimento da Estrutura da Matemática): conexões entre aspectos estruturantes da Álgebra com outros relativos à Aritmética (especialmente o sistema de numeração decimal e suas características), à Geometria (deslocamento e posição no plano e no espaço; definições, formas, transformações e relações entre elementos de figuras planas e espaciais); às variações e às proporções (os significados de dobro, metade, triplo e terça parte).
KPM (Conhecimento da Prática Matemática): aspectos caracterizadores dos modos específicos de pensar, proceder, criar ou produzir em Matemática, ou seja, conhecimento acerca dos elementos que constituem o pensamento matemático em suas diferentes vertentes, especialmente, no caso analisado, os modos de pensar: aritmético, algébrico, geométrico, variacional e proporcional. Conhecimentos acerca da comunicação matemática, de como estabelecer relações entre conceitos e propriedades, de como selecionar adequadamente representações para um dado objeto matemático, de como argumentar para comprovar, refutar e refinar raciocínios e dos processos de verificar uma afirmação ou explicitar contraexemplos para ela.

Fonte: Elaboração própria.

[3] Símbolos e/ou desenhos que representam e comunicam emoções.

Nos Quadros 2 e 3, detalhamos as análises relativas às questões que compõem as atividades A1, A2 e A3 no que se refere ao domínio MK.

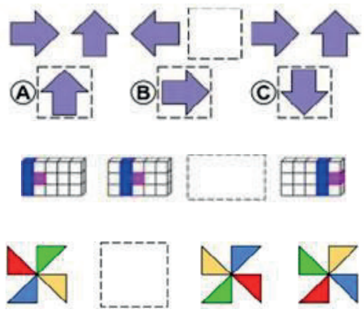
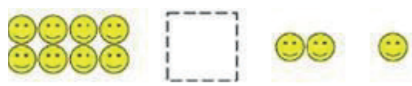
Quadro 2. Análise das atividades em relação a MK – parte 1

Atividade	**Questão**	**Análise**
A1		É possível, além de explorar a ação de completar sequências numéricas por meio de uma regularidade, estimular o aluno a comparar e ordenar números naturais pela compreensão de características do sistema de numeração decimal. E, também, explorar um aspecto do pensamento proporcional: a taxa de variação observada de um elemento para outro em uma sequência numérica.
A2		
A2		Simultaneamente à descrição ou reconhecimento de padrões de regularidade de sequências figurais e numéricas e à identificação do elemento ausente, é possível oportunizar o desenvolvimento de uma habilidade essencial ao pensamento geométrico: reconhecer, nomear e comparar figuras geométricas planas e espaciais, por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos. Também, discutir aspectos do pensamento proporcional: a taxa de variação do número de figuras geométricas de um elemento para outro em cada uma das sequências ou, no caso específico da última questão apresentada na coluna anterior, da taxa de variação do número de lados dos polígonos de um termo para outro da sequência. Há potencialidade para explorar um elemento do pensamento variacional: a covariação entre as grandezas número de objetos de cada termo da sequência e número do termo na sequência e, no caso da última questão na coluna anterior, a covariação entre as grandezas número do termo na sequência e número de lados do polígono que compõe o termo correspondente em tal sequência.
A2		
A3		

Fonte: Elaboração própria.

Em relação ao *Conhecimento Didático do Conteúdo* (PCK), o professor deve dominar, considerando a faixa etária de 7 anos: as teorias sobre a aprendizagem; como se desenvolve o pensamento matemático; dificuldades de aprendizagem já identificadas em pesquisas e na prática docente; os principais erros que os estudantes costumam cometer ao trabalhar com os temas presentes nas atividades; como interagem com esses conteúdos matemáticos e como se portam diante das tarefas inerentes às habilidades previstas na BNCC; os efeitos para a aprendizagem de Matemática de aspectos emocionais; e as características dos diferentes estilos de aprendizagem de Matemática (*Conhecimento das Características de Aprendizagem da Matemática* - KFLM). Além disso, devem conhecer: as teorias da Didática da Matemática; possíveis dificuldades de ensino já identificadas em pesquisas e na prática docente relacionadas ao conteúdo matemático em foco; potenciais recursos didáticos (físicos e digitais) a serem utilizados e a forma de adaptálos em diversas situações da prática docente; os materiais didáticos mais apropriados para o trabalho; as potencialidades e as limitações de determinadas estratégias, atividades, técnicas e exemplos para o ensino de cada um dos conteúdos (*Conhecimento do Ensino da Matemática* - KMT).

Quadro 3. Análise das atividades em relação a MK – parte 2

Atividade	Questão	Análise
A2		Simultaneamente à descrição ou reconhecimento de padrões de regularidade de sequências figurais e à identificação do elemento ausente, é possível proporcionar o desenvolvimento de uma nova habilidade relacionada ao pensamento geométrico: identificar deslocamentos de objetos no plano (rotação nos casos da sequência indicada na primeira linha da coluna anterior e na sequência apresentada na última linha da mesma coluna; e translação horizontal na sequência apresentada na penúltima linha da coluna anterior) e, no caso da questão em que a sequência figural é constituída por setas, explorar a ideia, também relacionada ao pensamento geométrico, de mudança de sentido.
A3		
A2	1 2 4 8 R: ______	Conjuntamente à descrição ou reconhecimento de padrões de regularidade de sequências figurais e numéricas e à identificação do elemento ausente, pode-se trabalhar uma habilidade relacionada tanto ao pensamento proporcional quanto ao variacional: resolver problemas envolvendo dobro e metade com o suporte de imagens.
A3		
A2	509 507 503 497 R: ______	Ao mesmo tempo em que se trabalha com a descrição ou reconhecimento de padrões de regularidade de sequências e numéricas, pode-se oportunizar a identificação de um elemento vinculado ao pensamento proporcional: a taxa de variação (que neste caso não será constante) de um termo para outro da sequência.

Fonte: Elaboração própria.

Por fim, é essencial o conhecimento: das competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental preconizadas na BNCC; clareza acerca dos objetos de conhecimentos previstos, no mencionado documento, para o 2º ano relacionados às atividades elaboradas, os quais coincidem com aqueles que identificados na linha relativa ao KoT; das habilidades matemáticas a serem desenvolvidas; dos resultados esperados, em termos de aprendizado, de níveis de desenvolvimento conceitual e processual; do sequenciamento previsto oficialmente para os conteúdos; da matriz de referência para avaliação do Saresp Matemática (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) (*Conhecimento dos Estândares de Aprendizagem da Matemática* - KMLS).

Considerações finais

Encerramos este artigo explicitando que, nossa expectativa, é que análises como a que realizamos possam contribuir e ser objetos de reflexão tanto nas formações iniciais quanto continuadas de professores que ensinam Matemática, bem como nos cursos de mestrado e doutorado na área de Educação Matemática. Do mesmo modo, esperamos que os professores possam, ao planejar o desenvolvimento de um determinado conjunto de atividades, ainda que com menor profundidade, realizar análises semelhantes visando identificar quais conhecimentos domina de forma suficiente e quais precisa aprofundar para abordar o tema com o qual irá trabalhar de modo adequado.

Referências

Camarena, P., Lima, G. L. de, Gomes, E. y Bianchini, B. (2022). Pensamiento matemático y cultura matemática: concepciones semánticas en la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias. *PNA, 17*(1), 51-88. https://doi.org/10.30827/pna.v17i1.21583

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Meldrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N. ,Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, A., y Carrillo, J. (2014). Nuestra Modelación del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, L. Contreras, N. Climent, D. Escudero, E. Flores y M. Montes (Eds.), *Un Marco teórico para el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas.* Universidad de Huelva Publicaciones.

Giga, Y., y Kobayashi, T. (Ed.) (2013). *What Mathematics Can Do for You: Essays and Tips from Japanese Industry Leaders.* Springer.

Ilany, B. S., Keret, Y., y Ben-Chaim, D. (2004). Implementation of a Model Using Authentic Investigative Activities for Teaching Ratio y Proportion. En M. Johnsen-Høines y A. Berit-Fuglestad (Eds.). *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.81-88). International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. En K. Stacey, H. Chick, M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra the 12 th ICMI study* (pp. 21-33) Springer. https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_2.

Leivas, J.C.P. (2009). *Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de Licenciatura de Matemática* [Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná].

Lins, R.C. y Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Papirus.

Ministério da Educação [MEC]. (2017). *Base Nacional Comum Curricular.* Autor.

Moreno Jiménez, Y. J. (2016). *Aportes del Pensamiento Matemático en la Propuesta de Investigación Formativa en Educación Superior: un estudio de caso* [Dissertação de Mestrado, Universidad Santo Tomás].

Negri, P. S. (2008). *Comunicação Didática: A Intencionalidade Pedagógica como Estratégia de Ensino: Módulo I.* Labted.

Norton, S. J. (2005). The Construction of Proportional Reasoning. En H.L.Chick y J.L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). University of Melbourne.

Paoletti, L., Silva, L. M., y Prezotto, M. (2016). Um caminho a ser trilhado: a Intencionalidade Pedagógica no processo de formação do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC-UNICAMP). En A. L. Pinto (Ed.), *Formação Continuada de professores: o PNAIC na UNICAMP* (pp.173-194). PACO.

Vasco, C. E. (2002). El Pensamiento Variacional, la Modelación y las Nuevas Tecnologías. En *Actas del Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas.* Ministerio de Educación Nacional. *http://funes.uniandes.edu.co/10178/1/Vasco2002El.pdf*

CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE ALGEBRA LINEAL SOBRE PROCEDIMIENTOS MATRICIALES EN LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Linear algebra teacher´s knowledge about matrix procedures in solving systems of linear equations

Regolini, M.[a], Climent-Rodríguez, N.[b]

[a] Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina
[b] Universidad de Huelva, España

Temática: 3 – MTSK en diferentes temas y etapas

Resumen.
En esta comunicación nos propusimos identificar posibles regularidades en el conocimiento especializado de una profesora universitaria cuando enseña a resolver sistemas de ecuaciones lineales por diferentes procedimientos que involucran matrices. El diseño de investigación corresponde a un estudio de caso único aplicando un enfoque interpretativo. Los datos recogidos correspondientes a clases videograbadas se analizan empleando el MTSK. Los resultados muestran cierta integración entre los subdominios *Conocimiento de los Temas, Conocimiento de la Estructura de la Matemática, Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas, Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática y Conocimientos de los Estándares de Aprendizaje de la Matemática* del conocimiento movilizado por la profesora en su práctica de aula.

Palabras clave. MTSK, Docente auxiliar universitario, Métodos matriciales, Sistemas de ecuaciones lineales.

Abstract.
In this communication we set out to identify possible regularities in the specialized knowledge of a university professor when she teaches to solve systems of linear equations by different procedures that involve matrices. The research design corresponds to a single case study applying an interpretive approach. The data collected corresponds to videotaped classes that are analyzed using the MTSK. The results show some integration between the subdomains *Knowledge of Mathematical topics, Knowledge of the Structure of Mathematics, Knowledge of Features of Learning Mathematics, Knowledge of Mathematics Teaching and Knowledge of Mathematics Learning Standards* mobilized by the teacher in her classroom practice.

Keywords. MTSK, University Teaching assistant, Matrix methods, systems of linear equations.

Regolini, M. y Climent-Rodríguez, N. (2023). Conocimiento del profesor de algebra lineal sobre procedimientos matriciales en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 246-253). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

En la década de los 80 del siglo XX, comenzó a desarrollarse el estudio sobre el conocimiento del profesor, siendo Shulman (1986) un investigador destacado en esta temática. Las investigaciones sobre lo que debe conocer un profesor para la enseñanza de la matemática han originado diversos modelos de conocimiento. Entre ellos, el modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, Carrillo et al., 2013) sobre el que se organizarán los análisis realizados en este artículo.

Este trabajo forma parte de uno más amplio, que constituye la tesis doctoral de la primera autora. En este, estudiamos el conocimiento especializado de una profesora de álgebra lineal enseñando sistemas de ecuaciones lineales por métodos matriciales. Analizando el conocimiento de esta profesora atisbamos ciertas regularidades en el conocimiento que sustenta su enseñanza de distintos métodos. En aras de explorar sistemáticamente esas posibles relaciones, en esta comunicación tenemos como objetivo *identificar posibles regularidades en el conocimiento especializado de una profesora universitaria cuando enseña a resolver Sistemas de ecuaciones lineales empleando diferentes procedimientos que involucran matrices.*

Aspectos teóricos

A través del modelo teórico MTSK es factible estudiar el conocimiento que tiene el profesor de matemáticas, poniendo de relieve su especificidad sobre la matemática como objeto de enseñanza y de aprendizaje. El MTSK está conformado por tres dominios, uno de *Conocimiento Matemático* (MK), otro de *Conocimiento Didáctico del Contenido* (PCK) y el tercero que engloba las *Creencias sobre las Matemáticas y sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas* cuyos elementos se consideran que permean la construcción del conocimiento y tienen un impacto directo en la forma en que este es puesto en práctica por los profesores. Los dos primeros dominios de conocimiento se subdividen en tres subdominios, los cuales tienen asociadas categorías que contribuyen a la identificación y caracterización de conocimientos que les son propios (Carrillo et al., 2018). La diferenciación en dominios y subdominios sólo se efectúa con fines analíticos, puesto que se asume que el conocimiento del profesor es integrado (Contreras et al., 2017). (Figura 1)

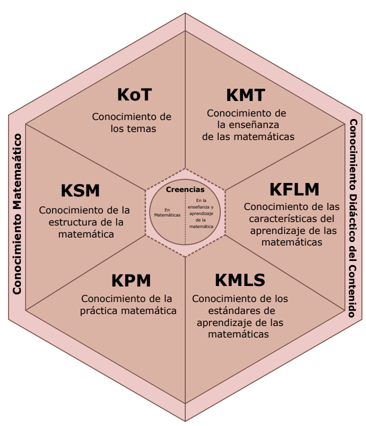


Figura 1. Modelo MTSK

Metodología

El diseño de investigación corresponde a un estudio de caso único e instrumental (Stake, 2007), de corte cualitativo e interpretativo (Lincoln y Guba, 1985). La informante, de seudónimo Josefina, es Licenciada en Administración de Empresas con siete años de experiencia en el dictado de Álgebra Lineal en la universidad. Se han recolectado los datos mediante observación no participante. Para este documento se han tomado diferentes momentos de dos clases presenciales grabadas en vídeo, en los que se abordan diversos procedimientos utilizados para clasificar cada sistema de ecuaciones lineales de acuerdo con la existencia o no de solución, así como, para obtener la/s solución/es en caso de que exista/n. Analizamos los datos a partir de la transcripción de las clases, empleando un enfoque interpretativo (Kvale, 1996) en el que se busca comprender y caracterizar los datos desde la perspectiva del modelo MTSK, diferenciando entre indicio y evidencia (Flores–Medrano, 2015).

Resultados

Con el fin de dar respuesta al interrogante formulado, hemos decidido elegir un sistema de ecuaciones lineales de los que conforman la guía de actividades, para analizar el conocimiento que Josefina pone en juego cuando enseña a clasificarlo en compatible determinado mediante el teorema de Rouché–Fröbenius y obtener la solución única por diferentes procedimientos (métodos de Gauss–Jordan y la Inversa, y la regla de Cramer).

El análisis de los episodios seleccionados correspondientes a dos clases consecutivas nos ha permitido identificar y caracterizar el conocimiento matemático especializado de Josefina.

La profesora comienza la clase anticipando a sus estudiantes que los Bloques de contenidos Matrices y Determinantes desarrollados en Unidades anteriores, le permitirán resolver algebraicamente Sistemas de ecuaciones lineales cuyo abordaje previo ha sido en forma gráfica dando indicios tanto sobre su KMLS (*Secuenciación de diversos temas*) como acerca de que los contenidos provistos por los Bloques Matrices y Determinantes, le otorgarán las herramientas que necesita para resolver los ejercicios (KSM: *Conexiones auxiliares*). (**Unidad 1**)

> J: Vimos en las primeras unidades matrices y trabajamos con ellas [...], luego aparecieron los sistemas de ecuaciones lineales, los vimos en su aspecto gráfico y en este momento vamos a unir todas las unidades que tenemos hacia atrás porque vamos a trabajar con el concepto sistemas de ecuaciones lineales, [...] vamos a retomar conceptos vinculados a matrices, sus propiedades, existencia de los distintos tipos de matrices que los vimos en las unidades uno y dos. (**Unidad 1**)

$$\begin{cases} x + y = 1 - 2z \\ x + 2y - z = -2 \\ 3y + z + x = 5 \end{cases}$$

Josefina conoce que para clasificar el sistema de ecuaciones lineales en compatible determinado mediante el teorema de Rouché–Fröbenius necesita obtener los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada del sistema, y que estos rangos deben ser iguales entre sí e iguales a la cantidad de incógnitas (KoT–Procedimiento: *¿Cómo se hace?*). (**Unidad 2**)

> J: Entonces ¿qué es lo que vamos a poder concluir de este sistema de acuerdo con su compatibilidad?
> A: Que es determinado.
> J: Bien, es un sistema compatible determinado porque el rango de A es igual al rango de A ampliada e igual al número de incógnitas. [La profesora escribe en el pizarrón]

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{3) a)} \quad \rho(A) = 3 \quad \rho(A^a) = 3 \\ \\ n = 3 \\ \\ \text{SCD}^1 \text{ porque } \rho(A) = \rho(A^a) = n \end{array}}$$

(**Unidad 2**)

[1] La profesora usa SCD para indicar que el sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado.

La profesora sabe que la solución única de este sistema de ecuaciones lineales puede ser obtenida a través del método de Gauss–Jordan. Del procedimiento (KoT) Josefina sabe *¿Cómo se hace?* cuando indica que debe rearmar un sistema luego del "gausseo" y la *Característica del resultado*, ya que exhibe cómo se obtiene el valor numérico de cada incógnita, pero, además, manifiesta otra manera de expresarla (KoT: *Registros de representación*). A su vez, para evitar que sus alumnos se pierdan en lo que están haciendo, llama su atención durante la explicación (KFLM: *Fortalezas y Dificultades*). (Unidad 3)

> J: ¿Qué implica aplicar el método de Gauss para resolver el sistema? Realizo el procedimiento, gausseo. Llego a la última iteración, ¿qué hago en este momento? ¿Ahí concluye el ejercicio? ¿Ahí culminó? ("No", contestan los estudiantes). ¿Qué implica ese no? ¿Qué hago? ("Rearmo el sistema de ecuaciones", contestan). Lo rearmo a partir de la última iteración. Si yo lo rearmo, tengo que saber qué me están representando los elementos en esta última iteración. Identifico los coeficientes de las variables que acompañan y los términos independientes. Entonces será [mientras la profesora proyecta un archivo con extensión ppt en el pizarrón]:
>
> $$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right|$$
>
> Lo tengo escrito así.
>
> $$\begin{cases} 1x+0x+0y=-6 \\ 0x+1y+0z= 3 \\ 0x+0y+1z = 2 \end{cases}$$
>
> Y lo puedo escribir en la forma más sintética. Nos queda:
>
> $$\begin{cases} x=-6 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$$
>
> Si tengo tres variables en juego y el sistema es compatible determinado, la solución ¿qué va a ser? Una terna de números. (**Unidad 3**)

Josefina comienza la segunda clase enseñando a resolver el mismo sistema de ecuaciones lineales a través del método de la Inversa y a continuación la regla de Cramer. Vamos a disponer en dos columnas los dos procesos en paralelo, para apreciar mejor las posibles regularidades en su conocimiento especializado.

Fases	Método de la Inversa	Regla de Cramer
Comprobación de condiciones para aplicarlo/a KoT: *Registros de representación*. KSM: *Conexiones Auxiliares* KoT: *Definiciones, propiedades y sus fundamentos.* KoT: *Procedimientos ¿Cómo se hace? y Característica del resultado* KFLM: *Fortalezas y dificultades.* KFLM: *Formas de interacción con un contenido matemático.*	La profesora conoce que sólo podrá aplicar este método si la matriz de coeficientes es cuadrada e invertible: J: ¿Qué pasa con este sistema? Primero ¿qué vamos a analizar? que fuese un sistema de ecuaciones lineales cuadrado ¿en este caso? (“Es cuadrado”, contestan los estudiantes). Y la otra condición es que exista la inversa de A. ¿Cómo voy a saber si existe o no existe la inversa de A? Vamos a escribir completas las matrices $\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&-1\\1&3&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\5\end{bmatrix}$ J: ¿Qué hacíamos cuando vimos por primera vez inversa para antes de largarnos a calcular la inversa? Analizar su existencia o no. (“El determinante”, señala un estudiante). ¿Qué otra opción aparte del determinante? (“El rango”) Mi pregunta sería ¿cómo tiene que ser para que exista la inversa? (“Distinto de cero”). Y ¿el rango? (“Máximo”). En este caso, ¿cuál de esas dos características de la matriz me convendría analizar en función de lo que ya he trabajado antes? (“El determinante”). ¿El determinante o el rango? (“Ah, no. El rango”). […] J: ¿Qué tengo de dato de esta matriz? Porque fíjense que estamos trabajando con sistemas que ya trabajamos la clase pasada. ¿Qué tenía? (“Los gausseos hechos”). Y en función de los gausseos, llegaba a la forma reducida. Y en la forma reducida ¿qué podía leer? (“El rango”). Entonces en realidad no está mal calcular el determinante […], pero en realidad si yo ya trabajé, sé que tengo dos caminos, lo puedo analizar por el lado del determinante o lo puedo analizar por el lado del rango y en el ejercicio anterior trabajé con rango y ya tengo los datos, esto me facilita a mí el análisis. ¿Qué habíamos dicho? ¿A qué era igual el rango de A? (“A tres”). En este caso, el rango ¿cómo es? (“Máximo”). En consecuencia, ¿va a existir la inversa o no? (“Sí”, concluyen los alumnos). (**Unidad 4**)	Antes de comenzar a explicar cómo se aplica la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones lineales -que hemos elegido de manera adrede-, la profesora pregunta a sus estudiantes J: ¿Qué nos dice la regla de Cramer? […] el sistema tiene que ser cuadrado y el determinante de la matriz de coeficientes distinto de cero. […]. Lo que estoy escribiendo es lo que ya tenemos planteado en el ejercicio tres. Estoy trayendo nuevamente ese ejercicio. $\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&-1\\1&3&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\5\end{bmatrix}$ J: Para aplicar la regla de Cramer necesito que el sistema de ecuaciones lineales sea cuadrado y que el determinante de A sea distinto de cero. […] ¿El sistema de ecuaciones lineales es cuadrado? […]. Sí. Y, ¿la segunda característica? (“También”, dice el alumnado). ¿Por qué sabés que el determinante es distinto de cero? (“Porque lo calculé”). […] bueno, esa es una opción […] ¿Cuánto te dio el determinante de A? (“cinco, el resultado no sé si está bien”). Esta es una opción, el determinante de A es distinto de cero porque lo calculo y me da cinco. ¿Qué otra opción hay? Si yo quisiera saber de antemano y me dicen no puede, bajo ningún punto de vista, calcular el determinante. ¿Cómo puedo llegar a saber que el determinante es distinto de cero? (“El rango”). Bien, ¿qué tenía que ver el rango con el determinante? […] si yo tengo una matriz cuadrada y le calculo su rango y el rango es máximo ¿qué puedo saber del determinante? (“que es distinto de cero”). No voy a conocer su valor, pero al menos sí voy a poder afirmar que es distinto de cero […]. Entonces si nosotros habíamos chequeado que cumple las dos condiciones entonces podemos resolverlo por regla de Cramer. (**Unidad 6**)

Obtención de la solu-ción. KoT: *Procedi-miento ¿Por qué se hace así?* KoT*: Procedi-miento– Caracteristica del resultado.* KSM: *Conexiones Auxiliares.* KFLM: *Formas de interacción con un contenido matemático.* KoT: *Registros de representación.*	Una vez que Josefina comprueba que se verifican las condiciones para resolver el sistema por este método, evidencia que sabe que la solución se obtendrá mediante un producto matricial, es decir, los valores de las incógnitas serán los elementos de una matriz columna. Ofreciendo indicios de ¿por qué se hace así? cuando expresa en forma genérica el producto matricial que le permitirá determinar la solución. J: Entonces, en este caso, existe la inversa de A. ¿Voy a poder resolver este sistema de ecuaciones lineales empleando el método de la inversa? (“Si”, le indican). ¿De qué manera? Voy a plantear un producto matricial. [...] $X_{3x1} = A^{-1}_{3x3} \,.\, B_{3x1}$ J: Esto era x, y, z [se refiere a los elementos de la matriz X] $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \frac{-2}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ J: Ahí tengo planteado el producto matricial. Ahora ¿qué hago para llegar a la solución del sistema? Lo tengo planteado y ¿ahora?, ¿llego hasta ahí? (“No”). No, tengo que resolver. Tengo que multiplicar. Entonces tengo x, y, z que va a ser igual ¿a qué? Al producto de dos matrices [...] $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ J: Llego a la solución del sistema de ecuaciones lineales. Que “x” es igual a menos seis, “y” es igual a tres y “z” es igual a dos porque lo que tengo planteada es una igualdad de matrices. (**Unidad 5**)	La profesora sabe que, mediante la regla de Cramer, obtendrá el valor de cada variable por separado y que necesita calcular los determinantes de matrices, a las que denomina C con un subíndice numérico -que se corresponde con el orden en que figura la variable en la matriz de incógnitas- y conoce que para construirlas tendrá que reemplazar en A, los coeficientes de la variable que pretende obtener por los valores de los términos independientes. J: Yo recién les comentaba que, para resolverlo, cada incógnita me va a quedar planteada como el cociente de dos determinantes. El determinante del denominador es el de la matriz A y ¿qué pasaba con el determinante del numerador? [...]. Vamos a plantearlo en este caso, $x = \frac{\lvert C_1 \rvert}{\lvert A \rvert} \qquad y = \frac{\lvert C_2 \rvert}{\lvert A \rvert} \qquad z = \frac{\lvert C_3 \rvert}{\lvert A \rvert}$ J: Con el determinante de A no tuve inconvenientes, de hecho, acá la compañera lo calculó y dijo que era cinco. [...] ¿cómo se construye cada una de estas matrices C? y ¿cómo planteo su cálculo del determinante? [...]. Como voy a trabajar la C1 voy a tomar todos los coeficientes que acompañan a x y los voy a reemplazar por la matriz de términos independientes [...] Entonces voy a tener $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ J: ¿Qué tengo que plantear? El cálculo del determinante de C1 por el método que les guste, Sarrus, reducción a uno de menor orden, desarrollo de los elementos de una línea. [...] Entonces, ¿a qué llegamos? a que x es igual a menos seis, y es igual a tres y, z es igual a dos. (**Unidad 7**)

Conclusiones

Nos propusimos indagar sobre la existencia de regularidades en el conocimiento especializado de una profesora universitaria cuando enseña a resolver Sistemas de ecuaciones lineales empleando diferentes procedimientos que involucran matrices. En este artículo, se ha considerado un sistema de ecuaciones que Josefina, inicialmente, clasifica en compatible determinado a través del teorema de Rouché–Fröbenius y posteriormente, obtiene su única solución, en el siguiente orden, por el método de Gauss–Jordan, el método de la Inversa y la regla de Cramer.

Tras el análisis se ha logrado identificar la fusión de diferentes componentes del conocimiento matemático especializado de esta profesora universitaria de Álgebra Lineal. En ambas clases, se ha observado que su conocimiento sobre *Procedimientos* (KoT) se evidencia de manera notoria y detallada en el *¿Cómo se hace?* ligado a las *Conexiones auxiliares* (KSM) que debe realizar con algunos contenidos de los Bloques temáticos Matrices y Determinantes que, además, parece sustentar con su KFLM, al considerar los errores habituales que suelen cometer los estudiantes y la manera en que éstos interactúan con el contenido matemático. En general, la profesora hace explícito *¿Cuándo se puede hacer?* el procedimiento (KoT) cuando analiza detenidamente si se verifican las condiciones establecidas en dos de los cuatro procedimientos, a pesar de que conoce que muchas veces los estudiantes suelen pasarlas por alto (KFLM) y, cuando cabe, Josefina sabe identificar la *Característica del resultado* (KoT: *Procedimiento*) y representarlo simbólicamente (KoT: *Registros de representación*). En ambos trabajos de Regolini y Climent (2021a y 2021b) se ha hecho referencia, respectivamente, acerca del KMT de esta profesora, aludiendo a que la variabilidad de ejemplos que emplea para enseñar a resolver sistemas de ecuaciones lineales tanto la regla de Cramer como el método de la Inversa, le permiten poner de relieve en cuáles se podrá aplicar el procedimiento considerado frente a cuáles, no.

A pesar de haber percibido algunas imprecisiones en el discurso de la profesora, como, por ejemplo, cuando se refiere al método de Gauss (o gausseo) en lugar de expresar método de Gauss–Jordan (los cuales presentan diferencias entre sí, por el tipo de respuesta que otorgan), desconocemos el origen de estas faltas de rigor.

Investigar sobre el conocimiento matemático especializado de profesores universitarios podría coadyuvar a comprender cómo la práctica se relaciona con el conocimiento que poseen. Poniendo de relieve cómo una práctica determinada evidencia un tipo de conocimiento y, además, cómo cierto conocimiento puesto en acción es el que sustenta un tipo de práctica. Esto nos lleva a plantearnos algunos interrogantes, como, por ejemplo, ¿una clase tan procedimental podría estar sustentada por un conocimiento diferente del que se moviliza en las clases analizadas? Comprender cómo conocen los profesores universitarios un determinado tópico propicia la intervención en su formación inicial y permanente.

Agradecimientos

Este estudio se ha realizado en el marco del proyecto PID2021-122180OB-I00 del Ministerio de Ciencia e Innovación del Gobierno de España y la red MTSK, bajo el patrocinio de la AUIP.

Referencias

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores–Medrano, E., Escudero–Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar–González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Contreras, L. C., Montes, M., Climent, N. y Carrillo, J. (2017). Introducción al modelo MTSK: origen e investigaciones realizadas. *Revista For-Mate, 3*, 7-15.

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. http://hdl.handle.net/10272/11503

Kvale, S. (1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing.* SAGE.

Lincoln, Y. S. y Guba, E. G. (1985). *Naturalistic Inquiry.* Sage Publications.

Regolini, M y Climent, N. (2021a). Una mirada a la regla de Cramer desde el conocimiento especializado del profesor universitario. *Revista Tangram*, 4(02), 2595-0967.

Regolini, M y Climent, N. (2021b). Método de la inversa: el conocimiento especializado de una profesora universitaria. In J. G. Moriel-Junior (Ed.), *Anais do V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 247-254). Congresseme.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos.* (4a ed.). Morata.

RELACIONES ENTRE EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR Y LA PRÁCTICA PEDAGÓGICA: UNA REVISIÓN SISTEMÁTICA

Relationships between Teacher Expertise and Pedagogical Practice: A Systematic Review

Sarmiento-Afanador, T.
Escuela de Educación, Universidad Industrial de Santander, Colombia

Temática: 3 – MTSK en diferentes temas y etapas

Introducción

Partiendo del cuestionamiento continuo de cómo se están formando los profesores y qué tan competentes son estos para enseñar, el presente escrito describe el trabajo realizado bajo la premisa: no hay congruencia en esperar que los estudiantes desarrollen procesos de aprendizaje, si el docente no está preparado o no tiene los conocimientos suficientes para abordar su enseñanza. Lo anterior para entender la relación que existe entre los conocimientos y la práctica educativa, ya que estos regulan una parte determinante del quehacer docente. Para ello, se realizó una revisión de literatura que tenía como objetivo estudiar las implicaciones en la práctica docente que tienen los conocimientos de los maestros de matemáticas en Educación Básica Primaria (EBP), con un enfoque al modelo MTSK.

Marco Teórico

En función de comprender el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas, Carrillo et al. (2018) proponen el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés), el cual se establece con la idea de que un profesor reconozca los conocimientos relacionados al saber matemático y su enseñanza con el fin de fortalecer los procesos implicados. El MTSK se estructura en dos dominios: conocimiento matemático (MK) y conocimiento didáctico del contenido (PCK), de los cuales se desprenden 3 subdominios de cada uno: Conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de la estructura de la matemática (KSM), conocimiento de la práctica matemática (KPM), conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT), conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), conocimiento de los estándares de aprendizaje de la matemática (KMLS). respectivamente.

Metodología

La investigación tiene un enfoque cualitativo, ya que permite un proceso mediante el cual se interpreta la información y se exploran las situaciones observados (Creswell, 1998), además, busca comprender fenómenos pedagógicos y sociales de toma de decisiones, desarrollo del conocimiento y práctica transformadora (Sandín, 2003). Además, la revisión de literatura se realiza según el objetivo declarado, donde se enfatiza la importancia de utilizar datos transversales para examinar las perspectivas, reflexiones y conclusiones de diferentes estudios sobre el tema de interés (Jesson y Lacey, 2006), por lo que es importante describir el MTSK y su implicación en la práctica pedagógica del profesor de matemáticas de EBP.

Sarmiento-Afanador, T. (2023). Relaciones entre el conocimiento especializado del profesor y la práctica pedagógica: una revisión sistemática . En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 254-255). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Para la selección de documentos se establecieron cuatro tesauros (i) Educación Básica Primaria, (ii) maestros, (iii) MTSK, y (iii) conocimiento especializado del profesor de matemáticas; los cuales permitieron realizar el proceso de revisión que se divide en cuatro fases (identificación, revisión, elección e inclusión); en la última fase, la inclusión, se realiza una lectura completa y se determinan 17 artículos para el análisis, basados en los criterios de selección establecidos: 1) práctica docente, 2) Educación Básica Primaria y 3) modelo MTSK.

Resultados y conclusiones

De acuerdo a los resultados encontrados y el objetivo de la investigación, para el análisis de datos se establecieron dos macrocategorías: (i) la aplicación del MTSK y (ii) la práctica del docente de matemáticas en EBP, las cuales se dividen en un total de 6 subcategorías que corresponden a: los dominios del modelo, las matemáticas en la EBP, el papel del profesor de primaria, las estrategias utilizadas por el docente para enseñar matemáticas y ¿cómo se estudia el modelo MTSK en las investigación? (perspectiva metodológica).

Tras el análisis de las investigaciones se evidencia que el enfoque de estudio de estas es referido al MK, específicamente en el KoT y KSM, excluyendo al KPM; y en el PCK, el enfoque es el KFLM. Se observa dentro de los estudios que el modelo se identifica, a plenitud, en la metodología, sin embargo, la aplicación en el análisis (en algunos casos) no es completa, lo cual se evidencia en los enfoques ya mencionados; esto, no permite la plena contribución a los procesos de enseñanza, aprendizaje y desarrollo del conocimiento.

Por otra parte, las investigaciones reconocen que el modelo permite dar una perspectiva sobre lo que necesita un profesor de matemáticas para mejorar su proceso de enseñanza y, ello establece una relación entre saberes y práctica, la cual permite al modelo profundizar sobre el conocimiento especializado que se usa para enseñar y cómo se manifiesta. En síntesis, se entiende que las situaciones generadas en el aula son resultado de los conocimientos adquiridos sin embargo, no siempre corresponde a una adecuada capacidad para enseñarlos.

Se concluye, por último, que la práctica docente está ligada a la forma en la que se están enseñando las matemáticas, es decir, no se marca una diferencia entre las matemáticas y las matemáticas para la enseñanza. Lo anterior es fundamental ya que la comprensión holística e integral de estas, direccionan procesos educativos pertinentes y positivos para los estudiantes, pues es la amplitud de saberes la que va a permitir al profesor la multiplicidad metodológica en la enseñanza. Es por ello, que es importante vincular el modelo MTSK a las implicaciones de la práctica docente ya que evidencia los conocimientos e interacciones que se dan en el aula, permitiendo así la modificación de la enseñanza por medio de la innovación curricular y didáctica para lograr calidad en la Educación Matemática

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado bajo el apoyo del Semillero de Investigación STEAM+H de la Universidad Industrial de Santander.

Referencias

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores, E., Escudero, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar, A., Ribeiro, M., y Muñoz, M. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. DOI: 10.1080/14794802.2018.1479981

Creswell, J. W. (1998). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five traditions.* Thousand.

Jesson, J., y Lacey, F. (2006). How to do (or not to do) a critical literature review. *Pharmacy Education, 6*(2), 139-148.

Sandín, E. (2003). *Investigación cualitativa en educación: Fundamentos y tradiciones.* McGraw Hill.

POSIBLES RELACIONES ENTRE EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS CON LA EJEMPLIFICACIÓN

Possible relations between the mathematics teacher´s specialized knowledge with the exemplification

Sánchez-Acevedo, N.[a], Sosa, L.[b], Contreras, L. C.[c]

[a] Universidad Alberto Hurtado, Chile
[b] Universidad Autónoma de Zacatecas, México
[c] Universidad de Huelva, España

Temática: 4 –Desarrollo del MTSK

Resumen.
El propósito de esta comunicación es realizar una aproximación a las posibles relaciones entre el conocimiento especializado y la ejemplificación del profesor de matemáticas como parte de su desarrollo profesional. Esto es especialmente relevante, dado el papel que tienen los ejemplos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Mostramos algunos elementos relevantes sobre ejemplos, ejemplificación y conocimiento para sustentar la discusión teórica y las posibles relaciones, o al menos, la necesidad de abordar estos aspectos. Como resultado proponemos un esquema que incluye algunos elementos que podrían orientar la discusión entre la ejemplificación (variación y transparencia) y el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), que, si bien se han trabajado en la literatura, aparecen desconectados, y que pueden ser movilizados y desarrollados, integradamente, a la luz del MTSK. Cerramos con ideas generales para el profesorado en ejercicio y el formador de profesores.

Palabras clave. Conocimiento especializado del profesor de matemáticas, Estudio de casos, Función cuadrática, ejemplificación.

Abstract.
The purpose of this communication is to provide an overview of the potential relationships between specialized knowledge and the exemplification of mathematics teachers as part of their professional development. This is particularly relevant given the role that examples play in the teaching and learning of mathematics. We present some relevant elements about examples, exemplification, and knowledge to support the theoretical discussion and possible relationships, or at least the need to address these aspects. As a result, we propose a framework that includes some elements that could guide the discussion between exemplification (variation and transparency) and MTSK (Mathematics Teacher Specialized Knowledge), which, although they have been studied in the literature, appear disconnected and can be mobilized and developed together in the light of MTSK. We conclude with some general ideas for practicing teachers and teacher educators.

Keywords. Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge, Case study, Quadratic equation, exemplification.

Sánchez-Acevedo, N., Sosa, L. y Contreras, L. C. (2023). Posibles relaciones entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas con la ejemplificación. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 256-263). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

Los ejemplos y su uso se remontan a periodos históricos, jugando un papel preponderante, tanto en las matemáticas (como disciplina científica), como en la enseñanza de las matemáticas (Bills et al., 2006). En este sentido, los ejemplos son un elemento esencial para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

En el contexto de la selección y uso de ejemplos, se han desarrollado diversas investigaciones que han abordado el uso y las tipologías de ejemplos, y su relación con el conocimiento movilizado en el aula, pero esto aún sigue siendo un área de investigación en desarrollo. Aun cuando en el contexto de los ejemplos hay diversos resultados de investigación, los trabajos que han abordado la ejemplificación (como práctica consciente), a partir de la selección y uso de ejemplos y el conocimiento puesto en juego, es aún limitada (Chick, 2007; Sánchez, et al., in press).

Los ejemplos pueden concebirse de forma útil, como una herramienta de mediación cultural entre los estudiantes y los conceptos, teoremas, demostraciones y/o técnicas matemáticas, siendo un medio para hacer contacto con ideas abstractas y de comunicación matemática, tanto en el aprendizaje como en la enseñanza (Sfard, 1994).

En línea con lo anterior, los ejemplos permiten proporcionar un contexto a partir de variaciones sobre estos y, permite a los estudiantes hacer la distinción de características relevantes. Así, un ejemplo puede concebirse como un ejemplo cuando se perciben como *ejemplos de algo*, por ejemplo, conjeturas y conceptos, aplicación de técnicas o métodos, construcciones de orden superior, tipos de demostración, uso de diagramas, notación particular u otro soporte, etc. Esta construcción es esencial en la acción de ver algo como un ejemplo de alguna *cosa*. Por ejemplo, $f(x) = ax^2 + bx + c \text{ con } a, b \text{ y } c \in \bar{R} \text{ y } a \neq$ es un ejemplo de definición de función cuadrática, $(x-2)(x-3) = 0$ es un ejemplo de la técnica de factorización para hallar los ceros de la función, la selección y uso de estos ejemplos, no necesariamente hace consciente el objetivo que se persigue con estos ejemplos.

Es sabido que los ejemplos tienen diversos usos en el aula, algunos de ellos para enseñar un contenido, practicar, reforzar conceptos y procedimientos (Snider, 2016). Así también, los ejemplos son usados todo el tiempo por los profesores para explicar y facilitar la comprensión matemática en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Son ellos quienes deben tener una comprensión profunda del contenido al interactuar y explicar los conceptos y principios de las matemáticas (Shulman, 1987), pues la enseñanza, a partir, solamente del uso de ejemplos, no es una tarea sencilla, requiere de una intención y conciencia sobre lo que se quiere y pretende enseñar sobre un contenido matemático.

El saber usar ejemplos *"con intención"* (ejemplificación) hace necesario, por parte del profesor, de un conocimiento sobre características contextuales y situadas de quien enseña, es decir, la propia práctica docente (para ejemplificar) debe emerger de la necesidad de específica en un contexto social particular (Karaağaç, 2005). Así, el objetivo de este trabajo es realizar una aproximación hacia posibles relaciones entre el conocimiento especializado y la ejemplificación del profesor de Matemáticas. Para ello, realizamos una breve discusión de elementos teóricos, a partir de la cual se presenta un esquema que permita guiar la relación que puede emerger del MTSK y la ejemplificación de acuerdo con las nociones de variación y transparencia de los ejemplos.

Para guiar esta discusión, en lo que sigue, se presentan y describen algunas investigaciones que han estudiado el uso y la selección de ejemplos y los conocimientos matemáticos y didácticos movilizados por el profesor de Matemáticas. Estos trabajos se han realizado desde la perspectiva (por lo general) del Subject Matter Knowledge y el Pedagogical Content Knowledge (Ball et al., 2008).

Conocimiento del profesor y los ejemplos

El conocimiento del profesor de matemáticas ha sido explorado desde los trabajos de Shulman (1986) cuando acuñó el constructo del Conocimiento didáctico del contenido (PCK). Posteriormente, otros trabajos y modelos se han dado a la tarea de comprender y caracterizar, específicamente, el conocimiento del profesor de matemáticas (e.g. Ball et al., 2008; Rowland et al., 2008). Estas propuestas hacen alusión a la relevancia de los ejemplos, y otros elementos, como componentes de conocimiento en la labor de comunicarse de manera efectiva con los estudiantes y, en algunos casos, se han mostrado posibles relaciones del conocimiento del profesor de matemáticas, en particular, cuando selecciona usa ejemplos para la enseñanza.

Así, la selección y uso de ejemplos en una clase, sean estos planificados o espontáneos, no es una tarea simple (Zaslavsky y Zodik, 2007), y menos aún, desprovista de conocimiento. De acuerdo con Figueiredo et al. (2012), se ejemplifica de mejor manera algún contenido, concepto o procedimiento, mientras más conocimiento se tenga sobre este, es decir, acerca de las formas de enseñarlo, representarlo, usarlo y/o aplicarlo.

Zaslavsky et al. (2006) realizaron una investigación para examinar la práctica del uso de ejemplos como herramienta didáctica. La intención de los investigadores era poder conocer y manejar aspectos significativos, a partir de una base de conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza. Dentro de sus conclusiones, identificaron varios elementos de base de conocimiento que se pudieron inducir examinando la selección y el uso de ejemplos, es decir, la selección y uso de ejemplos permitió promover aspectos significativos del conocimiento matemático y pedagógico de contenido (en la línea de Ball et al. 2008).

Chick y Harris (2007) realizaron un estudio que tuvo como objetivo examinar el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) de profesores de matemáticas cuando seleccionaron ejemplos para la enseñanza de las proporciones. Sus conclusiones dieron cuenta de la necesidad de abrir espacios para ayudar a los profesores a pensar explícitamente sobre las posibilidades de un ejemplo (ejemplificación), lo que hace necesario un conocimiento profundo del PCK, en particular, de una comprensión de las matemáticas subyacentes y las conexiones entre los temas.

Li (2011) desarrolló una investigación que buscaba describir el diseño de una secuencia de prácticas matemáticas, implementadas en tres clases consecutivas, sobre cuatro rutinas algebraicas para resolver ecuaciones cuadráticas a partir del uso de diversos ejemplos. A partir de los resultados, concluyeron que la identificación del conocimiento en profesores (en este caso MKT) debe apuntar a fortalecer los dominios de conocimiento de los profesores y la flexibilidad en las habilidades de enseñanza a partir de decisiones informadas y razonadas.

Por último, Adler y Pournara (2020) realizaron una investigación que tuvo por objetivo intencionar la ejemplificación en profesores de nivel secundario sobre expresiones cuadráticas. El trabajo se desarrolló con profesores de Matemáticas apoyándose en la teoría de la variación, buscando, explícitamente, una coordinación entre ejemplos y la ejemplificación de algunos aspectos críticos. Estos autores concluyeron que la ejemplificación requiere de una consciencia sobre lo que se quiere ejemplificar, pues esta práctica[1] es un trabajo intencionado. Además, mencionan que se debe poner atención en la ejemplificación de acuerdo con los aspectos de variación e invariancia, que es un componente importante y necesario de las matemáticas y su enseñanza.

Estas investigaciones dan cuenta de algunas relaciones de conocimiento del profesor de Matemáticas

[1] No en el sentido del Knowledge of Practices in Mathematics (KPM) del modelo MTSK (Carrillo et al., 2018).

cuando selecciona y usa ejemplos para la enseñanza. En el último caso (Adler y Pournara, 2020) se ha puesto de manifiesto investigar sobre el conocimiento en uso de profesores de Matemáticas y la ejemplificación, que tal como plantean estos mismos autores, requiere de una atención consciente sobre aspectos críticos de los ejemplos (variación-invariancia y transparencia) cuando se selección y usan ejemplos.

A partir de esto, discutimos algunos trabajos sobre el conocimiento movilizado por profesores de Matemáticas y la ejemplificación, para luego describir estos aspectos críticos de los ejemplos, variación e invariancia y transparencia de los ejemplos.

De los ejemplos a la ejemplificación y el MTSK

Si bien existen varios trabajos que se han llevado a cabo en el contexto del conocimiento del profesor de matemáticas sobre la selección y uso de ejemplos, en menor cuantía están aquellos que versan sobre la ejemplificación. En ocasiones se confunde la selección y uso de ejemplos con la ejemplificación. Si bien estas prácticas están relacionadas, la ejemplificación implica la consciencia sobre la transparencia y la variación de aspectos críticos de esos ejemplos. En este sentido, no basta con saber el contenido a enseñar, sino que, se debe ser consciente del qué de ese contenido se quiere hacer visible y, esa visibilidad depende de algunas características que son explícitas en los ejemplos (Lesh et al., 1987; Marton y Booth, 1997).

En esta línea, Ng y Dindyal (2015) examinaron las prácticas de ejemplificación de profesores de Singapur, cuando seleccionaron y usaron ejemplos para la enseñanza de las Matemáticas. A partir de un cuestionario se exploró en las opiniones de profesores sobre ejemplos matemáticos, su conocimiento matemático de la enseñanza y sus creencias matemáticas. Los resultados del trabajo de Ng y Dindyal (2015) encontraron algunas conexiones entre el PCK de los profesores y su uso de ejemplos. Dentro de las conclusiones generales, la selección de los ejemplos y su ejemplificación estuvo influenciada por el KCT (conocimiento del contenido y la enseñanza) del profesor, pues la selección de ejemplos permitió ejemplificar las ideas matemáticas a través de ejemplos variados.

Tirosh et al. (2019) realizaron un estudio que tuvo por objetivo mejorar la conciencia y comprensión de profesores en formación y en ejercicio sobre la selección de ejemplos en las salas de clases a través del uso de teorías para analizar casos auténticos. Los resultados de este trabajo mostraron que el aspecto más frecuente del uso de ejemplos observados fue el aspecto psicológico; como también, el uso de ejemplos intuitivos y no intuitivos. En general, los profesores manifestaron que las actividades, a partir de casos particulares, aportaron a su comprensión del uso de ejemplos en el aula, aunque no necesariamente en gran medida.

Aineamani (2021) realizó una investigación que tuvo por objetivo estudiar la selección y uso de ejemplos en clases de matemática de funciones a partir de ejemplos espontáneos o planeados previamente. Dentro de las conclusiones se encontró que los profesores seleccionaron diferentes tipos de ejemplos de acuerdo con el contenido y las actividades para representar el objeto de aprendizaje, de acuerdo con el contenido que habían planificado. Asimismo, los profesores fueron conscientes del papel de la ejemplificación en la enseñanza y el aprendizaje; no obstante, no se evidenció un compromiso en la relación profesor-estudiante para orientar el discurso matemático.

En cuanto a las investigaciones que han estudiado la relación entre la ejemplificación y el MTSK, estas han sido limitadas. Sin embargo, algunos trabajos (doctorales), dentro de sus resultados, han abordado el uso de ejemplos y aspectos de la ejemplificación, pero como una componente al interior del conocimiento especializado, específicamente en el subdominio del KMT en la categoría de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (Vasco, 2015; Liñan, 2017).

A continuación, describimos aquellos elementos de la ejemplificación, como la transparencia y secuencias de ejemplos, y la variación, las que podrían constituir relaciones con el modelo de MTSK. Con ello presentaremos posibles relaciones entre estos elementos y los subdominios del MTSK y las respectivas categorías de conocimiento.

Secuencias de ejemplos y variación

La enseñanza de las matemáticas no se puede circunscribir al uso aislado de ejemplos y la rutinización de ejercicios para acentuar las prácticas procedimentales sobre los contenidos que se pretenden aprender (Figueiredo y Contreras, 2013). En este sentido, el conocimiento de ejemplos pone en juego conocimientos sobre estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (KMT), dado que el uso y la selección es parte de la base de la ejemplificación. Este conocimiento se relaciona con alguna de las categorías del Conocimiento de los temas (KoT), pues dicha selección hace necesario conocimiento matemático. Es así como varios estudios sugieren que el uso combinado de secuencias de ejemplos tiene una influencia directa en el aprendizaje de las matemáticas sobre un concepto específico que se pretende enseñar (Figueiredo y Contreras, 2013; Kullberg et al., 2017). De acuerdo con Bills et al. (2006), hacer una combinación de ejemplos y no ejemplos en la estructuración de estas secuencias permitiría que los estudiantes centraran la atención en aquellos aspectos críticos de los no críticos que son relevantes en los ejemplos. En este sentido, el uso de secuencias de ejemplos en la ejemplificación de algún contenido matemático es parte del Conocimiento Didáctico del Contenido, en particular, de teorías de enseñanza, dado que la ejemplificación a partir de secuencias de ejemplos hace necesario conocer características particulares de estos ejemplos, a partir de estas secuencias de ejemplos. Estas secuencias, pueden poner en acción algunos de los subdominios del MK (KoT, KPM o KSM). Para ello, se debe cuidar la intencionalidad de dicha secuencia de ejemplos, pues diferentes secuencias pueden tener objetivos diferentes; los cuales pueden estar relacionados con el conocimiento sobre aspectos curriculares, KMLS o KFLM, en algunas de sus categorías de conocimiento.
La conciencia sobre ejemplos y secuencias de ejemplos está relacionada con la idea de hacer que ocurra el aprendizaje desde una perspectiva relacional y perceptiva (Marton y Booth, 1997; Marton y Tsui, 2004).

Es a partir de esta premisa, que la teoría de la variación (Marton, 2015; Marton y Booth, 1997) se apoya en la idea de que el aprendizaje implica visualizar o experimentar aquellos aspectos críticos de un objeto de aprendizaje. Este objeto de aprendizaje debe proporcionar respuestas a la pregunta *¿Qué se debe aprender?* (Kullberg et al., 2017), y que puede ser respondida considerando tres pilares: (1) el contenido, (2) el objetivo educativo y (3) lo que se necesita aprender (aspectos críticos). Es así, que el conocimiento de la teoría de la variación está sobre la base del conocimiento sobre teorías de enseñanza (KMT), subdominio que se podría relacionar con el objeto matemático en cuestión (KPM o KoT), en cualquiera de las categorías de estos subdominios, estableciéndose relaciones con el KMLS, respondiendo al contenido y al objetivo educativo; y al KFLM, respondiendo a lo que se necesita aprender, que condiciona las características del aprendizaje de los estudiantes.

De acuerdo con Marton y Pang (2006) y Marton y Tsui (2004), se hace necesario poner atención a lo que varía y lo que es invariante en un contexto de aprendizaje, pues esto permitirá comprender lo que se puede aprender y aquello que no. La variación e invariación presentan cuatro condiciones necesarias para el aprendizaje (Marton y Tsui, 2004): el contraste, la separación, la fusión y la generalización, estas condiciones y su conocimiento movilizarían el conocimiento especializado a partir de la ejemplificación de algún contenido matemático.

Transparencia

La noción de transparencia está fuertemente relacionada con la representación utilizada de algún concepto dado. El uso de ejemplos para presentar conceptos está presente en la manipulación de objetos matemáticos, la comunicación de ideas y la asistencia en la resolución de problemas (Stylianou, 2010), es decir, los ejemplos transparentes, en la enseñanza, son parte del conocimiento sobre KMT, en sus categorías de teorías de enseñanza y estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Cada forma de ejemplificación puede mostrar representaciones (KoT-representaciones) con fortalezas que son específicas, como también desventajas, por lo que usar de manera combinada ejemplos puede transformarse en una herramienta potencialmente útil para ilustrar diferentes aspectos sobre un concepto matemático (Cuoco, 2001). Esto es especialmente útil, pues el uso de determinados ejemplos permitiría iluminar sobre diferentes aspectos de un concepto o relación matemática compleja. En este contexto, el profesor usaría conocimientos sobre KoT para mostrar las diferentes aristas del objeto matemático, como también, podría emerger conocimiento sobre el KPM.

En este sentido, hablar de transparencia, es hablar de la claridad en que los ejemplos ilustran un concepto, la cual es mostrada de acuerdo con la intención de enseñanza, que puede estar sobre la base del conocimiento del aprendizaje de la matemática (KFLM) o el conocimiento de los estándares de aprendizaje de la matemática (KMLS). En los trabajos de Lesh et al. (1987, citado en Zazkis y Gadowsky, 2001) sobre números racionales y razonamiento proporcional, se introducen los sistemas representativos como opacos y transparentes. En este sentido, una representación es transparente si no tiene ni más ni menos significado sobre la idea o estructura que pretende representar y una representación opaca es aquella que enfatiza unos aspectos de la idea o estructura y atenúa otros.

El conocimiento especializado del profesor se hace relevante al momento de enseñar un concepto matemático, en particular, cuando se quiere relevar uno o más aspectos asociados a dicho concepto. Este conocimiento no es fácilmente evidenciable en la ejemplificación, pues depende de la intención de enseñanza, el uso de ejemplos y secuencias de ejemplos sutilmente seleccionados que permitan no desviar la atención de los estudiantes sobre el aspecto que se pretende mostrar.

Tal como se ha referenciado en algunos de los antecedentes mostrados, la ejemplificación hace necesario de un conocimiento especializado sobre teorías de enseñanza (KMT). Esta ejemplificación se moviliza a partir de la selección y uso de ejemplos. El uso y selección [de ejemplos] requieren de una base de conocimiento especializado para ser llevados al aula y poder transmitir los aspectos esenciales del contenido de enseñanza, pero la ejemplificación hace necesario conocer aspectos críticos de los no críticos para que un ejemplo sea transparente a lo que se quiere mostrar en el aula. Esto lo mostramos en la Figura 1:

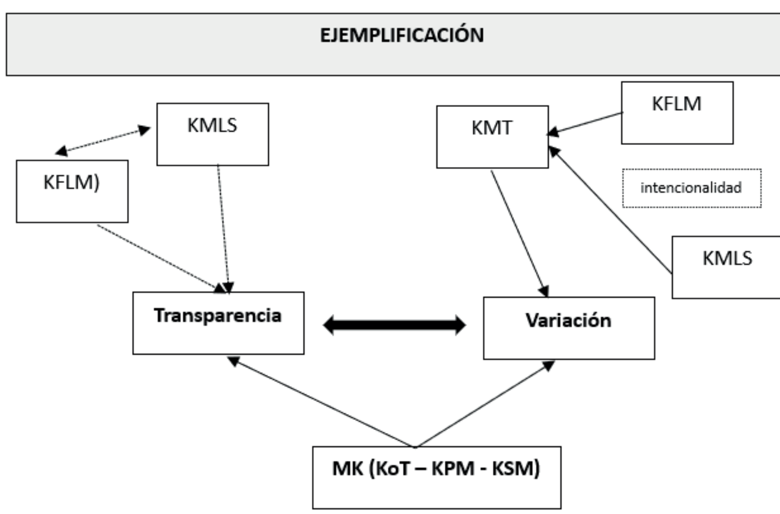


Figura 1. Elementos considerados para la ejemplificación y el MTSK

Implicaciones y proyecciones

Es posible establecer relaciones entre la ejemplificación y el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas. La base de la ejemplificación, dados los aspectos teóricos que subyacen a la ejemplificación, son parte del MK, desde donde podrían emerger conocimientos en la base del PCK. Para ello, dos elementos que son relevantes son la transparencia de un ejemplo a una característica dada y, los aspectos de variación. La toma de conciencia de estos elementos, proponemos, pueden llevar a un profesor a desarrollar la ejemplificación [consciente].

Como profesores de matemáticas y formadores de formadores la toma de conciencia sobre el uso de ejemplos es relevante, pero la toma de conciencia sobre la práctica de ejemplificar puede potenciar los procesos de enseñanza y el conocimiento especializado implicado necesario, tanto didáctico como matemático. En este sentido, el desarrollar conocimiento en los futuros profesores, pero en particular, un conocimiento especializado, puede ser una herramienta para usar y seleccionar ejemplos con *conciencia* a la luz de los aspectos que se quieren hacer visibles, y que estos ejemplos, sean transparentes a la noción ejemplificada en el diseño de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., y Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in Mathematics Education. En J. Novotna, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 1, pp. 126-154). PME.

Carrillo, J., Climent, N., Montes,M., Contreras, L. C., Flores–Medrano, E., Escudero–Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar–González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Chick, H. L. (2007). Teaching and learning by example. En J. Watson y K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice. Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 3–21). MERGA.

Figueiredo, C.A., Contreras, L.C., y Blanco, L.J. (2012). La ejemplificación del concepto de función: diferencias entre profesores noveles y profesores expertos. *Educación Matemática, 24*(1), 73-105.

Karaağaç, M. K. (2005). Differences in teachers' selection and use of examples in classrooms: an institutional perspective on teacher practice. En D. Hewitt (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 25*(2), 69-74.

Lesh, R., Behr, M., y Post, T. (1987). Rational number relations and proportions. En C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 41-58). Lawrence Erlbaum.

Marton, F., y Booth, S. (1997). *Learning and Awareness.* Lawrence Erlbaum.

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 44–55.

Sánchez, N., Sosa, L., y Contreras. L.C. (en prensa). Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas evidenciado en la selección y uso de ejemplos en la enseñanza de la ecuación cuadrática. *Bolema*.

Snider, R. B. (2016). *How mathematical knowledge for teaching intersects with teaching practices: The knowledge and reasoning entailed in selecting examples and giving explanations in secondary Mathematics* [Doctoral Dissertation, University of Michigan]. https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/133262/rsnider_1.pdf?sequence=1

Vasco, D. L. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal: un estudio de casos en el nivel universitario* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11901

Liñan, M. (2017). *Conocimiento especializado en Geometría en un aula de 5° de primaria* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. https://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/14230

Zaslavsky, O. y Zodik, I. (2007). Mathematics teachers' choices of examples that potentially support or impede learning. *Research in Mathematics Education, 9*, 143–155. https://doi.org/10.1080/14794800008520176

Zaslavsky, O., Harel, G., y Manaster, A. (2006). A teacher's treatment of examples as reflection of her knowledge-base. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 457–464). PME.

RELACIONES EN EL MTSK DE UNA FUTURA PROFESORA DE MATEMÁTICAS AL REFLEXIONAR SOBRE SUS PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA

Relationships in the MTSK of a mathematic prospective teacher reflecting on her teaching practices

Almonacid-Venegas, M. [a], Avilés-Cano, F. [a], Delgado-Rebolledo, R.[a]

[a] Universidad de Concepción, Chile

Temática: 4 –Desarrollo del MTSK

Resumen.
Los conocimientos que desarrollan los profesores de matemáticas en su etapa de formación inicial son la base para su desempeño profesional. En este trabajo nos proponemos comprender el conocimiento especializado que pone en juego una futura profesora de matemáticas que se encuentra en la etapa final de su proceso formativo. A partir de un informe escrito en el cual la profesora reflexiona sobre sus prácticas de enseñanza en una secuencia de clases sobre función cuadrática, identificamos evidencias de su conocimiento especializado y establecemos relaciones entre los subdominios de dicho conocimiento. Lo anterior nos permite mostrar la estructura del conocimiento especializado que la futura profesora ha construido y reflexionar sobre cómo promover el desarrollo del conocimiento especializado de los futuros profesores de matemáticas.

Palabras clave. MTSK, Relaciones en el MTSK, Reflexión, Formación inicial.

Abstract.
The knowledge that mathematics teachers develop in their initial training stage is the basis for their professional performance. In this work we aim to understand the specialized knowledge that a future mathematics teacher who is in the final stage of her training process puts into play. From a written report in which the teacher reflects on her teaching practices in a sequence of classes on quadratic function, we identify evidence of her specialized knowledge and establish relationships between the subdomains of such knowledge. This allows us to show the structure of the specialized knowledge that the future teacher has built and to reflect on how to promote the development of the specialized knowledge of future mathematics teachers.

Keywords. MTSK, connections in the MTSK, reflection, initial training.

Almonacid-Venegas, M., Avilés-Cano, F. y Delgado-Rebolledo, R. (2023). Relaciones en el MTSK de una futura profesora de matemáticas al reflexionar sobre sus prácticas de enseñanza. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 264-271). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

El proceso de formación inicial de los profesores pasa por diversas etapas, como los estudios generales en el área pedagógica, estudios específicos del área de especialización y el proceso de prácticas que permiten al futuro profesor acercarse al quehacer docente. En el caso del programa de Pedagogía en Matemáticas de la Universidad Chilena en que se desarrolla este estudio, se considera un eje de prácticas pedagógicas que se desarrollan de forma progresiva y vinculadas entre sí. Dichas prácticas inician en el tercer año de formación y finalizan en el quinto año cuando los estudiantes han aprobado todas las asignaturas del plan de estudios. El último hito del eje práctico es una asignatura denominada Práctica Profesional de la Especialidad (PPE) que se presenta como un espacio donde los futuros profesores deben poner en juego los conocimientos y habilidades que se espera hayan desarrollado a lo largo de su proceso de formación inicial.

La asignatura de PPE que se propone en la Universidad en la que se desarrolla este estudio se divide en tres etapas: diagnóstico, implementación y reflexión. En la etapa de diagnóstico, el futuro profesor se inserta en la institución escolar en la cual realizará su práctica y es puesto bajo la tutoría de un profesor de matemáticas con más de cinco años de experiencia (denominado profesor mentor). El futuro profesor debe observar el quehacer docente de su profesor mentor y analizar los cursos que le serán asignados. Entre los elementos que se analizan de los cursos están los hábitos de estudio de los estudiantes, sus actitudes hacia la asignatura, la forma en que trabajan en el aula, el contrato pedagógico establecido en la sala de clases, los resultados académicos de años anteriores y las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En la segunda etapa de la PPE, los futuros profesores elaboran e implementan un diseño didáctico enfocado en una situación problemática o un aspecto a mejorar que identificaron en la etapa de diagnóstico. Esta implementación es documentada por los futuros profesores y además supervisada por el profesor mentor y por el profesor de la universidad encargado de la asignatura PPE. La última etapa del proceso de PPE, en la cual nos centraremos en esta investigación, corresponde a la reflexión en torno a las prácticas de enseñanza. En esta etapa, a partir de las evidencias recopiladas en su implementación, los futuros profesores analizan su desempeño en la sala de clases, cuestionan su accionar en el aula y proponen acciones de mejora. En este sentido, la reflexión es considerada como el último paso para llegar a una nueva comprensión de los contenidos y de la práctica docente, pues es a través de la reflexión se aprende de la experiencia (Shulman, 1987).

De acuerdo con lo anterior, en este estudio nos proponemos comprender el conocimiento especializado que pone en juego una futura profesora de matemáticas cuando reflexiona sobre sus prácticas de enseñanza en el contexto de la asignatura PPE. Consideramos que la reflexión se basa en un análisis retrospectivo del proceso de enseñanza y aprendizaje que ha tenido lugar, de forma que en ella se reconstruyen, vuelven a escenificar y a experimentar los sucesos, las emociones y los logros de las clases (Shulman, 1987). Además, para la comprensión del MTSK asumimos dos miradas: desde una perspectiva detallada identificamos evidencias de conocimiento en los diferentes subdominios del modelo y desde una perspectiva integradora nos proponemos establecer relaciones en el MTSK.

Marco teórico

El modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) (Carrillo et al., 2018) permite comprender el conocimiento manifestado por los profesores de matemáticas en su quehacer docente. El modelo consta de seis subdominios de conocimiento que se agrupan en dos grandes dominios; el conocimiento matemático (MK) y el conocimiento didáctico del contenido (PCK). El modelo además incluye un dominio que hace referencia a las creencias de los profesores sobre la matemática, su enseñanza y su aprendizaje. A continuación, describimos los dominios de conocimiento pues nos centraremos en ellos en esta investigación.

En el conocimiento de los temas (KoT) encontramos conocimientos sobre la fenomenología y aplicaciones de los contenidos matemáticos, las definiciones, las propiedades y sus fundamentos, los registros de representación y los procedimientos. En el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) se describe el conocimiento de las conexiones entre contenidos matemáticos, las cuales pueden ser de complejización, de simplificación, transversales y auxiliares. Por su parte, en el conocimiento de la práctica matemática (KPM) se incluyen los conocimientos asociados a las prácticas de demostrar, definir, resolver problemas, así como el conocimiento del papel del lenguaje matemático en la comunicación de las ideas matemáticas. El KoT, el KSM y el KPM conforman el MK.

Por otra parte, el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) agrupa el conocimiento de teorías de enseñanza de las matemáticas (personales o institucionales), recursos didácticos (físicos y digitales), y estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. En el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) se encuentran los conocimientos sobre teorías de aprendizaje matemáticas (personales o institucionales), fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas, las formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático y los aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas. Finalmente, en el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS) encontramos conocimientos sobre resultados de aprendizaje esperados, nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado y secuenciación de los temas. El KMT, el KFLM y el KMLS conforman el PCK.

Sumado a lo anterior, a pesar de que el modelo MTSK comprende distintos dominios y subdominios, estos no se conciben como elementos aislados y el carácter integral del modelo se evidencia a partir de las relaciones entre sus componentes. En esta línea, Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez (2021) hacen un análisis de las relaciones entre los subdominios de conocimiento MK y PCK reportadas en investigaciones publicadas desde el año 2015 hasta el año 2020 y las clasifican en tres grandes grupos: (i) Relaciones intra-dominios de conocimiento, los cuales aluden a las relaciones que existen entre subdominios de conocimientos del mismo dominio, por ejemplo, entre el KoT y el KPM o entre el KFLM y el KMLS; (ii) Relaciones intra-subdominios de conocimiento, los cuales se refieren a las relaciones que se establecen entre las categorías de conocimiento en el mismo subdominio por ejemplo una relación entre el nivel de desarrollo conceptual esperado y la secuenciación de temas, ambos en el KMLS; y las (iii) Relaciones inter-dominios, referidos a las relaciones entre los diferentes dominios, por ejemplo, una relación entre el KoT y el KMLS o el KPM y el KMT.

Metodología

Esta investigación de carácter cualitativo, se desarrolló a través de un estudio de caso instrumental (Stake, 2007). Utilizaremos el seudónimo Sofía para referirnos a la futura profesora de matemáticas que aceptó participar en este estudio autorizando que sus datos sean presentados en este reporte. Al momento de la investigación Sofía se encontraba desarrollando las últimas actividades de su plan de formación docente en una universidad chilena: la asignatura PPE y el trabajo de titulación.

Sofía es una futura profesora con experiencia en realizar clases de matemáticas a sus compañeros de carrera (programa de tutorías). Además, obtuvo resultados satisfactorios en sus informes de PPE y una evaluación positiva tanto de su profesora mentora como de la profesora encargada de la PPE que la supervisó. Ambas profesoras coinciden en el interés de Sofía por mejorar su desempeño en la sala de clases. Sumando a lo anterior, en una observación preliminar a este estudio, se reconocieron en Sofía algunas características como su dominio de los contenidos matemáticos que enseña, su manejo del currículum nacional y el uso de diferentes estrategias de enseñanza.

Los datos utilizados en esta investigación fueron extraídos de un informe escrito desarrollado por Sofía para la asignatura PPE en el cual reflexionaba sobre el diseño e implementación de tres clases dedicadas a la enseñanza de la función cuadrática a estudiantes de secundaria (16-17 años) de un liceo en Chile. Este informe nos da acceso al proceso de diseño de las tareas propuestas en las clases, las planificaciones, la grabación y transcripción de la primera clase de la secuencia, así como un relato donde se contrasta la planificación de las clases con los resultados de la implementación.

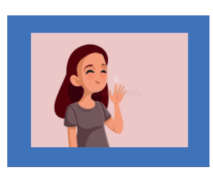
Siguiendo a Shulman (1987), consideramos que Sofía reflexiona cuando reconstruye el proceso de enseñanza-aprendizaje, analiza críticamente su desempeño y entrega justificaciones de las decisiones tomadas tanto en la planificación como en desarrollo de sus clases, fundamentando sus explicaciones con evidencias. En esta línea, la estructura del informe y sus requerimientos cumplen con el propósito de que Sofía explicite sus reflexiones.

Para el análisis de los datos se extrajeron fragmentos del informe que daban cuenta del conocimiento de Sofía en algún subdominio del MTSK (evidencias), así como elementos que permitían intuir un conocimiento (indicios). A partir de la identificación de estas evidencias e indicios de conocimiento (Carrillo y Moriel-Junior, 2014), realizamos una entrevista en la cual indagamos sobre algunas expresiones y acciones desarrolladas por Sofía en las clases, lo anterior, nos permitió profundizar en nuestras interpretaciones y refinar nuestros análisis. Como resultado presentamos nuestra comprensión del conocimiento de Sofía desde una perspectiva detallada en los distintos subdominios del MTSK. Adicionalmente, seleccionamos aquellos fragmentos de los datos donde dos o más categorías de conocimiento eran identificadas y además era posible realizar una interpretación de cómo estaban interactuando estos componentes de conocimiento, a lo anterior lo denominamos una relación (Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2022), de modo que describimos relaciones en el MTSK de Sofía.

Resultados

En el análisis detallado del MTSK de Sofía identificamos conocimientos en los diferentes subdominios modelo. En el caso del KoT, encontramos evidencias del conocimiento de Sofía de la *fenomenología y aplicaciones* asociada a la función cuadrática ya que en su planificación la futura profesora plantea situaciones contextualizadas para abordar función cuadrática; conocimientos de los *registros de representación*, pues en las clases utiliza la representación algebraica, tabular y gráfica a la hora de trabajar con la función cuadrática; así como también conocimiento de la *definición* y los componentes de la función cuadrática a los cuales se refiere en la planificación y además los presenta en la clase.
A continuación, presentamos una tarea (extraída del informe) que fue diseñada por Sofía.

Camila, se ha tomado una foto que desea subir a su Instagram. Las dimensiones en centímetros de la fotografía son 6 cm de largo y 4 cm de ancho. Sin embargo, quiere editar dicha foto antes de publicarla, de forma que tenga un marco que rodee su foto, en donde el ancho del marco sea constante en todo el contorno, tal como se mostrará a continuación en la figura:



1. ¿Qué expresión nos permite conocer el área del marco de la fotografía que Camila quiere subir a sus redes sociales?

2. Identifica la variable dependiente e independiente de la expresión que acabas de encontrar.

3. Elegir 5 medidas distintas para el lado del marco y reemplazarlas en la expresión encontrada. ¿Qué puedes observar sobre el comportamiento de los datos?

Figura 1. Tarea propuesta por la futura profesora

Sofía expone que en la tarea (Figura 1) los estudiantes se enfrentan a un problema pues tienen que analizar el contexto, extraer datos de la situación y apoyarse de un dibujo como estrategia para obtener una expresión algebraica. Esta expresión corresponde a una función cuadrática, función que hasta el momento los estudiantes no conocían. En esta línea, identificamos el conocimiento de la profesora respecto a la *práctica de resolver problemas* (KPM).

Por otra parte, en el KMT evidenciamos el conocimiento de la futura profesora de *tareas* para la enseñanza de la función cuadrática, por ejemplo, la tarea que se presenta en la Figura 1 que fue diseñada por Sofía. Resalta el conocimiento de Sofía en el subdominio KFLM ya que Sofía usa las redes sociales como un contexto en que la función cuadrática podría ser interesante para sus estudiantes mostrando conocimiento de los *aspectos emocionales asociados al aprendizaje de las matemáticas*.

En el KMLS identificamos el conocimiento de Sofía de las *expectativas de aprendizaje* pues cuando la futura profesora reflexiona sobre su planificación señala que en sus clases busca desarrollar en sus estudiantes las habilidades matemáticas que propone el currículo chileno: representar, argumentar y comunicar, modelar y resolver problemas. Adicionalmente, la futura profesora se refiere a cómo espera que sus estudiantes respondan a las tareas e interrogantes que ella les plantea, lo cual nos permite identificar su conocimiento del *nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado*.

Relaciones en el MTSK de Sofía

Además de los conocimientos expuestos en el MTSK de Sofía, a continuación, reportamos evidencias de relaciones en su MTSK, las cuales ilustramos usando principalmente fragmentos de la entrevista en los cuales se evidencia la reflexión de la futura profesora.

Cuando Sofía reflexiona sobre la planificación de la primera clase, empieza refiriéndose a la manera en que diseñó la tarea sobre la foto (Figura 1). Esta tarea es un elemento central de su reflexión como observamos a continuación:

> Sofía: El contenido matemático que se trabajó en las planificaciones fue función cuadrática, un contenido que requiere diversas representaciones para que el o la estudiante comprenda el concepto a cabalidad. En la actividad de la foto de Instagram, en la primera demanda está presente el lenguaje natural, representación dada en el enunciado, para luego obtener una representación algebraica

En la intervención observamos el conocimiento de Sofía de las *representaciones* en el lenguaje natural y algebraico de la función cuadrática (KoT). Además, si bien la futura profesora no declara de forma explícita hacer uso de la teoría de registros de representación semiótica (TRRSS) (Duval, 1999), en su discurso encontramos indicios de conocimiento de dicha *teoría institucional de aprendizaje* (KFLM), pues Sofía expresa que la comprensión de la función cuadrática está asociada al uso de diversas representaciones. Lo anterior señala una relación entre el KoT y el KFLM, que se confirma cuando al continuar la entrevista la futura profesora profundiza en el punto anterior:

> Sofía: Queríamos hacer la secuencia de cambios de representación [...] siempre que se ve la función cuadrática se ve desde lo algebraico, luego se pasa a lo tabular, luego se pasa a lo gráfico, eso es lo que queríamos realizar nosotros.

Cuando Sofía expone su propósito de que la tarea promueva una “secuencia de cambios de representación” y cuando señala la idea de “pasar” de una representación a otra, en términos de la TRRSS se refiere a las conversiones. Así, observamos que la tarea busca que los estudiantes trabajen con distintas representaciones pues la futura profesora considera que al transitar por ellas promueve la comprensión de la función cuadrática. En este sentido, identificamos el conocimiento de Sofía de una *teoría institucional de aprendizaje* (KFLM) la cual usa para diseñar una *tarea de enseñanza* (KMT) de la función cuadrática. Lo anterior muestra una relación entre el KFLM y el KMT.

Por otra parte, cuando Sofía discute con los estudiantes sus respuestas a la tarea expone ejemplos de cada uno de los conceptos en los que sus estudiantes tienen una ausencia de conocimiento, tal como se observa en la siguiente intervención:

> Sofía: Primero yo hice un ejemplo sobre la orientación de la foto [para identificar el ancho y el largo], hice otro ejemplo sobre cómo obtener el área, y después hice un ejemplo para que ellos me dijeran cual era la variable dependiente e independiente. Lo hice más que nada porque yo sabía que el curso no tenía los conocimientos previos necesarios para realizar el problema. Lo único que no se tomó en cuenta en la planificación [que sucedió en la clase] fue el tema de multiplicar expresiones algebraicas.

De acuerdo con lo anterior, identificamos una relación que involucra el conocimiento de la futura profesora de *ejemplos* (KMT) que permiten abordar las *debilidades de los estudiantes* (KFLM) para trabajar con la función cuadrática y resolver la tarea propuesta. En la entrevista, Sofía continúa exponiendo las dificultades de los estudiantes para comprender la función cuadrática, las cuales atribuye en gran medida a la ausencia de conocimientos algebraicos y a la falta de comprensión del concepto de función en general. Reflexionar sobre la clase también le permitió a Sofía notar que hubo una dificultad de los estudiantes no anticipada en la planificación.

En línea con lo anterior, Sofía se refiere a la complejidad que conlleva el aprendizaje de la función cuadrática cuando expone lo siguiente:

> Sofía: Los estudiantes tienen que hacer demasiadas conexiones para poder entender el concepto completo de función cuadrática [...] generalmente en la función cuadrática te preguntas por las intersecciones con los ejes y el eje de simetría, también es complejo explicar cómo se mueve la función cuadrática en el plano. Después viéndolo como parábola en educación superior, en geometría analítica, ahí es lo mismo pero otra visión, ellos [los estudiantes] tienen que realizar conexiones con lo que vieron antes, porque en geometría analítica hablo del foco y le agrego más elementos.

En el fragmento anterior, la futura profesora expone los componentes de la función cuadrática y además se refiere a su gráfica (la parábola) dando cuenta de un conocimiento sobre *propiedades* (KoT) de la parábola como la simetría. Además, Sofía muestra su conocimiento de cómo se *complejiza* (KSM) la parábola desde la función cuadrática a su existencia como lugar geométrico en el plano. Lo anterior lo presenta en referencia a un conocimiento de *secuenciación de los temas* (KMLS) que va más allá del currículo nacional de enseñanza media mencionando el nivel de educación superior. De esta forma identificamos una relación entre el KSM y el KMLS.

En la Figura 2 se presentan los subdominios y categorías de conocimiento que conforman el MTSK de Sofía cuando reflexiona sobre la enseñanza de la función cuadrática, incluyendo las relaciones antes expuestas las cuales son de tipo intra-subdominios (KoT-KFLM, KSM-KMLS) e intra-dominio (KMT-KFLM).

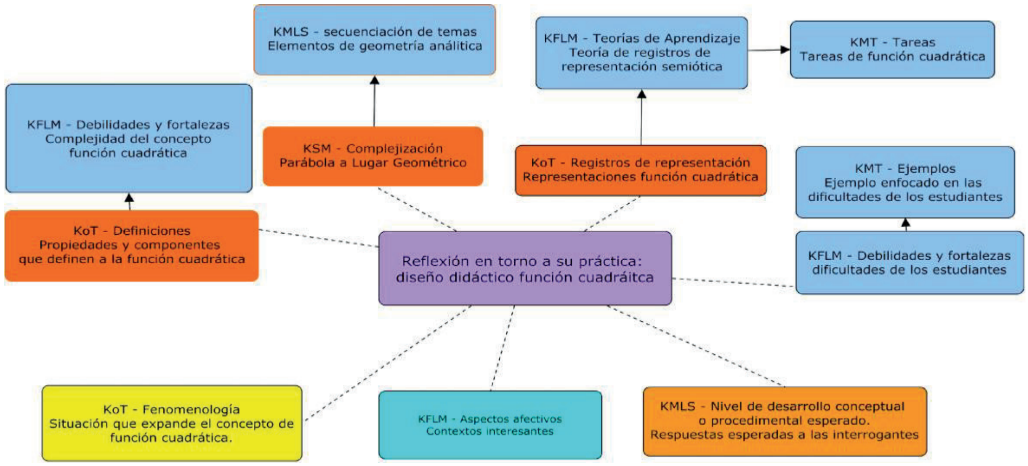


Figura 2. MTSK de Sofía sobre función cuadrática

Comentarios finales

En este estudio exponemos la estructura del MTSK sobre función cuadrática de una futura profesora de matemáticas presentando su conocimiento en diferentes subdominios del MK y el PCK, además de resaltar las relaciones entre ellos. Profundizamos en dos de las relaciones identificadas, una al interior del PCK en la cual la futura profesora cuando reconoce la dificultad de los estudiantes para trabajar con la función cuadrática e intenta hacerle frente presentando varios ejemplos.

Además, la futura profesora diseña una tarea con la intención de que los estudiantes usen diferentes representaciones que les permitan comprender la función cuadrática mostrando interacciones entre su conocimiento de cómo se representan los objetos matemáticos y cómo estas representaciones aparecen, se articulan y organizan la enseñanza y el aprendizaje. Lo anterior es el tipo de vínculos que se espera logren hacer los futuros profesores de matemática, a pesar de que en muchos programas de formación los elementos matemáticos y didácticos se presentan de forma aislada. Siguiendo esta idea, señalamos la importancia de que los futuros profesores de matemática cuenten con espacios en su formación en los que se promueva el desarrollo de estas conexiones entre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico.

Por otra parte, consideramos la etapa de reflexión en la cual centramos este estudio, favoreció que se movilizaran diferentes componentes del MTSK de la futura profesora no identificados en la planificación ni en el desarrollo de la clase. Por ejemplo, en la reflexión la futura profesora identificó *debilidades de los estudiantes* (KFLM) que no habían sido anticipadas en la planificación y además expuso una relación entre la forma en que se estudia la función cuadrática en educación secundaria y como se abordará de manera más general en la educación superior (KSM-KMLS).

Finalmente, si bien en la literatura se reportan modelos más estructurados para referirse a la reflexión (e.g., Karthagan y Kessels, 1999), la aproximación que tomamos en este estudio responde al contexto institucional en que se desarrolló la investigación y la consideramos como un primer acercamiento al trabajo sobre el conocimiento que ponen en juego los futuros profesores al reflexionar sobre sus prácticas de enseñanza de un objeto matemático en particular.

Agradecimientos

Este trabajo está vinculado a la Red MTSK de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

Referencias

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Meldrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N. ,Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Delgado-Rebolledo, R. y Espinoza-Vásquez, G. (2021). ¿Cómo se relacionan los subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas? En J. G. Moriel Junior (Ed.), *Actas del V Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 288–295). Congresseme.

Delgado-Rebolledo, R. y Zakaryan, D. (2022). The complex and integrated nature of a mathematics lecturer's specialized knowledge. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2102546

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle.

Karthagan, F. y Kessels, J. (1999). Linking Theory and Practice: Changing the pedagogy of teacher education. *Educational Research, 28*, 4-17. https://doi.org/10.2307/1176444

Moriel-Junior, J. G. y Carrillo, J. (2014). Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar matemática como modelo MTSK. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* (pp. 465–474). SEIEM.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Educational Review, 57*(1), 1–22.

Stake, R. (2007). *Investigación con estudios de casos.* (4ª ed.). Morata.

¿CÓMO ATIENDEN FUTURAS PROFESORAS AL PENSAMIENTO ALGEBRAICO DE NIÑAS? CONEXIONES ENTRE *NOTICING* Y MTSK

How Prospective Primary Teachers Attend to Children's Algebraic Thinking? Connections between Noticing and MTSK

Pinto, E.[a], Cortés, C.[b], Martínez-Videla, M.V.[a], Piñeiro, J.L.[c]

[a] Universidad de O'Higgins, Chile
[b] Grupo SM, Chile
[c] Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile

Temática: 5 –Extensiones del MTSK

Resumen.
En esta investigación describimos las maneras en que futuras profesoras (FM) se involucran con aspectos particulares del pensamiento algebraico de niñas en escolaridad primaria (6-12 años) para eso adoptamos las perspectivas teóricas del Noticing y del MTSK. En concreto, abordamos dos objetivos: (a) describir cómo FM de primaria atienden a las estrategias de niñas de 9-10 años al resolver sentencias numéricas; e (b) identificar qué conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) movilizan al atender a dichas estrategias. Las FM participaron de un Club de Video y describieron las estrategias exhibidas por tres niñas al resolver $6 + 4 = \square + 5$. Analizamos dichas descripciones considerando los elementos atendidos, el uso de la evidencia y los dominios/subdominios del MTSK. Los principales resultados dan cuenta de las variedades de atenciones y conocimientos movilizados al atender a las estrategias de las niñas y las maneras espontáneas en que emerge la interpretación.

Palabras clave. Profesores en formación, pensamiento algebraico, Noticing, MTSK.

Abstract.
In this study, we seek to describe the ways in which prospective primary teachers engage with particular aspects of algebraic thinking of primary school children (6-12 years old). Specifically, we describe, from the perspectives of Noticing and MTSK, how 21 prospective primary teachers attend to the strategies of three children in solving the number sentence $6 + 4 = \square + 5$ and what mathematical knowledge for teaching is mobilised. The prospective primary teachers watched a video presenting the children's strategies and described them. We analysed these descriptions considering the elements addressed, the use of evidence and the domains/subdomains of the MTSK. The main results show the varieties of attentions and knowledge mobilised when attending to the children's strategies that evidence different levels of sophistication of algebraic thinking.

Keywords. Algebraic thinking, prospective primary teachers, noticing, MTSK.

Pinto, E., Cortés, C., Martínez-Videla, M.V. y Piñeiro, J.L. (2023). ¿Cómo atienden futuras profesoras al pensamiento algebraico de niñas? Conexiones entre noticing y MTSK. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 272-279). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

En el contexto de la investigación en Educación Matemática, el conocimiento de la profesora[1] constituye un aspecto de creciente interés. Una de las preocupaciones que enfatizan algunas autoras es la necesidad de comprender las complejas interrelaciones entre los modelos desarrollados, con el objetivo de mejorar la calidad de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Badillo y Fernández, 2018; Charalambous et al., 2020). Particularmente, se resalta la necesidad de profundizar en las maneras en que las profesoras consideran el pensamiento matemático y los procesos de aprendizaje de sus estudiantes, con la finalidad de tomar decisiones usando su conocimiento profesional (da Ponte y Chapman, 2015).

Una forma de considerar el pensamiento matemático de estudiantes es a través del *Noticing* (Jacobs et al., 2010) y su propósito es comprender las características del pensamiento de las estudiantes, interpretarlo y tomar decisiones informadas, basadas en evidencias y considerando los propósitos de enseñanza. La literatura muestra diferentes formas de desarrollar el *Noticing* (como los Club de Video) y esta competencia profesional se vale, entre otros, de los conocimientos de la profesora para desplegarse con éxito (Badillo y Fernández, 2018). Por tanto, una manera de caracterizar con mayor profundidad el tipo de conocimientos matemáticos para la enseñanza que movilizan las profesoras cuando consideran el pensamiento matemático de niñas es usando el el Modelo de conocimiento Especializado del profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés) (Carrillo et al., 2018). El MTSK podría informar, a su vez, sobre el tipo de conocimiento necesario para desarrollar la competencia del *Noticing*. Estas perspectivas teóricas en conjunto permitirán profundizar en las maneras en que profesoras dan sentido al pensamiento matemático de estudiantes y conocer qué conocimientos movilizan al realizar estas acciones. Entendemos que esta perspectiva será de utilidad para las formadoras y para la mejora continua de los programas que forman docentes.

Concretamente, en este trabajo nos interesamos por abordar el pensamiento matemático de niñas a través del pensamiento algebraico. Este pensamiento favorece que las estudiantes exploren relaciones entre cantidades, modelicen, establezcan predicciones, generalicen, resuelvan problemas, justifiquen, se comuniquen y articulen sus ideas (Blanton et al., 2018). Si bien un número creciente de investigaciones ha abordado aspectos del pensamiento algebraico de estudiantes de 6-12 años, todavía falta describir con mayor profundidad la manera en que profesoras consideran las diferentes dimensiones del pensamiento algebraico de sus estudiantes (Kieran, 2022) con la finalidad de tomar decisiones con base en su conocimiento profesional.

A partir de los elementos expuestos, nuestro interés está puesto en describir las maneras en que futuras profesoras de educación primaria (FM) se involucran con aspectos particulares del pensamiento algebraico de niñas en escolaridad primaria (6-12 años). Específicamente, el objetivo de esta investigación es describir cómo FM atienden a las estrategias de niñas de 9-10 años al resolver sentencias numéricas y qué conocimientos matemáticos para la enseñanza se movilizan.

Perspectivas teóricas

El marco teórico que sustenta este trabajo se organiza en torno a tres elementos centrales: (a) el pensamiento algebraico; (b) *Noticing*; y (c) el MTSK.

Pensamiento algebraico

En esta investigación adoptamos el marco conceptual sobre pensamiento algebraico que propone

[1] En esta comunicación usamos de manera inclusiva términos como “las estudiantes”, “las investigadoras”, “las profesoras”, “las autoras” para aludir a hombres y mujeres.

Kaput (2008). Para el autor, “el corazón del pensamiento algebraico está compuesto de un proceso de simbolización complejo que tiene como propósito la generalización y el razonamiento con dichas generalizaciones” (p. 9). Con base en las ideas seminales del autor, Blanton et al., (2018) han identificado cuatro prácticas del pensamiento algebraico –generalizar; representar generalizaciones; justificar generalizaciones y razonar con generalizaciones– que deben estar presentes en la actividad algebraica, independientemente del enfoque al pensamiento algebraico considerado. En esta comunicación nos centramos en la aritmética generalizada como enfoque al pensamiento algebraico, la cual tiene como elemento central al signo igual. El signo igual puede ser abordado desde dos enfoques: (a) *operacional*, que involucra ver el signo igual e inmediatamente colocar un resultado; y (b) *relacional*, que se entiende como un enfoque flexible al cálculo en el cual las expresiones son transformadas usando las propiedades fundamentales (Molina, 2009). Jacobs et al. (2007) proponen tres aplicaciones específicas del pensamiento relacional: (a) ver al signo igual cómo indicador de relación; (b) usar relaciones numéricas para simplificar cálculos; y (c) hacer explícitas relaciones generales basadas en las propiedades fundamentales de los números.

Noticing

El *Noticing* es una competencia que permite sensibilizarse a sí mismo para percibir las posibilidades de acción y para informarse a sí mismo sobre los conocimientos logrados mediante su uso (Mason, 2021). A pesar de las diferentes conceptualizaciones del *Noticing* en el área de la educación matemática, en esta comunicación adoptamos la perspectiva del *Professional noticing of childrens’ mathematical thinking* (Jacobs et al., 2010). Esta perspectiva considera un conjunto de tres habilidades interrelacionadas: (a) atender a las estrategias de las estudiantes; (b) interpretar la comprensión de las estudiantes; y (c) decidir cómo responder basándose en la comprensión de las estudiantes (Jacobs et al., 2010).
MTSK

El modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)

El modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) considera dominios y subdominios que buscan profundizar en el conocimiento de la profesora de matemáticas, tanto en los elementos que lo componen como en sus interacciones. Dicho modelo está compuesto por dos grandes dominios: (a) el conocimiento del contenido (MK) y el conocimiento didáctico del contenido (PCK); y una dimensión relativa a las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza. Con respecto al primero, se presentan tres subdominios que se relacionan con tres formas de conocer el contenido matemático: (a) conocimiento de los temas (KoT); (b) conocimiento de la estructura matemática (KSM); y (c) conocimiento de la práctica matemática (KPM). Con respecto al dominio PCK, este se centra en qué debe ser enseñado y aprendido en un determinado momento y está compuesto por tres subdominios: (a) conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT); (b) conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM); y (c) conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).

Método

La investigación que presentamos es cualitativa y exploratoria. Específicamente, corresponde a una investigación de diseño que fue abordada con FM a través de un Club de Vídeo.

Participantes

Veintiún FM que cursaban el sexto semestre del grado de profesora de primaria en una universidad chilena participaron de esta investigación. Todas estaban matriculadas en la asignatura de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar. Todas las participantes habían cursado, antes, tres asignaturas referidas a la enseñanza y aprendizaje de diferentes sistemas numéricos (naturales y racionales).

Instrumentos de recolección de la información

La asignatura estuvo compuesta por ocho sesiones y en esta comunicación nos centramos en la segunda sesión de un Club de Video, destinada a la aritmética generalizada. Concretamente, en esta sesión presentamos un *clip* que exhibe las estrategias de tres niñas –David, Teo y Susana– al completar la sentencia numérica 6+4=☐+5. Usamos los nombres ficticios David, Teo y Susana para resguardar el anonimato de las niñas. En la respuesta de David se evidencian dos estrategias al resolver la sentencia: una *estrategia operacional* (puse diez, pero me di cuenta que era un error pues sumé 6 más 4") y *relacional-equivalencias* ("estábamos viendo que los números me dieran el mismo resultado, el 6 más el 4, y el 5 más 5"). En el caso de Teo evidenciamos la estrategia *relacional-equivalencias* ("porque 6 más 4 es 10, y dice es igual, entonces puse 5 más 5 es 10") y en el caso de Susana se evidencia la estrategia *relacional-simplificación de cálculos*, pues evidencia el uso de la compensación ("al seis le restas una y se la das al cuatro, entonces serían cinco más cinco"). El vídeo tuvo una duración de dos minutos y se sitúa al inicio de una clase que tenía por propósito fomentar una visión relacional (no computacional/operacional) de las expresiones aritméticas horizontales a través de propiedades aritméticas de la suma y la resta.

Las FM observaron, de manera individual, el vídeo dos veces consecutivas y además todas contaban con la transcripción del vídeo. Les pedimos a las FM que respondieran por escrito a la siguiente instrucción: "Describe en detalle qué hizo cada estudiante al responder a la actividad". Enfatizamos que las descripciones debían centrarse en lo que niñas hacen o dicen poniendo atención a su pensamiento algebraico.

Análisis

Analizamos las producciones escritas de las 21 FM a través de un análisis de contenido deductivo *(concept driven)* (Kuckartz, 2019) y establecimos tres categorías analíticas:

- *Elementos atendidos* (Blanton et al., 2018; Kaput, 2008; Jacobs et al., 2007, 2010), con la cual buscamos identificar a qué elementos atienden las FM con base en las estrategias de las niñas: (a) significado operacional del signo igual (David); (b) significado relacional del signo igual como indicador de una relación entre expresiones equivalentes (David y Teo); (c) significado relacional del signo igual que favorece establecer relaciones numéricas para simplificar cálculos (Susana); y (d) otros elementos;
- *Uso de evidencia* (Jacobs et al., 2010), con la cual buscamos identificar si las FM usan (o no) evidencias sobre lo que las niñas hacen o dicen para apoyar sus descripciones.
- *Dominios y subdominios de conocimiento del MTSK* (Carrillo et al., 2018), con la cual buscamos interpretar los conocimientos movilizados en las descripciones de las FM con alguno de los dominios/subdominios del MTSK.

Consideramos como unidad de análisis todas las respuestas escritas de las FM. Para garantizar la fiabilidad de las codificaciones, sometimos las codificaciones a un proceso de calibración entre las autoras que incluía sesiones conjuntas de codificación y discusión de los desacuerdos. Este proceso permitió evaluar la fiabilidad. El coeficiente de fiabilidad fue mayor que 91%, por sobre del mínimo aceptable.

Resultados

De manera general, las 21 FM atendieron a las estrategias de, al menos, una niña (David, Teo y/o Susana). En lo que sigue describimos cómo son dichas atenciones.

Las estrategias “operacional” y “relacional-expresiones equivalentes” de David

Trece FM atienden a las dos estrategias evidenciadas por David, mientras que cinco FM atendieron solo a la estrategia operacional, dos solo a la estrategia relacional-equivalencias y una no atendió a ninguna de las estrategias. Por ejemplo, en la Figura 1 presentamos la respuesta de A_{09}.

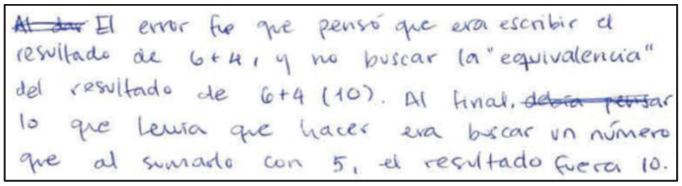

~~Al dar~~ El error fue que pensó que era escribir el resultado de 6+4, y no buscar la "equivalencia" del resultado de 6+4 (10). Al final, ~~debía pensar~~ lo que tenía que hacer era buscar un número que al sumado con 5, el resultado fuera 10.

Figura 1. Respuesta de A_{09} a la estrategia de David

En la respuesta anterior (ver Figura 1) es posible evidenciar cómo A09 atiende a la estrategia operacional (“pensó que era escribir el resultado de 6+4”) y relacional-equivalencias (“buscar un número que al sumarlo con 5, el resultado fuera 10”).

Todas las FM que atendieron, al menos, a una de las estrategias de David, proporcionaron evidencias que permiten complementar sus descripciones. Un hallazgo significativo es que en la mayoría encontramos interpretaciones, aun cuando solo pedíamos descripciones detalladas. Estas interpretaciones son sobre una de las estrategias de David, o bien, de ambas estrategias evidenciadas. Por ejemplo, en la Figura 1 es posible identificar que A09 razona y entrega significados a las estrategias de David (“y no buscar la equivalencia”, “lo que tenía que hacer era…”).

Respecto al conocimiento movilizado para atender a la estrategia de David, es posible evidenciar que la mayoría de las descripciones de las FM pueden ser asignadas a ambos dominios: MK y PCK. Específicamente, aquellos que sólo atendieron a la estrategia de David (cuatro FM) tienden a centrarse en el MK, específicamente proporcionan evidencias del KoT (centrados en los procedimientos). Por otra parte, todas las FM que interpretaron presentan evidencias del PCK, específicamente del KFLM y, en menor medida, sobre KMT. También hay evidencias en gran parte de las FM de KoT. Relativo a la evidencia del PCK, en la Figura 1 es posible evidenciar como A09 da evidencias de KFLM (“el error fue que pensó”, “y no buscar la equivalencia”) y KMT (“lo que tenía que hacer era buscar un número que sumado con 5, el resultado fuera 10”).

La estrategia “relacional-expresiones equivalentes” de Teo

Dieciocho FM atendieron a la estrategia relacional de Teo, mientras que tres no atendieron a esta. Por ejemplo, en la Figura 2 se presenta la respuesta de A08, en la cual atiende a la manera en que Teo relaciona las expresiones a ambos lados del signo igual.

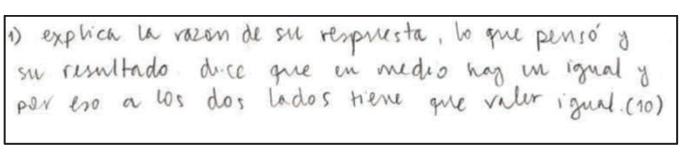
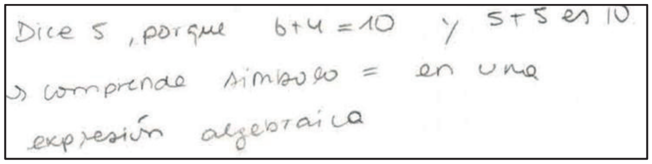

1) explica la razon de su respuesta, lo que pensó y su resultado. dice que en medio hay un igual y por eso a los dos lados tiene que valer igual. (10)

Figura 2. Respuesta de A_{08} a la estrategia de Teo

La mitad de las FM proporciona evidencias a sus descripciones, tal como lo hace A08 con la expresión “dice que…” (ver Figura 2). Por otra parte, dos tercios de estas FM realizan interpretaciones sobre el razonamiento de Teo. Por ejemplo, A03 interpreta la estrategia del niño con expresiones tales como “comprende”. En la Figura 3 se observa esta respuesta.



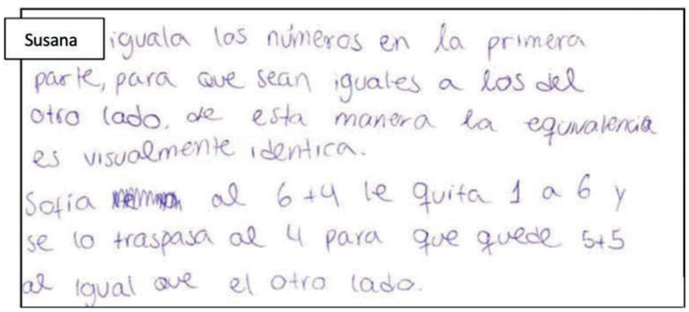
Dice 5, porque 6+4=10 y 5+5 es 10
↳ comprende símbolo = en una expresión algebraica

Figura 3. Respuesta de A_{03} a la estrategia de Teo

Respecto a qué conocimientos se movilizan en las atenciones a la estrategia de Teo, encontramos que las descripciones de 12 FM pueden ser asignadas a los dominios MK y PCK. Más concretamente, aquellas FM que sólo atendieron a la estrategia de Teo (no interpretaron) dan evidencias, principalmente, de KoT. En relación a las FM que interpretan, todas dan evidencias de KFLM y, en mucha menor medida, evidencias de KoT. Por ejemplo, en la respuesta de A_{03}, quien interpretó, es posible identificar cómo se dan evidencias sobre las formas en que Teo interactúa con la sentencia numérica (KFLM) al indicar que "comprende símbolo = en una expresión algebraica" y proporciona evidencias sobre la característica de la tarea (KMT) "porque 6+4=10 y 5+5 es 10".

La estrategia "relacional-simplificación de cálculos" de Susana

En el caso de la estrategia de Susana, 16 FM atienden a la estrategia relacional evidenciada por la niña, mientras que cinco no atendieron a esta. En la Figura 4 presentamos la respuesta de A18, quien atiende a las maneras en que la niña simplifica los cálculos ("Susana al 6+4 le quita 1 a 6 y se lo traspasa al 4 para que quede 5+5, al igual que al otro lado").



Susana iguala los números en la primera parte, para que sean iguales a los del otro lado, de esta manera la equivalencia es visualmente identica.
Sofía al 6+4 le quita 1 a 6 y se lo traspasa al 4 para que quede 5+5 al igual que el otro lado.

Figura 4. Respuesta de A_{18} a la estrategia de Susana

Todas las FM que atendieron a la estrategia de Susana proporcionan evidencias que apoyan sus descripciones, tal como lo realiza A18 (ver Figura 4). Otro hallazgo importante, y al igual que en las atenciones a las estrategias de David y Teo, hay FM que realizan interpretaciones. Específicamente, la mitad de estas FM interpretan con base en la estrategia de Susana. Por ejemplo, la respuesta de A18 da cuenta de esto al señalar "Susana iguala los números en la primera parte…".

En relación a los conocimientos movilizados en las atenciones a esta estrategia, nueve FM dan evidencias de ambos dominios del MTSK. Particularmente, aquellas FM que sólo atendieron, la mitad proporciona evidencias de KoT al describir los procedimientos empleados y se evidencian algunos ejemplos de KPM (justificar ideas matemáticas). Por otra parte, todas las FM que interpretaron movilizaron un conocimiento que se puede asignar al KFLM y casi todos al KoT.

Discusión y conclusiones

En esta comunicación nos interesamos por describir las maneras en que las FM atienden a las estrategias de niñas de 9-10 años al resolver sentencias numéricas. Para abordar este objetivo, nos apoyamos en el marco del *Noticing* (Jacobs et al., 2010) y en el MTSK (Carrillo et al., 2018), los que nos han permitido ilustrar, desde diferentes perspectivas, cómo son las atenciones de FM en el contexto del análisis de un vídeo y qué conocimientos matemáticos para la enseñanza movilizan. En el caso del *Noticing*, este modelo nos permite identificar cómo las FM atienden a las estrategias de las niñas (variedad de elementos atendidos y el uso de la evidencia). Por otra parte, el MTSK nos permite dar una mirada más profunda al *Noticing*, relevando los conocimientos matemáticos para la enseñanza movilizados. Este hecho es relevante en el contexto de esta investigación pues no existe consenso sobre cómo entender el pensamiento algebraico y esas diferencias tienen implicaciones para la enseñanza del álgebra en los primeros cursos (Kaput, 2008; Kieran, 2022)

Desarrollar el pensamiento algebraico en estudiantes supone prestar la atención a las relaciones que estos construyen, más que a procedimientos matemáticos aislados y mecánicos. Las estrategias evidenciadas por las tres niñas dan cuenta de diferentes niveles de sofisticación sobre el pensamiento relacional, aspecto central de la aritmética generalizada como enfoque al pensamiento algebraico. Quisiéramos destacar, dada la extensión de esta comunicación, dos ideas centrales. En primer lugar, y considerando que las estrategias de las niñas muestran diferentes grados de sofisticación, mientras más compleja es la estrategia evidenciada por una niña, más se atiende a otros aspectos. Por ejemplo, las estrategias de David y Teo son atendidas por casi la totalidad de FM, mientras que la estrategia más compleja (la de Susana), 16 FM atienden a esta. En segundo lugar, y respecto a los dominios y subdominios del MTSK, quienes solo atienden suelen movilizar MK, específicamente el KoT a través de los procedimientos, lo que podría explicarse dada la demanda de la tarea matemática analizada. En cambio, quienes interpretan tienden a movilizar el KFLM y, en menor medida, el KMT.

Un elemento importante es que, si bien las FM debían describir de manera detallada las estrategias de las niñas, es difícil separar la descripción de la interpretación, tal como lo señalan diferentes autoras (Badillo y Fernández, 2018; Jacobs et al., 2010; Llinares, 2019). Los ejemplos de interpretación que emergen de las respuestas de las FM podrían ser consideradas como espontáneas, puesto que no pedimos realizar este tipo de razonamiento. Convendría profundizar en cómo serían las interpretaciones cuando sean solicitadas explícitamente, luego de haber abordado con FM aspectos provenientes de la investigación en pensamiento algebraico.

En relación a las limitaciones del estudio, consideramos que convendría adoptar una mirada más holística sobre cómo se relacionan las tres destrezas del *Noticing* (atender, interpretar y decidir) con los dominios y subdominios del MTSK, más allá de solo abordar la atención. Lo anterior constituye otra línea de trabajo a futuro.

Agradecimientos

Proyecto FONDECYT Iniciación 11220843.

Referencias

Badillo, E. y Fernández, C. (2018). Oportunidades que emergen de la relación entre perspectivas: Análisis del conocimiento y/o competencia docente. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, A. P., J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 66-80). SEIEM.

Blanton, M.L., Brizuela, B.M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A.M., Stroud, R., Fonger, N.L. y Stylianou, D. (2018). *Implementing a Framework for Early Algebra*. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to-12-Year-Olds* (pp. 27-49). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Meldrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N. ,Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Charalambous, C.Y., Hill, H.C., Chin, M.J. y McGinn, D. (2020). Mathematical content knowledge and knowledge for teaching: exploring their distinguishability and contribution to student learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 23*, 579-613. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09443-2

da Ponte, J. P. y Chapman, O. (2015). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. En L.D. Enlgish y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 275-298). Routledge.

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L. y Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 258-288. https://www.jstor.org/stable/30034868

Jacobs, V. R., Lamb, L. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41(2)*, 169-202. https://www.jstor.org/stable/20720130

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is the algebraic reasoning? En J. Kaput, D.W. Carraher y M.L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM - Mathematics Education, 54*(6), 1131-1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Kuckartz, U. (2019). Qualitative text analysis: A systematic approach. En G. Kaiser y N. Presmeg (Eds.), *Compendium for early career researchers in Mathematics Education* (pp. 181-198). Springer.

Llinares, S. (2019). Enseñar matemáticas como una profesión. Características de las competencias docentes. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 14*(18), 30-43.

Mason, J. (2021). Learning about noticing, by, and through, noticing. *ZDM - Mathematics Education, 53*, 231-243. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01192-4

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156. http://hdl.handle.net/10481/3475

COMPRENSIÓN DE LA PRÁCTICA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: AVANCES EN LA RELACIÓN ENTRE SU CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO Y EL TRABAJO MATEMÁTICO

Understanding mathematics teacher's practice: advances in the relationship between specialized knowledge and mathematical work

Espinoza-Vásquez, G. [a], Henríquez-Rivas, C. [b] , Verdugo-Hernández, P.[c]

[a] Universidad Alberto Hurtado, Chile
[b] Universidad Católica del Maule, Chile
[c] Universidad de Talca, Chile

Temática: 5 –Extensiones del MTSK

Resumen.
El presente trabajo aborda la comprensión de la práctica docente a partir del trabajo matemático que propone y del conocimiento especializado que moviliza para ello. Se estudian dos profesores de matemática, uno de secundaria que enseña la función y otro universitario, que enseña las sucesiones. Desde un enfoque interpretativo, y usando las relaciones entre los modelos ETM y MTSK, se obtiene que el diseño del espacio de trabajo matemático para la enseñanza está vinculado al uso del conocimiento especializado que posee el profesor. A partir de esto, se concluye que las relaciones entre los modelos permiten nuevas interpretaciones de la práctica docente y avanzar en su comprensión.

Palabras clave. Conocimiento especializado, Espacio de trabajo matemático, Conexión entre teorías, Práctica docente.

Abstract.
The present work deals with the understanding of the teacher's practice from the mathematical work that is proposed and the specialized knowledge that it mobilizes for it. Two mathematics teachers are studied, one from high school who teaches the function and the other from the university who teaches real sequences. From an interpretive approach and using the relationships between the ETM and MTSK models, it is obtained that the design of the mathematical workspace for teaching is linked to the use of specialized knowledge that the teacher possesses. From this, it is concluded that the relationships between the models allow new interpretations of the teaching practice and advance in its understanding.

Keywords. Specialised knowledge, Mathematical working space, Networking theories, teacher's practice.

Espinoza-Vásquez, G., Henríquez-Rivas, C. y Verdugo-Hernández, P. (2023) Comprensión de la práctica del profesor de matemáticas: avances en la relación entre su conocimiento especializado y el trabajo matemático. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 280-287). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

El foco en el conocimiento especializado del profesor desde la perspectiva de Carrillo et al. (2018) tiene ya diez años de desarrollo y se sigue proyectando como un tema fructífero en líneas que profundizan sobre el modelo, que buscan nuevos horizontes de desarrollo (en el formador de profesores u otras disciplinas con el “XTSK”) o que lo relaciona con otros enfoques teóricos por ejemplo, Espinoza-Vásquez et al. (2022) con el ETM y Rojas (2014) con el Análisis Didáctico.

En este reporte tomamos como punto de partida esta posibilidad que brinda el modelo para expandirlo a otras áreas o relacionarlo con otras perspectivas, por ejemplo, aquella que permita el estudio de la actividad matemática que promueve el profesor en su enseñanza, en torno a la resolución de tareas matemáticas, como es el modelo de los Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak et al., 2016). En esta línea surgen varios reportes que pretenden aumentar la comprensión de la práctica del profesor. Inicialmente, el diálogo entre ETM y MTSK proponía conexiones generales, que mostraban cómo los diferentes espacios de trabajo matemático (de los estudiantes, el propio del profesor y aquello que el profesor diseñaba para la clase) interactúan con los conocimientos que categoriza el modelo MTSK (Flores Medrano et al., 2016; Vasco et al., 2016). Posteriormente, se precisan relaciones entre componentes de los modelos y se destacan los beneficios de interpretar los conocimientos del profesor como movilizadores de un tipo de trabajo matemático.

El análisis en conjunto con ambos modelos mantiene el foco sobre el quehacer docente, preocupándose por cómo se propone la enseñanza en términos de las tareas matemáticas que propone el profesor. Mientras algunos trabajos indagan en nuevas relaciones (Verdugo-Hernández et al., 2022), otros identifican elementos que permiten la articulación y diálogo entre los modelos (Espinoza-Vásquez et al., 2022). En este progreso se destaca la interpretación que se hace sobre el uso del conocimiento especializado para promover el trabajo matemático y el planteamiento de tareas, los ejemplos, las definiciones y demostraciones como situaciones que permiten el análisis en conjunto.

Teniendo como base estos avances en la relación ETM-MTSK, este trabajo aborda el estudio del conocimiento que el profesor moviliza en su práctica respecto del trabajo matemático que propone. Para ello, nos planteamos la pregunta: ¿Cómo el diálogo entre ETM y MTSK nos ha ayudado a comprender mejor la práctica del profesor de matemática?

Marco de referencia

En este escrito se toma como referencia el modelo del Espacio de Trabajo Matemático (ETM, Figura 1) (Kuzniak et al., 2016), el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) (Carrillo et al., 2018) y las relaciones entre ellos, para actualizar y ampliar el conocimiento sobre la práctica del profesor como parte de su quehacer profesional (Espinoza-Vásquez et al., 2022), respetando la naturaleza genuina de ambos modelos.

Por una parte, el modelo del MTSK permite el estudio del conocimiento del profesor, en su labor docente, centrándose en la comprensión de las nociones matemáticas como objetos de enseñanza y aprendizaje. Por su lado, el modelo ETM permite estudiar el quehacer matemático a partir de tareas (Kuzniak et al., 2016). Ambos modelos han constatado distintos puntos de encuentro, entre ellos, la consideración de la Matemática como elemento central (Carrillo et al., 2018; Kuzniak *et al*., 2016), la noción de tarea matemática y tareas específicas (e.g. Henríquez Rivas et al., 2021, 2022) y el propio trabajo matemático del profesor (e.g. Verdugo-Hernández et al., 2022).

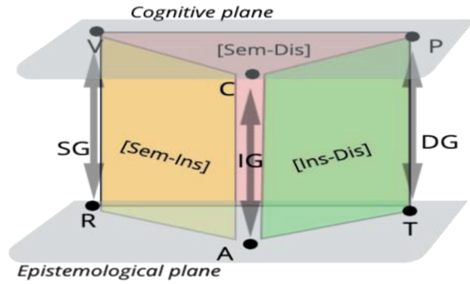


Figura 1: Modelo del ETM. Fuente: Inspirado en Kuzniak et al. (2016). Nota: En la figura V:visualización, C: Construcción; P: Prueba; R: Representamen; A: Artefactos; T: Referencial.

Mientras el ETM contempla dos dimensiones principales: una *epistemológica*, que se centra en los objetos matemáticos del dominio estudiado, y otra *cognitiva*, que presta atención a la actividad cognitiva del individuo al desarrollar o utilizar contenidos matemáticos (Kuzniak et al*.,* 2016), el MTSK contempla dos dominios de conocimiento inspirados en la propuesta de Shulman (1986): el Conocimiento Matemático (con siglas en inglés MK) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (con siglas en inglés PCK).

En el plano epistemológico del ETM se encuentran tres componentes; el representamen, referido a la representación del objeto matemático; el artefacto, que engloba los materiales o símbolos utilizados; y el referencial, basado en definiciones y propiedades. Cada una de estas componentes considera, respectivamente, los siguientes tipos de herramientas: semiótica, tecnológica y teórica (Kuzniak *et al.,* 2016). Adicionalmente, Verdugo-Hernández (2018) incorpora la herramienta operacional, como aquella que emerge de un referencial diferente al que propone una tarea determinada. A su vez, el MK en el MTSK, se divide en tres subdominios: Conocimientos de los temas (KoT), Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM) y Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM).

Las componentes del plano epistemológico y el MK, se vinculan naturalmente en el referencial del ETM y KoT, por tratarse de temas relacionados con definiciones, propiedades y sus fundamentos, presentes en ambos modelos. Esta relación ha sido evidenciada por Espinoza-Vásquez et al (2022) y Verdugo-Hernández et al. (2022). Asimismo, la herramienta operacional del ETM se muestra vinculada a los conocimientos KPM y KSM (Verdugo-Hernández et al., 2022).

Por otro lado, el plano cognitivo del ETM contempla: la visualización (figuras, gráficos, etc.); construcción (compás, software, fórmulas, etc.); prueba (razonamiento discursivo). Mientras que el PCK contempla: el Conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM), el conocimiento de la enseñanza KMT y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de la matemática (KMLS). En Espinoza-Vásquez et al*.* (2022) se ejemplifica la incidencia de estos conocimientos en la organización del ETM que diseña el profesor para la enseñanza, llamado ETM *idóneo* (Henríquez-Rivas et al., 2022), el cual organiza, bajo de criterios matemáticos, los temas que involucra una tarea matemática para lograr el abordaje y compromiso del resolutor (generalmente un estudiante) con ella.

La articulación entre los planos (epistemológico y cognitivo) del ETM, se reflejan mediante tres génesis: la génesis semiótica, basada en los registros de representación semióticos; la génesis instrumental, que permite operativizar los artefactos en el proceso constructivo; y génesis discursiva, que permite razonar matemáticamente sobre la base de definiciones y propiedades. Por su parte, el conocimiento desde el MTSK se comprende como un todo integrado, relacionado y articulado, contemplando los aspectos epistemológicos de los objetos matemáticos y su adaptación al contexto educativo (Carrillo et al*.,* 2018). Entender ambos modelos, EMT y MTSK, implica observarlos de manera holística para dar significado al trabajo matemático y al conocimiento especializado que se moviliza. Adicionalmente, la interacción de dos génesis en el ETM genera los planos verticales (figura 1), los cuales muestran la ruta entre las distintas componentes que caracterizan el trabajo matemático (Kuzniak et al., 2016), a saber; plano semiótico-instrumental [Sem-Ins]; instrumental-discursivo [Ins-Dis], semiótico-discursivo [Sem-Dis].

Metodología

Con el objetivo de analizar el diálogo entre los modelos ETM y MTSK en la práctica del profesor de matemática, el presente estudio se centra en las relaciones entre las conexiones inter-conceptuales en temas específicos. Se utiliza un enfoque cualitativo con un diseño de caso múltiple de tipo integrado (Yin, 2009), donde se estudian dos casos: un profesor de secundaria que enseña funciones (identificado como P1) y un profesor universitario que enseña las sucesiones en un curso de cálculo (identificado como P2). Ambos casos se estudian mediante modelos ETM y MTSK, sirviendo sus componentes como herramientas de análisis, siguiendo las estrategias de análisis expuestas en Espinoza-Vásquez y Verdugo-Hernández (2022) y Verdugo-Hernández et al. (2022), lo que ha permitido explorar las conexiones entre los modelos y profundizar en la complementariedad.

El estudio de caso es apropiado para esta investigación pues los casos se desarrollan en contextos reales, naturales y particulares (Yin, 2009). Además, el objetivo apunta a su análisis teórico en profundidad. Del mismo modo, este diseño (caso múltiple e integrado) se justifica por la diversidad de fenómenos y contextos escolares que se atienden.

Los participantes se seleccionaron según su perfil (formación académica y profesional), su compromiso con la docencia y la investigación y el fácil acceso (Creswell, 2014). Además, el análisis preliminar da cuenta de evidencias sobre su conocimiento especializado y en la aplicación del ETM en sus respectivos contextos. La participación de los profesores ha sido voluntaria. P1, es profesor de matemáticas de secundaria, con grado de Magíster en Matemática y experiencia en la enseñanza de las funciones en nivel escolar y universitario. P2, profesor universitario con grado de Doctor en Matemáticas y experiencia en la enseñanza superior de cálculo integral, el cual contempla las sucesiones. La recolección de datos se realizó en ambientes adecuados para la comunicación y el anonimato de cada participante.

Contexto de desarrollo de cada caso

El contexto de desarrollo de P1 considera sesiones de clases en un curso de primer año de enseñanza media chilena (14-15 años). Se realizó la observación (no participante) de nueve sesiones de clases, cada una de 90 minutos, destinadas a la enseñanza de la función. Para este reporte, se seleccionó la primera clase, en la cual P1 enseña distintas representaciones de una función. En el caso de P2, se analizó la ejecución experta de una tarea matemática relacionada con sucesiones y su convergencia, la cual formaba parte de la evaluación del curso. P2 facilitó el material diseñado para el curso: guías de ejercicios, ejercicios resueltos, instrumentos de evaluación elaborados por él. Para los análisis presentados, se seleccionó la primera parte de una pregunta de la prueba sobre sucesiones y su desarrollo, cuyo objetivo era concluir sobre la convergencia de una sucesión.

Recolección y análisis de datos

Los datos provienen de dos investigaciones desarrolladas por autores de este escrito. En el caso de P1, la fuente de datos es la videograbación de las clases, su transcripción y fotografías de la pizarra. En el caso de P2, la fuente de datos es la tarea y el desarrollo experto realizado por P2. Para analizar a cada informante, se utilizó el análisis del contenido (Bardín, 1996), sustentado en elementos teóricos de ambos modelos.

Como protocolo de análisis se utilizaron los componentes de cada modelo y sus definiciones que funcionaron como criterio de identificación. La información obtenida permitió reconocer las conexiones entre diferentes conocimientos que se producen en cada caso. Junto a esto, se reconocen las génesis y/o planos verticales activados en el trabajo matemático. Este protocolo puede encontrarse en el trabajo

La validación de los hallazgos consideró la triangulación de investigadores (Arias, 2000). El análisis se realizó por tres investigadores (autores de este reporte), cada uno de ellos especialistas en alguno de los dos marcos y experiencia en la conexión entre ambos. Este reporte se realizó una vez logrado el consenso sobre los hallazgos.

Resultados

Caso 1: Enseñanza de las funciones (P1)

Este análisis se enfoca en el estudio de las representaciones de la función (Espinoza-Vásquez y Verdugo-Hernández, 2022). P1 inicia la primera sesión de clase definiendo la función como una correspondencia entre elementos de dos conjuntos y fomentando los aspectos formales del lenguaje matemático.

> P1: Yo la voy a escribir en lenguaje matemático. La definición de función por comprensión. [mientras escribe los símbolos dice] para todo elemento del conjunto A, o sea, a cada elemento del conjunto A, va a existir un único elemento en B, tal que f(x) sea y. (Espinoza-Vásquez y Verdugo-Hernández, 2022, p.8)

A partir de esta definición, P1 desarrolla las diferentes formas en que puede representar la función. La sesión avanza en torno a cómo cada representación se articula con la siguiente. P1 completa la pizarra con las representaciones que quiere enseñar, lo que se puede ver en la Figura 2.

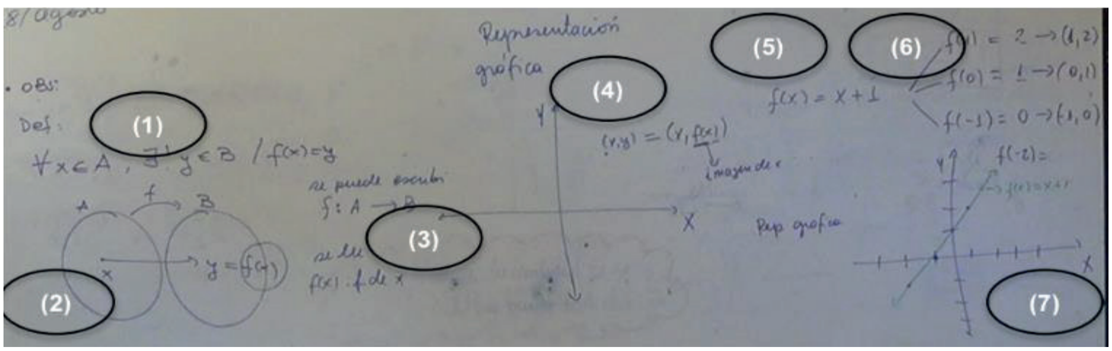


Figura 2. Coordinación de representaciones de la función. Fuente: Espinoza, 2020, p.268.

La numeración incluida corresponde al tránsito entre las representaciones. En la figura 2 se observa cómo P1 activa la génesis semiótica en el ETM idóneo, partiendo desde el polo referencial (definición de función). El lenguaje formal (1) es el punto de partida y se articula con el diagrama sagital (2) mediante la noción de correspondencia. El paso de (1) a (2) hace emerger los conceptos de imagen, preimagen y la notación algebraica para la función (3), que utilizará en la representación gráfica (4). El KoT sobre función, así como el KMT en términos de la organización de las representaciones da forma a su estrategia de enseñanza.

La noción de correspondencia también permite a P1 relacionar los ejes cartesianos con los conjuntos de partida y llegada. El trabajo matemático usa estos conceptos y se orienta hacia lo gráfico, sustentando su estrategia de enseñanza y el diseño del ETM idóneo. De esta forma, el plano cartesiano cobra el rol de herramienta semiótica para representar la función (4) y explica la relación entre x e y en el par ordenado $(x,f(x))$, también conocido por sus estudiantes.

P1 utiliza una función afín (5) para ejemplificar cómo representar gráficamente la función, articulando lo algebraico con una representación numérica de la función (6). En la perspectiva del ETM, esto se relaciona con tratamientos desde la génesis semiótica. En particular, el cambio de (5) a (6) se caracteriza por el uso del conocimiento sobre la evaluación de la expresión algebraica como una herramienta operacional, que no es propia de las funciones. P1 espera que sus estudiantes desarrollen, a nivel procedimental, la construcción de la representación gráfica de la función mediante dicho procedimiento, coordinando los registros algebraico, numérico y gráfico (en 5, 6 y 7), lo que se observa en el siguiente extracto que P1.

> P1: [...] Me quedó una recta. A las funciones les podemos dar una representación gráfica y ¿cómo se hace esa representación gráfica? Es elegir elementos, números cualquiera. Dadas las funciones que vamos a trabajar, no vamos a tener problema con poder elegir cualquier número, meterlos a la función y obtener su imagen. Si tenemos su imagen, podemos obtener puntos, y esos puntos los meto al plano cartesiano. (Espinoza-Vásquez y Verdugo-Hernández, 2022, p.8)

El conocimiento de la relación entre función y recta evidencia una conexión (en su KSM) dada por la propia representación como una línea que ambos conceptos comparten. En la perspectiva del ETM, la recta se vincula con el representamen en el plano epistemológico.

Caso 2: Enseñanza de las sucesiones (P2)

El caso de P2, presentado en Verdugo-Hernández *et al.* (2022), estudia la tarea y su resolución que se presenta en la figura 3, con foco en las conexiones inter conceptuales.

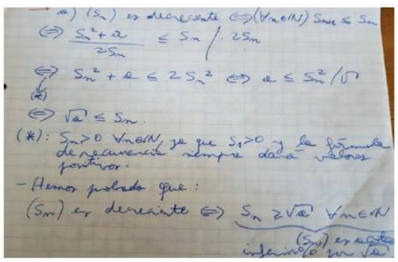
PREGUNTA: Para $a > 0$ y $s_1 > 0$ se define la suceción (s_n) mediante la recurrencia:

$$s_{n+1} = \frac{{s_n}^2 + a}{2s_n} \forall\, n > 1$$

a) Demuestre que la sucesión (s_n) es decreciente $\Leftrightarrow$ (s_n) es acotada inferiormente por $\sqrt{a}$.

Figura 3. Propuesta de tarea por parte de P2. Fuente: Verdugo-Hernández et al., 2022, p.135.

La tarea involucra aspectos semióticos de las sucesiones, la relación de orden en los números reales y solicita la demostración de una propiedad de la sucesión propuesta. Por su parte, el desarrollo que propone P2 permite evidenciar algunos conocimientos desde la perspectiva del MTSK, así como lo que espera que realicen sus estudiantes en términos del ETM idóneo. La figura 4 contiene este desarrollo propuesto por P2.



(1.a)	a) (s_n) es decreciente $\Leftrightarrow$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ $s_{n+1} \leq s_n$
(2.a)	$\Leftrightarrow \frac{{s_n}^2+a}{2s_n} \leq s_n / 2s_n$
(3.a)	$\Leftrightarrow {s_n}^2 + a \leq 2{s_n}^2 \Leftrightarrow a \leq 2{s_n}^2 /\sqrt{}$
(4.a)	(*)
(5.a)	$\Leftrightarrow \sqrt{a} \leq s_n$
(6.a)	(*):$s_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, ya que $s_1 > 0$ y la fórmula de recurrencia siempre dará valores positivos.
(7.a)	- Hemos probado que:
(8.a)	(s_n) es decreciente $\Leftrightarrow$ $\underbrace{s_n \geq \sqrt{a}\ \forall n \in \mathbb{N}}_{s_n \text{ es acotado inferiormente por } \sqrt{a}}$

Figura 4. Desarrollo de la tarea. Fuente: Verdugo-Hernández et al., 2022, p. 136.

En la figura 4 se observa el conocimiento de P2 sobre desigualdades, el orden en los números reales (líneas 2.a - 5.a) y la función raíz cuadrada como operador en la resolución de inecuaciones (3.a), todo como parte de su KoT sobre números reales. Respecto de las sucesiones (KoT-sucesiones), se observa que P2 conoce el significado de la propiedad de decrecimiento (1.a) y, a partir de este significado, P2 recurre a su KoT sobre números reales como herramienta operacional para estructurar la demostración. Con ello, el ETM idóneo busca activar la génesis discursiva, desde la componente referencial de sucesiones, ayudado del referencial de números reales.

El trabajo de P2 evidencia conocimiento en su KPM respecto del rol de la equivalencia, el uso del cuantificador universal y la estructura de la demostración. Este conocimiento organiza la forma en que utiliza su KoT (notaciones, procedimientos y definición) para realizar la demostración. Asimismo, se observa el uso de la inducción como estructura general de la demostración, lo que se interpreta como conocimiento sobre una forma de demostrar propiedades que impliquen generalizaciones con números naturales (KPM). Aquí, la inducción cobra el rol de herramienta operacional en esta tarea, pues presta ayuda en la demostración y, al tratarse de un tema diferente al de sucesiones, se interpreta como conocimiento de una conexión auxiliar entre sucesiones e inducción.

El trabajo matemático propuesto en el ETM idóneo privilegia lo discursivo y semiótico. Este espacio se estructura mediante el uso que da a los conocimientos del KoT, KPM y KSM, dejando ver qué es lo que espera que logren sus estudiantes con esta tarea: demostrar el crecimiento y acotamiento de una sucesión, lo que se asocia a su KMLS.

Discusión y conclusiones

Un resultado común en ambos casos es que el conocimiento especializado del profesor incide en el diseño del ETM idóneo. De acuerdo con Espinoza-Vásquez et al. (2018), las categorías del MTSK permiten particularizar los conocimientos que intervienen en este diseño, especialmente el KoT, KPM y KMT. En los casos expuestos se observa que el uso del conocimiento permite estructurar e implementar el ETM idóneo.

Estas relaciones, también sintetizadas en Espinoza-Vásquez et al. (2022), Espinoza-Vásquez y Verdugo-Hernández (2022) y Verdugo-Hernández et al. (2022), posibilitan analizar la práctica del profesor a la luz de su conocimiento y del trabajo que promueve. El diálogo entre los modelos aporta complementariedad en los análisis y una doble mirada sobre la enseñanza que, a su vez, define una línea de estudio sobre indagar en la propuesta o resolución de tareas, es decir, la implementación del diseño de un ETM idóneo en el aula, lo cual podría ser analizado desde la dualidad en el ETM idóneo potencial y actual (Henríquez Rivas et al., 2022). En particular, las herramientas operacionales, semióticas y teóricas relacionadas con diferentes conocimientos, contribuyen a la comprensión sobre cómo el profesor utiliza su conocimiento especializado. Del mismo modo, las categorías del MTSK permiten reconocer a qué tipo de conocimiento corresponden tales herramientas. La profundización en estas relaciones permite caracterizar el trabajo matemático que fomenta el profesor.

Planteamos el aporte de este trabajo, realizado en la línea de Networking Theories (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2014), en términos de los aspectos metodológicos que se han diseñados, adaptados e implementados a partir de otras investigaciones (Espinoza-Vásquez y Verdugo-Hernández, 2022; Verdugo-Hernández et al., 2022), pues los métodos, procedimientos, grillas y análisis usados pueden servir como guía o insumo en nuevas investigaciones, en la línea de la conexión entre teorías, que persigan la comprensión del quehacer docente en matemáticas.

Finalmente, en línea con lo anterior, se destaca la perspectiva más completa y las nuevas interpretaciones sobre la práctica del profesor que se logra a través del refinamiento en el análisis producto del uso conjunto de ambos modelos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado en el marco de los proyectos de la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile (ANID), FONDECYT DE INICIACIÓN 11230240; 11231088; 11230523.

Referencias

Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (2014). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education.* Springer.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Creswell, J. W. (2014). Research design: qualitative, quantitative and mixed methods approaches. Sage.

Espinoza-Vásquez, G., Ribeiro, M. y Zakaryan, D. (2018). Avance en la comprensión de las relaciones entre el ETM idóneo y el MTSK del profesor. *Journal of Educational Research, MENON, 4*, 146- 161.

Espinoza-Vásquez, G., Verdugo-Hernández, P., Henríquez-Rivas C. y Ponce, R. (2022). Avances en la relación entre MTSK y espacios de trabajo matemático. En J. Carrillo, M. A. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 265-276). Dykinson.

Espinoza-Vásquez, G. y Verdugo-Hernández, P. (2022). Las representaciones de la función durante la enseñanza. Una mirada desde el conocimiento especializado y el trabajo matemático del profesor. *HUMAN Review, 13*(6), 2-18.

Flores-Medrano, E., Montes, M. A., Carrillo, J., Contreras, L.C., Muñoz-Catalán, M. C., y Liñán, M. M. (2016). El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema, 30*(54), 204- 221. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a10

Henríquez-Rivas, C., Ponce, R., Carrillo-Yañez, J., Climent, N. y Espinoza-Vásquez, G. (2021). Trabajo matemático de un profesor basado en tareas y ejemplos propuestos para la enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(2), 123-142.

Henríquez-Rivas, C., Kuzniak, A. y Masselin, B. (2022). The idoine or suitable MWS as an essential transition stage between personal and reference mathematical work. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, y P. Richard (Eds.), *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 121-146). Springer.

Kuzniak, A., Nechache, A. y Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM-Mathematics Education, 48*, 861-874.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor: un estudio de casos* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. https://core.ac.uk/download/pdf/33252941.pdf

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Vasco-Mora, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M.A. y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento especializado de un profesor de álgebra lineal y espacios de trabajo matemático. *Bolema, 30*(54), 222-239. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a11

Verdugo-Hernández, P., Espinoza-Vásquez, G. y Carrillo Yáñez, J. (2022). Análisis de una tarea sobre sucesiones desde el uso de las herramientas y el conocimiento matemático del profesor. *Enseñanza de las Ciencias, 40*(2), 125-145.

Verdugo-Hernández, P. (2018). *Espacio de Trabajo Matemático del análisis: enseñanza de las sucesiones en los primeros años de universidad* [Tesis doctoral, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso]. http://repositorio.ucv.cl/handle/10.4151/65292

Yin, R. K. (2009). *Case study research. Design and methods* (4.ª ed.). SAGE Publications INC.

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE ELECTRICIDAD

Specialized knowledge of the electricity teacher

Vidal-Araya,L.[a], Quiroga-Merino, F.[a]

[a] Universidad de Concepción, Chile

Temática: 5 –Extensiones del MTSK

Resumen.
A través de un estudio de caso instrumental, se toma como referencia el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) para elaborar una investigación exploratoria que busca ser una aproximación inicial al proceso de caracterización del conocimiento especializado del profesor(a) que enseña electricidad a estudiantes de Educación Media Técnico Profesional, en el contexto de la formación de profesionales técnicos de nivel medio en Chile. Se administra una entrevista semiestructurada y se reconocen algunos elementos que podrían permitir describir, con la ayuda de nuevas investigaciones, características del conocimiento especializado que moviliza el profesor(a) al enseñar electricidad. En definitiva, determinar ideas iniciales que permitan proyectar un posible conocimiento especializado del profesor de electricidad.

Palabras clave. Educación técnico profesional, Competencias técnico-profesionales, MTSK, Conocimiento especializado para enseñar electricidad.

Abstract.
Through an instrumental case study, the model of Mathematics Teacher Specialized Knowledge (MTSK) is taken as a reference to elaborate exploratory an research that seeks to be an initial approximation to the process of characterization of the specialized knowledge of the teacher who teaches electricity to students of Secondary Technical and Vocational Education, in the context of the training of middle-level technical professionals in Chile. A semi-structured interview is administered, and some elements are recognized that could allow to describe, with the help of new research, characteristics of the specialized knowledge that the teacher mobilizes when teaching electricity. In short, to determine initial ideas that allow to project a possible specialized knowledge of the teacher who teaches electricity.

Keywords. Keywords: Technical and Vocational Education, Technical skills, MTSK, Specialized Knowledge for Teaching Electricity

Vidal-Araya,L. y Quiroga-Merino, F. (2023). Conocimiento especializado del profesor de electricidad. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 288-295). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

En los últimos años en Chile, en el ámbito académico, político y empresarial del país, se ha avanzado hacia un cierto consenso en la necesidad de mejorar calidad y pertinencia de la Formación Técnico Profesional (Agencia de Calidad de la Educación, 2016; Ministerio de Educación [MINEDUC], 2017; OECD, 2017).

La oferta formativa de profesionales técnicos en Chile comprende una formación inicial de cuatro años dirigida a estudiantes de entre 15 y 18 años. Esta modalidad es conocida como Educación Media Técnico Profesional (EMTP), la cual acoge aproximadamente al 40% de los estudiantes de la educación media (secundaria) en Chile y sobre el 85% de los estudiantes pertenecen a establecimientos educacionales clasificados dentro de los grupos socioeconómicos de menores ingresos (Anglo American y Fundación Chile, 2017). El profesor de educación media técnico profesional debe facilitar un proceso de aprendizaje para que el egresado evidencie competencias en los contextos descritos en el perfil de egreso de la especialidad.

A la Educación Técnico Profesional se le asigna un rol clave para el desarrollo social y para la producción e innovación en el país, sin embargo, se requiere más investigación en relación con el proceso de enseñanza, particularmente en los conocimientos movilizados durante ese proceso. A pesar de la relevancia de la EMTP, la investigación en esta área es deficitaria no solamente en Chile, sino también en el ámbito internacional (Marope et al., 2015).

El presente estudio exploratorio cualitativo se desarrolla bajo el supuesto de que “los profesores de Electricidad que se desempeñan en la EMTP movilizan conocimientos especializados análogos a los descritos en el MTSK, según lo indica Carrillo et al. (2018), pero enfocados al desarrollo de competencias descritas en el perfil de egreso en la especialidad de electricidad”. Este trabajo busca caracterizar inicialmente el conocimiento especializado del profesor que enseña electricidad en el contexto de la EMTP y con ello contribuir con evidencia que pueda ser usada en estudios para definir, por ejemplo, énfasis en algún ámbito del proceso de formación inicial docente, u orientados al mejoramiento de la práctica pedagógica de los profesores.

Marco teórico

Arnold (2002) define la pedagogía técnico profesional como la ciencia del desarrollo de competencias, “la pedagogía técnico-profesional tiene por objeto: las premisas y condiciones, la configuración de los contenidos y de la didáctica de los procesos de enseñanza y estudio, destinados al desarrollo sostenible y efectivo de competencias” (Arnold, 2002, p.11). De lo anterior se desprende la relación estrecha que tienen los procesos formativos de la enseñanza de la electricidad con el desarrollo de competencias profesionales en el área.

La Competencia

Considerando el rol que cumple el trabajo basado en el desarrollo de competencias para el contexto de la EMTP, para los efectos de esta investigación no se ha adoptado una noción de competencia de algún autor en particular, sino que se determinaron los elementos comunes que se extraen luego de analizar las definiciones propuestas por: Le Boterf (1998), Barba et al. (2007), Castro (2006), y Perrenoud (2008). Estos elementos comunes están en coherencia con el enfoque de formación basada en competencias de egreso según el Currículum de la Formación Diferenciada Técnico Profesional en Chile (MINEDUC, 2016) y por ello se considera que son los Elementos Esenciales que Representan a cada Competencia (EERC) que permiten entender y describir el desempeño del profesional técnico al terminar su proceso formativo. Los EERC seleccionados para el estudio son: a) Ejecución de tareas, actividades o resolución de problemas. b) Situaciones definidas en un contexto determinado y c) Movilización de recursos (Conocimientos, Habilidades y Actitudes).

El Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK)

El grupo SIDM (Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática) ha desarrollado en los últimos años un trabajo coordinado desde la Universidad de Huelva, para conceptualizar un modelo de conocimiento profesional: Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) según lo indica Carrillo et al. (2018). Una de sus preocupaciones ha sido la elaboración de un marco teórico, dentro del cual tiene una importancia fundamental el posicionamiento epistemológico acerca del conocimiento y las concepciones asociadas. En el centro del MTSK, está la noción de conocimiento la cual tiene una relevancia esencial. Después de un proceso de revisión de la literatura y reflexión sobre sus posibles implicaciones, se propone adoptar la definición de conocimiento de Shoenfeld (2010) como punto de acuerdo respecto de la noción de conocimiento para definir el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas MTSK. "Yo defino el conocimiento de un individuo como la información que tiene disponible para usar para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea. ¡Nótese que, de acuerdo con esta definición, el conocimiento no ha de ser necesariamente correcto!" (Shoenfeld, 2010, p. 25).

En el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas MTSK se consideran dos grupos de conocimiento: El dominio del Conocimiento Matemático (MK) y el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) que corresponden a dos de las categorías iniciales que considera Shulman (Flores-Medrano et al., 2016). El dominio del MK se compone de tres subdominios: a) Conocimiento de los Temas (KoT), b) Conocimientos de la Estructura de la Matemática (KSM) y c) Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM). En el dominio PCK están los subdominios: a) Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), b) Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y c) Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS).

Extensiones del MTSK

El modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) es un modelo analítico específico en la enseñanza de matemáticas. No obstante, en algunos estudios recientes se ha realizado una transposición del modelo, por ejemplo, a la disciplina de Biología (BTSK) (Luís, 2021), en Física con el modelo (PTSK) (Lima, 2018) y para la Química con el modelo (CTSK) (Soares, 2019). Esta transposición del MTSK ha permitido proponer otros modelos de conocimiento especializado de profesores en otras ciencias y especificidades.

Lo anterior da pie para intentar iniciar un proceso investigativo que intente aproximarse hacia un modelo similar, pero para la enseñanza de la electricidad. Una descripción inicial del modelo de conocimiento especializado del profesor de electricidad, a título de hipótesis, sería factible realizarla tomando como referencia el modelo MTSK y elaborando una descripción inicial de los subdominios del ETSK, análoga a los subdominios del MTSK, pero relacionada con el conocimiento disponible sobre la enseñanza de la electricidad (MINEDUC, 2019).

Metodología

La aproximación al conocimiento especializado del profesor de Educación Media Técnico Profesional en la especialidad de electricidad se ha realizado desde un paradigma interpretativo. Se trata de comprender la naturaleza y los componentes del conocimiento que moviliza el profesor para favorecer el desarrollo de competencias en sus alumnos, sin pretender evaluar o calificar ese conocimiento. La investigación se aborda bajo una metodología de estudio de caso instrumental (Stake, 1999). La selección del caso se realizó considerando características relevantes de un potencial informante. Se seleccionó a un profesor que enseña a estudiantes que se forman en las especialidades de electricidad y electrónica y que considera las características secundarias de profesor experto descritas por Rojas et al. (2012).

Técnicas e Instrumentos de Recolección de Información

La Tabla 1 muestra una descripción inicial del Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Electricidad (ETSK) basado en el MTSK. Los subdominios aquí descritos se establecen para una primera codificación deductiva guiada por conceptos (Gibbs, 2012).

Tabla 1. Descripción inicial del Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Electricidad

Subdominios		**Tipo de Conocimiento**
Conocimiento de Electricidad (EK)	Conocimiento de los Temas (KoET)	Conocimiento fundamentado de los contenidos de la Especialidad de Electricidad como disciplina y sus significados, con un mayor nivel de profundización al esperado para los alumnos. Se incluye lo relativo a los fundamentos, principios, leyes y reglas fundamentales, significados, procedimientos, formas de representación, aspectos fenomenológicos y aplicaciones.
	Conocimientos de la Estructura de la Electricidad (KSE)	Conocimiento de conexiones o relaciones que el profesor puede hacer entre los distintos contenidos de la Especialidad de Electricidad, ya sea dentro del módulo técnico-profesional impartido o en relación con contenidos de otros módulos o niveles. Conocimiento de relaciones con conceptos más avanzados o elementales de la especialidad de Electricidad.
	Conocimiento de la Práctica de la Electricidad (KPE)	Conocimiento de las técnicas, procedimientos y precauciones de seguridad relacionados con los trabajos de ejecución práctica de la especialidad, tales como análisis de circuitos, conexiones, mediciones, montaje, desmontaje, instalaciones, operación de circuitos, máquinas y equipos, mantenimiento, detección de averías, simulación, ensayos y pruebas de funcionamiento.
Conocimiento Didáctico del Contenido (PCEK)	Conocimiento de la Enseñanza de la Electricidad (KET)	Conocimiento de las vías, recursos y formas de enseñar Electricidad. Conocimiento de diversas estrategias y teorías formales o personales de la enseñanza, la potencialidad de recursos materiales, ejemplos y modos de representar el contenido de electricidad.
	Conocimiento de las Características del Aprendizaje de la Electricidad (KFLE)	Conocimiento relacionado con las características de aprendizaje inherentes al contenido de la electricidad. Se trata de las características de aprendizaje derivadas de su interacción con el contenido: formas de aprendizaje, fortalezas y dificultades, formas de interacción con el contenido de la electricidad, y expectativas e intereses de los estudiantes.
	Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de la Electricidad (KELS)	Conocimiento de los contenidos de la especialidad que se requiere enseñar en el curso correspondiente, el nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado y la secuenciación de diversos temas anteriores o posteriores.

Fuente: Elaboración propia (Basado en el MTSK)

Los datos de esta investigación se obtuvieron de la aplicación de una entrevista semi estructurada orientada por una pauta descrita en la Tabla 2. Se formularon preguntas que permitieran obtener información relacionada con los elementos esenciales que representan cada competencia EERC. Tentativamente, se asoció cada pregunta a uno o dos subdominios del ETSK sobre los que se podría llegar a obtener información a través de las eventuales respuestas del docente.

La pauta de entrevista semiestructurada contiene preguntas orientadoras que permitieron extraer evidencias que, al ser analizadas con énfasis en las percepciones e interpretaciones del profesor participante sobre su práctica, permitió comprender inicialmente la naturaleza y los componentes del conocimiento que moviliza el profesor al enseñar electricidad con énfasis en el desarrollo de competencias. Para dar un marco de análisis acorde con la enseñanza de la electricidad, se le solicitó al profesor especialista cinco materiales elaborados por él para ser usados en distintas clases del módulo “Automatización de Sistemas Eléctricos Industriales” correspondiente al cuarto año medio de formación.

Tabla 2. Pauta de Entrevista Semi Estructurada y su relación con los EERC y Subdominios del ETSK.

EERC	Preguntas Orientadoras Entrevista Semi Estructurada	Subdominio (ETSK)
Ejecución de tareas, actividades o resolución de problemas.	¿Cuál es el objetivo de la clase?	KoET - KELS
	¿Qué actividad(es) desarrollan los alumnos?	KoET - KFLE
	¿Se espera un producto, resultado final o desempeño? ¿Cuál?	KPE
	¿Cómo se obtendrá información respecto del aprendizaje de los alumnos?	KFLE
	¿Cuáles son las fortalezas y dificultades más comunes que presentan los alumnos? ¿Cómo se atiende a los alumnos que presentan dificultades de logro?	KFLE - KET
Situaciones definidas en un contexto determinado	¿Cómo define el estándar de ejecución de las actividades o el trabajo? ¿tiene relación con estándares externos? Explique.	KELS - KPE
	Los aprendizajes de la clase ¿están relacionados con aprendizajes de otros módulos de la especialidad? (Ejemplos)	KSE-KELS
	Los alumnos ¿adquieren conciencia de la utilidad de lo aprendido? ¿Cómo?	KSE - KFLE
	Los alumnos ¿podrán transferir o adaptar lo aprendido a otra situaciones o contextos. (Ejemplos)	KSE - KELS
Movilización de recursos (Conocimientos, Habilidades, Actitudes y otros)	¿Qué conocimientos ponen en juego los alumnos durante el desarrollo de las actividades?	KoET - KFLE
	¿Qué habilidades ponen en juego los alumnos durante el desarrollo de las actividades?	KPE
	¿Qué Actitudes ponen en juego los alumnos durante el desarrollo de las actividades?	KPE
	¿Qué otros recursos se ponen a disposición de los alumnos durante el desarrollo de las actividades?	KET
	¿Cómo adquieren o desarrollan los alumnos esos conocimientos, habilidades, actitudes y otros recursos necesarios?	KFLE - KET

Fuente: Elaboración propia.

Procedimiento de Análisis

En primer lugar, se realizó la transcripción y codificación de las entrevistas con una orientación deductiva, considerando como categorías a priori cada uno de los subdominios del Conocimiento Especializado del Profesor de Electricidad definidos en la tabla 1. Junto con la codificación deductiva, se realizó una codificación abierta que permitió levantar además algunas categorías emergentes a partir de los datos.

El proceso de análisis se realizó con el apoyo del software de análisis cualitativo Atlas.ti. Como una manera de fundamentar la relevancia y validez de las categorías a priori y emergentes se consideró, sólo a modo de modo referencial, el indicador enraizamiento (grounded) (Méndez, 2021), que corresponde al número de citas por categoría en las entrevistas aplicadas.

Resultados y discusión

Luego del proceso de aplicación y transcripción de las entrevistas, se realizaron análisis como los mostrados en la Tabla 3, cuyo formato es una adaptación de Moriel et al. (2019).

Tabla 3. Ejemplo de Análisis de Entrevistas.

Cita de entrevista	Análisis		
	Conocimiento:	**Asociado con:**	**Que consiste en:**
5:17 ¶ 8: "Al energizar este contactor, supongamos KM2, entonces si hay un contacto KM2 abierto, éste se va a cerrar, si hay un contacto KM2 cerrado, éste se va a abrir". Y yo voy a preguntar ¿cuál primero?: el estudiante debe recordar que el contacto cerrado es el primero que opera, se abre, y después el (contacto) abierto es el que opera, en ese orden. Esa es la secuencia de funcionamiento que él debe ir indicando".	De los temas de la electricidad KoET	Formas de representación	Análisis de un circuito de control, a partir de su representación en un diagrama eléctrico.

Fuente: Elaboración propia.

En el estudio de caso realizado, los resultados presentados muestran la factibilidad de analizar el conocimiento especializado del profesor de electricidad mediante una transposición del modelo MTSK. Los resultados de la codificación por subdominio se presentan en la Tabla 4. En la mayoría de los subdominios fue posible establecer algunas categorías análogas al MTSK. En el subdominio KPE: Conocimiento de la Práctica de la Electricidad se logró establecer categorías genéricas que corresponden al conocimiento de la práctica de la electricidad como especialidad técnico profesional, conocimiento relacionado con trabajos de ejecución asociados a las competencias específicas que se pretende que desarrollen los alumnos.

Conclusiones

El presente trabajo constituye una primera aproximación hacia el desarrollo de un modelo de conocimiento especializado del profesor de Electricidad (ETSK). Así, la investigación se ha focalizado exclusivamente en uno de los ocho módulos del plan de estudio de la especialidad de electricidad, el módulo: Automatización de Sistemas Eléctricos Industriales. En futuras investigaciones se podría avanzar en dirección al desarrollo de una propuesta de modelo concreta, lo que implicaría ampliar el foco investigativo para abordar otros módulos de la especialidad de electricidad.

En coherencia con el carácter exploratorio de la investigación, el estudio proporciona algunos elementos que permiten esbozar nuevas perspectivas de investigación. Por ejemplo, caracterizar el conocimiento especializado del profesor de otras especialidades de la formación técnico profesional, con la finalidad de proyectar otros modelos.

Tabla 4. Resultados de la Codificación por Subdominio

Subdominio	Nombre del Código	Enraizamiento
KoET	Fundamentos y Principios	17
	Leyes o reglas fundamentales	5
	Componentes o dispositivos	14
	Formas de representación	6
	Procedimientos	3
	Aplicaciones	14
KSE	Relaciones entre distintos contenidos de la especialidad	9
	Relaciones entre los distintos contenidos del módulo	5
KPE	Diseño o programación	15
	Interpretación de diagramas	4
	Montaje y Conexiones	20
	Procedimientos y precauciones de seguridad	12
	Pruebas o ensayos	5
KET	Teorías sobre enseñanza	18
	Recursos materiales y virtuales	24
	Actividades, tareas, ejemplos, ayudas	23
KFLE	Formas de aprendizaje	21
	Fortalezas y dificultades	19
	Intereses y expectativas	1
KELS	Secuenciación con temas anteriores o posteriores	16
	Expectativas de aprendizaje	7

Fuente: Elaboración propia

Agradecimientos

Investigación realizada en el contexto del Proyecto BIP 40011069-0 "Transferencia fomento del capital humano para el desarrollo económico", financiado por el Gobierno Regional, a través del Fondo de Innovación para la Competitividad (FIC).

Referencias

Agencia de Calidad de la Educación. (2016). *Panorama de la educación media técnico profesional en Chile*. Autor. http://archivos.agenciaeducacion.cl/Panorama_Ed_TP_en_Chile.pdf

Anglo American y Fundación Chile. (2017). *Desarrolla T. Hacia la construcción de una nueva educación técnica.* Anglo American / Fundación Chile.

Arnold, R. (2002). *Formación profesional: nuevas tendencias y perspectivas.* OIT / Cinterfor. http://www.oitcinterfor.org/node/6229

Barba, E., Billorou, N., Negrotto, A. y Varela, M. C. (2007). *Enseñar a trabajar: las competencias de quienes forman para el trabajo.* OIT/Cinterfor. http://www.oitcinterfor.org/sites/default/files/file_publicacion/ens_trab.pdf

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Meldrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N. ,Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org /10.1080/14794802.2018.1479981.

Castro, A. (2006). *El currículum y la evaluación en la educación técnico-profesional, desde una perspectiva fenomenológica de las competencias.* Ediciones Facultad de Educación Universidad de Concepción.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, A. y Carrillo, J. (2016). Nuestra Modelación del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. En J. Carrillo, L.C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano y M.A. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 57-72). Universidad de Huelva Publicaciones.

Gibbs, G. (2012). *El análisis de datos cualitativos en investigación cualitativa.* Ediciones Morata.

Le Boterf, G. (1998). *La ingeniería de las competencias.* D´organisation.

Lima, S. (2018). *Conhecimento Especializado de Professores de Física: Uma Proposta De Modelo Teórico* [Dissertação de Mestrado, Universidade de Cuiabá].

Luís, M. (2021). *O Conhecimento Especializado do Professor quando ensina Tópicos de Biología* [Tese Doutoral, Universidad de Huelva].

Marope, P., Chakroun, B. y Holmes, K. (2015). *Unleashing the potential: transforming technical and vocational education and training.* UNESCO Publishing.

Méndez, J. (2021). *Guía visual del manejo inicial de Atlas.ti v8 para el análisis de contenido cualitativo.* https://www.researchgate.net/publication/348618014_Guia_visual_del_manejo_inicial_de_Atlagoosti_v8_para_el_analisis_de_contenido_cualitativo

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2016). *Orientaciones para la gestión e implementación del currículum de la Educación Media Técnico-Profesional*. Autor.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2017). *Estrategia Nacional de Formación Técnico Profesional*. Autor. https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/2217/mono-639.pdf?sequence=1yisAllowed=y

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2019). *Electricidad. Educación Media Diferenciada Técnico Profesional.* Autor.
https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2019/09/Temario-Electricidad-TP.pdf

Moriel Junior, J. G., y Alencar, A. P. (2019). Conhecimento especializado para ensinar Cálculo: um panorama da produção do COBENGE 2012-2017. *Brazilian Journal of Development, 5*(7), 7687-7702.

OECD (2017), *Educación en Chile, Revisión de Políticas Nacionales de Educación*, OECD Publishing, Paris/Fundación SM. https://doi.org/10.1787/9789264288720-es.

Perrenoud, P. (2008). *Construir competencias desde la escuela*. J.C. Sáez editor.

Rojas, N., Carrillo, J., y Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 479 - 485). SEIEM.

Soares, S. T. C. (2019). *Conhecimento Especializado de Professores de Química – CTSK: Proposta de Modelo Teórico* [Dissertação de Mestrado, Universidade de Cuiabá (UNIC)].

Shoenfeld, A.H. (2010). *How we think.* Routledge.

Stake, R.E. (1999). *Investigación con estudio de casos* (2ª ed.). Ediciones Morata, S.L.

EL MODELO STSK: EXTENSIÓN DEL MODELO MTSK A LA ESTADÍSTICA

The STSK Model: Extension of the MTSK model to Statistics

Vidal-Szabó, P.[a], Estrella, S.[b]

[a] Universidad del Desarrollo, Chile
[b] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Temática: 5 –Extensiones del MTSK

Resumen.
Esta comunicación da cuenta de una propuesta para extender el modelo MTSK y tiene como objetivo adaptar dicho modelo a la disciplina estadística. Para la construcción del modelo STSK —Statistics Teacher's Specialised Knowledge— se realizó una revisión de la literatura en el área de la educación estadística, que contribuyó a sustentar la exploración analítica preliminar del conocimiento especializado del profesor de matemática que enseña o enseñará estadística desde los primeros años escolares.

Palabras clave. MTSK, Educación Estadística, modelo STSK, Formación docente.

Abstract.
This communication accounts for a proposal to extend the MTSK model and aims to adapt this model to the statistical discipline. For the construction of the STSK model —Statistics Teacher's Specialized Knowledge— a review of the literature in area of statistics education was carried out, which contributed to support the preliminary analytical exploration of the mathematics teacher's specialized knowledge who teaches or will teach statistics from the first years of education.

Keywords. MTSK, Statistics Education, STSK model, Teacher training.

Vidal-Szabó, P. y Estrella, S. (2023). El modelo STSK: extensión del modelo MTSK a la estadística. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 296-303). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

Desde finales del siglo XX, la disponibilidad de datos masivos ha transformado múltiples aspectos de la sociedad, y ha tomado mayor relevancia la educación estadística en todos los niveles educativos. Las escuelas inician la alfabetización estadística con el fin curricular de otorgar una base formativa común que permita a los estudiantes un adecuado desempeño en la vida en sociedad, lo que implica interpretar terminologías propias de la estadística y comprender la relevancia del contexto de los datos para la toma de decisiones fundamentadas y llegar a cuestionar, con cierta confianza, algunas declaraciones realizadas sin una base estadística pertinente (Watson, 2006).

Diversos currículos escolares promueven tempranamente el tratamiento de objetivos de aprendizaje vinculados con la estadística. En Chile, hace más de una década la estadística es abordada como uno de los ejes temáticos de la asignatura matemática desde el primer año de escolaridad (Ministerio de Educación [MINEDUC], 2012). Por otra parte, la formación profesional docente para enseñar estadística ha demandado mayor atención por parte de distintas entidades e investigadores en educación estadística, especialmente debido a que la inclusión de la estadística en los primeros años escolares es relativamente reciente (e.g., Bargagliotti et al., 2020; Zieffler et al., 2018).

La formación usual de los docentes para enseñar estadística a niñas y niños puede estar distorsionando la enseñanza de la disciplina estadística a un cúmulo abstracto de fórmulas matemáticas sin uso de procesadores de datos, invisibilizando al contexto, a la variabilidad propia de los datos y la incertidumbre presente en los procesos estadísticos; lo cual estaría omitiendo recomendaciones curriculares actuales y los alcances de la investigación en Educación Estadística (Ben-Zvi y Garfield, 2004; Groth y Bergner, 2013).

La innovadora asignatura "Matemática y Estadística" del currículo escolar neozelandés destaca ambas disciplinas en un mismo sector curricular (Cf., New Zealand Ministry of Education, 2007), reconociéndose una necesaria distinción entre dichas disciplinas que debiese decantar en enseñanzas específicas y distintivas que promuevan el desarrollo del pensamiento estadístico (Estrella, 2014, 2018; Moore, 1997). En especial, hace más de 20 años, el ciclo investigativo PPDAC —el acrónimo que integra *problema, plan, datos, análisis y conclusiones*, como una dimensión del pensar estadístico en una investigación empírica (Wild y Pfannkuch, 1999)— se ha convertido en una metodología de enseñanza que permite estructurar una secuencia didáctica de clases en el marco de la estadística escolar (Vidal-Szabó et al., 2020), pues contempla algún problema auténtico (real o realista) que requiere de un plan para obtener datos en un contexto específico y que, en virtud del análisis exploratorio de los datos, se consiguen conclusiones parciales para responder al problema inicial, e incluso, pueden generarse nuevas interrogantes susceptibles de ser abordadas con datos (Estrella y Vidal-Szabó, 2017).

Las directrices para la evaluación y la instrucción en Educación Estadística conocidas como GAISE —i.e., *Guidelines for Assesment and Instruction in Statistics Education*— tanto en la primera versión (GAISE I) como en la segunda (GAISE II;) destacan que las problemáticas estadísticas son de naturaleza no determinística, y consideran como conceptos centrales de la enseñanza estadística, la variabilidad y la incertidumbre (Bargagliotti et al., 2020). Asimismo, si bien tanto la matemática como la estadística se asocian a veces con contextos del mundo real, su rol difiere, como señalan Cobb y Moore (1997), pues matemática el contexto oscurece la estructura, en cambio, en estadística, el contexto proporciona significado durante el análisis de los datos.

Con el objetivo de examinar dominios de conocimiento estadístico y de conocimiento didáctico del contenido estadístico que lleguen a orientar la formación profesional del docente que enseña (o enseñará) estadística en la escuela, la siguiente pregunta guía el presente estudio, ¿qué conocimiento especializado es posible caracterizar en docentes que enseñan estadística en educación básica?

Revisión de algunos antecedentes

En la literatura se reporta el modelo de *Conocimiento para la Enseñanza de la Estadística* (modelo SKT) cuya premisa declara que los docentes necesitan conocimientos específicos del contenido estadístico para guiar la enseñanza (Groth y Bergner, 2013). El modelo SKT empleó de base el modelo MKT (Ball et al., 2008; Hill et al., 2008) el que permitió identificar elementos de conocimiento relevantes. En particular, Groth (2017) precisa que el conocimiento estadístico para la enseñanza no es precisamente equivalente al conocimiento de la materia estadística, ya que los conocimientos de los profesores sobre cómo hacer que los contenidos estadísticos sean comprensibles en su enseñanza, difieren de los conocimientos estadísticos que poseen sobre dichos contenidos. También, indica que el modelo SKT va más allá de la aplicación de las descripciones de las categorías del modelo MKT a la estadística, ya que abarca constructos sobre comprensiones de la estadística e ideas pedagógicamente claves que se consideraron en combinación con las categorías de conocimiento de la materia y el conocimiento pedagógico del contenido para ser unificados en el modelo SKT.

Groth (2007) proporcionó ejemplos de conocimientos estadísticos comunes y especializados. En particular, los conocimientos comunes incluyen la lectura precisa de gráficos, la construcción de preguntas de encuestas, el cálculo de estadísticos y la elección de una estadística descriptiva adecuada para un contexto determinado. Mientras que, Wassong y Biehler (2010) consideraron representar la media como un valor típico, una repartición equitativa, una reducción de datos y una señal en medio del ruido; como interpretaciones que son parte de un conocimiento especializado respecto a la media. Burgess (2011) discutió el análisis apropiado de un profesor sobre la interpretación estadísticamente ingenua de los resultados de una encuesta por parte de un estudiante como indicativo de conocimiento especializado.

Al igual que el modelo MKT, el modelo SKT es impreciso de acuerdo con algunos elementos particulares que son o no exclusivos de los profesores que enseñan estadística, además es posible una superposición de los subdominios, en la perspectiva de Silverman y Thompson (2008). En palabras de Groth (2017) "a lo largo de este documento, se presta atención a la identificación de posibles distinciones adicionales entre el conocimiento especializado, el conocimiento común y el conocimiento del contenido y de los alumnos en el contexto de la SKT" (p. 8), advirtiendo superposiciones entre subdominios. En particular:

> Al igual que con todas las categorías de conocimiento analizadas hasta ahora, cabe señalar que estas tres categorías se solapan en cierta medida con otras. Por ejemplo, tanto el conocimiento especializado como el conocimiento del contenido y la enseñanza implican hacer que la materia sea comprensible para los estudiantes. Además, tanto el conocimiento del contenido y la enseñanza como el conocimiento del currículo implican el uso de estrategias específicas para facilitar el aprendizaje de los estudiantes. Los ejemplos anteriores de la literatura sobre educación estadística proporcionan cierta orientación para distinguir entre las categorías de conocimiento, pero sin duda aún dejan espacio para la ambigüedad. (Groth, 2017, p. 10)

Lo anterior, demanda precisar un modelo de conocimiento especializado del profesional de la educación responsable de llevar a cabo las clases de estadística a estudiantes en formación, al que se denominará profesor de estadística. Además, es de interés realizar adaptaciones al Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática —i.e., modelo MTSK (Carrillo et al., 2018)— para caracterizar y examinar el conocimiento especializado de profesores de otras disciplinas, denominado genéricamente modelo XTSK en que X hace alusión a diferentes disciplinas científicas, sociales o lingüísticas (Codes et al., 2020), lo cual da la oportunidad de definir X como S, remitiendo al dominio disciplinar estadístico (*Statistics*).

Metodología

A partir del modelo MTSK y en base a la literatura en educación estadística disponible, se inicia el diseño teórico de un marco conceptual referencial para la estadística escolar con fines de desarrollo profesional docente —en adelante, modelo STSK, del acrónimo: *Statistics Teacher's Specialised Knowledge*— teniendo en cuenta que la educación estadística como disciplina ha adquirido autonomía e independencia de la didáctica de la matemática (Zieffler et al., 2018) y que existen intentos teóricos de algunos investigadores por mapear el conocimiento estadístico para la enseñanza (e.g., Groth, 2007, 2017; Groth y Bergner, 2013), todavía incipientes para caracterizar el conocimiento especializado del profesor de estadística. Para dicho diseño teórico se consideraron estudios o reportes de la educación estadística relevantes y que centran su foco en investigar o recomendar aspectos estadísticos claves para su enseñanza o aprendizaje, al modo de la perspectiva *top-down* reportado por Grbich (2013).

Modelo STSK

Este constructo se origina preliminarmente en Vidal-Szabó y Estrella (2020), y se ha ido robusteciendo con los estudios de Vidal-Szabó y Estrella (2021), Franco y Alsina (2022), entre otros. El modelo STSK contempla dos dominios de conocimiento especializado, el conocimiento estadístico (SK) y el conocimiento didáctico del contenido estadístico (PCK) y reconoce un sistema de creencias que condicionan dichos dominios y su puesta en práctica, los cuales permite comprender la especialidad del conocimiento de docentes que enseñan estadística.

El SK que manifiesta un profesor tiene relación con la estadística en el contexto educativo, y abarca tres subdominios que se describen e ilustran a continuación:

Conocimiento de los temas estadísticos (KoT estadístico). Posee dos tipos de conocimientos que tienen relación con aspectos fenomenológicos, significados de conceptos y ejemplos específicos de los temas estadísticos promovidos en el marco del sistema educativo. Estos conocimientos integrados son el conocimiento estadístico —i.e., ideas fundamentales de la estadística escolar (Burril y Biehler, 2011)— y el conocimiento contextual que le da sentido a la variable estadística (Wild et al., 2018). Por ejemplo, Vidal-Szabó y Estrella (2021) informan que es posible que el profesorado no esté distinguiendo suficientemente a los datos como una expresión de la variable en el contexto de las investigaciones estadísticas, ni tenga en cuenta su carácter numérico o categórico de naturaleza medible u observable.

Conocimiento de la estructura estadística (KSS). Incluye comprender conceptos integrados en un sistema de conexiones entre variabilidad, incertidumbre y contexto de los datos propios del pensar estadístico (delMas, 2004; Moore, 1998). Así es posible comprender conceptos estadísticos avanzados desde una perspectiva elemental y viceversa. Por ejemplo, Pfannkuch y Rubick (2002) sostienen que razonar con datos es complejo y requiere de la imaginación de los sujetos para producir una red de conexiones entre el conocimiento contextual y el estadístico con el fin de construir significados desde las representaciones de datos (Pfannkuch, 2011). Esto supone por ejemplo relacionar distintas medidas (de centro, dispersión, forma, entre otras) y combinar lecturas de distintas representaciones de un conjunto de datos para potenciar el razonamiento estadístico y describir más completamente el comportamiento de los datos (Vidal-Szabó y Estrella, 2020).

Conocimiento de la práctica estadística (KPS). Abarca aspectos ligados al cómo se piensa y se procede en estadística. En ese sentido, Kahneman (2012) afirma que existe una difícil relación entre nuestra mente y la estadística, y que quienes trabajan con datos suelen apegarse a la tradición y a su propia intuición para planificar los experimentos. Pfannkuch y Wild (2000) caracterizan esquemas de trabajo estadístico en distintas áreas y algunos de sus hallazgos muestran que el trabajo estadístico debe proporcionar soluciones comprensibles, lo que supone, describir cuantitativamente el sistema real donde se sitúa el estudio estadístico, transformar los datos en el sistema estadístico y construir representaciones que ayudan a comunicar a otros sobre el comportamiento de los datos y así interpretar el fenómeno en el sistema real.

El PCK que manifiesta un profesor se vincula al tratamiento educativo de los contenidos estadísticos en virtud de los procesos de enseñanza, evaluación y aprendizaje propios de la formación estadística en diversos niveles educativos, y abarca tres subdominios que se describen e ilustran a continuación:

Conocimiento de la enseñanza de la estadística (KST). Considera distintas estrategias de enseñanza que fomentan y desarrollan habilidades estadísticas procedimentales o conceptuales. Los recursos para utilizar en una enseñanza estadística pueden ser manipulativos, digitales o simbólicos, y su selección da cuenta de la posibilidad de discernir entre escoger una u otra representación, algún material, cierto ejemplo, una sección del libro de texto u otro elemento que facilite la enseñanza. Por ejemplo, hay experiencias con datos reales y con base en el ciclo PPDAC que ilustran un diseño de enseñanza (e.g., Estrella, 2018; Estrella y Vidal-Szabó, 2017; Vidal-Szabó et al., 2020).

Conocimiento de las características de aprendizaje de la estadística (KFLS). Toma en cuenta de forma general cómo aprenden los estudiantes el contenido estadístico desde sus conocimientos previos, también comprende errores, dificultades y obstáculos comunes vinculado a un determinado contenido estadístico. Por ejemplo, este conocimiento puede ayudar al profesorado a conciliar algunas dificultades que reportan Ben-Zvi y Garfield (2004), en particular, *(i)* muchos estudiantes tienen dificultad con las matemáticas subyacentes (por ejemplo, fracciones, decimales, fórmulas algebraicas), lo cual interfiere con el aprendizaje del contenido estadístico relacionado; *(ii)* el contexto en muchos problemas estadísticos puede inducir a error a los estudiantes, haciendo que se basen en sus experiencias personales y, a menudo intuiciones erróneas para producir una respuesta, en lugar de seleccionar un procedimiento estadístico apropiado; *(iii)* los estudiantes comparan la estadística con la matemática y esperan que el foco esté en números, cálculos, fórmulas y una única respuesta correcta, por lo que se sienten incómodos con el desorden que presentan de los datos, las diferentes interpretaciones posibles en función de diferentes supuestos, y el uso extensivo de escritura especiales y habilidades de comunicación.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de la estadística (KSLS). Incorpora el conocimiento referido al currículo como marco que prescribe para cada etapa educativa las metas de aprendizaje que deben lograrse asociadas a la estadística y también considera las recomendaciones que aconsejan expertos de acuerdo con los niveles de logro que se esperan alcanzar como aprendizajes por nivel educativo. Por ejemplo, el conocimiento de los estándares de un profesor puede prolongarse más allá del conocimiento local de los objetivos de aprendizaje, considerando ideas de *The Statistical Education of Teachers* (Franklin et al., 2015), informes reconocidos internacionalmente como GAISE I y II o el sentido del dato (Estrella, 2018), entre otros.

Reflexiones finales

El modelo STSK en ciernes, busca responder ¿qué conocimiento especializado es posible caracterizar en docentes que enseñan estadística en educación básica? Este constructo permite aportar a la formación de docentes que enseñan o enseñarán estadística desde los primeros años escolares.

La propuesta de modelo STSK reconoce un conocimiento especializado en el ámbito de la educación estadística y propio del profesor en su rol de educador estadístico. Por tanto, permitiría mapear el conocimiento especializado del profesor de estadística, a través de dominios y subdominios respectivos, lo cual posibilita que dicho conocimiento pueda ser reconocido y, a su vez, desarrollado, tal como ocurre con el modelo MTSK (Carrillo y Climent, 2011).

Sin embargo, se reconoce que mapear el conocimiento especializado de los profesores implica un proceso de continua mejora de las categorías de los subdominios de conocimiento. Este refinamiento y prueba constante son necesarios para lograr un nivel adecuado de exhaustividad en la representación del conocimiento. Tal como indica Hill et al. (2008) referido al modelo MKT, "mapear este conocimiento probablemente sea un proceso largo y que requiera mucho tiempo" (p. 396), lo cual supone una cuestión temporal que puede aminorarse en la medida que se acreciente la colaboración entre investigadores enfocados en desarrollar el modelo STSK, la cual puede someterse a la perspectiva bottom-up para progresar en estructura y funcionalidad, involucrando varias aplicaciones como proceso iterativo para examinar las categorías de los subdominios y, eventualmente, refinarlas para conseguir mayor robustez en el modelo STSK.

Agradecimientos

Esta investigación agradece el patrocinio del Grupo de Investigación en Estadística Temprana (GIET, https://estadisticatemprana.cl/).

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bargagliotti, A., y Franklin, C. (2015). The Statistical Education of Teachers: Preparing Teachers to Teach Statistics. *Chance, 28*(3), 19-27. https://doi.org/10.1080/09332480.2015.1099362

Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., y Spangler, D. (2020). *The Pre-K–12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II (GAISE II)*. American Statistical Association https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GAISEIIPreK-12_Full.pdf

Ben-Zvi, D., y Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: goals, definitions, and challenges. En D. Ben-Zvi, y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 3-15). Springer. https://philarchive.org/archive/CAPTEO

Burgess, T. A. (2011). Teacher knowledge of and for statistical investigations. En C. Batañero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics – Challenges for teaching and teacher education* (pp. 259-270). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_26

Burrill, G., y Biehler, R. (2011). Fundamental Statistical Ideas in the School Curriculum and in Training Teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 57-69). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_10

Carrillo, J., y Climent, N. (2011). The development of teachers' expertise through their analyses of good practice in the mathematics classroom. *ZDM - Revista Internacional de Educación Matemática, 43*(6-7), 915-926. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0363-0

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Meldrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N. ,Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Cobb, G., y Moore, D. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *The American Mathematical Monthly, 104*(9), 801-823. https://www.jstor.org/stable/2975286

Codes, M., Moriel-Junior, J., Alfaro, C., y González, Y. (2020). Síntesis y problemas abiertos en el IV Congreso iberoamericano de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK). En J. Carrillo, M. Codes y L. C. Contreras (Eds.), *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 41-47). Universidad de Huelva. https://cdn.congresse.me/rlbmixa8vqmkkc75l9pjf2p8ex1i

del Mas, R. (2004). A comparison of mathematical and statistical reasoning. En D. Ben-Zvi, y J. B. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 79-96). Springer. https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6_4

Estrella, S. (2018). Data representations in Early Statistics: data sense, meta-representational competence and transnumeration. En A. Leavy (Ed.), *Statistics in Early Childhood and Primary Education – Supporting early statistical and probabilistic thinking* (pp. 239-256). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_14

Estrella, S. (2014). Un imperativo moral: la enseñanza de la Estadística no puede dejarse al azar. En L. Andrade (Ed.), *Memorias del Primer Encuentro Colombiano de Educación Estocástica.* ACEE. http://funes.uniandes.edu.co/6530/1/Estrella2014UnimperativoECEE.pdf

Estrella, S., y Vidal-Szabó, P. (2017). Alfabetización estadística a través del Estudio de Clase: representaciones de datos en primaria. *Uno, 78*, 12-17.

Grbich, C. (2013). *Qualitative data analysis: An introduction*. Sage.

Groth, R. E. (2017). Developing Statistical Knowledge for Teaching During Design-Based Research. *Statistics Education Research Journal, 16*(2), 376-396, http://iase-web.org/Publications.php?p=SERJ

Groth, R. (2007). Toward a conceptualization of statistical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 38,* 427-437. https://www.jstor.org/stable/30034960

Groth, R., y Bergner, J. (2013). Mapeo de la estructura del conocimiento para la enseñanza del análisis de datos categóricos nominales. *Educ Stud Math, 83*, 247–265. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9452-4

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400. https://www.jstor.org/stable/40539304

Kahneman, D. (2012). *Pensar rápido, pensar despacio.* Debate. https://catedradatos.com.ar/media/kahneman_pensar.pdf

Ministerio de Educación [MINEDUC]. (2012). Matemática. Bases Curriculares para Educación Básica. Autor. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Educacion-General/Matematica/

Moore, D. (1988). Should Mathematicians Teach Statistics? *The College Mathematics Journal, 19*(1), 3-7. https://doi.org/10.2307/2686686

Moore, D. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International Statistical Review, 65*(2), 123-165. https://iase-web.org/documents/intstatreview/97.Moore.pdf

New Zealand Ministry of Education. (2007). *The New Zealand curriculum.* Learning Media. https://nzcurriculum.tki.org.nz/The-New-Zealand-Curriculum

Pfannkuch, M. (2011). The role of context in developing informal statistical inferential reasoning: A classroom study. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(1 y 2), 27-46. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538302

Pfannkuch, M., y Rubick, A. (2002). An exploration of students' statistical thinking with given data. *Statistics Education Research Journal, 1*(2), 4-21. https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ1(2).pdf#page=6

Pfannkuch, M., y Wild, C. (2000). Statistical thinking and statistical practice: Themes gleaned from professional statisticians. *Statistical science, 15*(2), 132-152. https://doi.org/10.1214/ss/1009212754

Franco, J., y Alsina, A. (2022). Conocimiento especializado del profesorado de Educación Primaria para enseñar estadística y probabilidad. *Revista Educación Matemática, 34*(3), 65-96. https://doi.org/10.24844/EM3403.03

Silverman, J., y Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(6), 499-511. https://doi.org/10.1007/s10857-008-9089-5

Vidal-Szabó, P., y Estrella, S. (2021). Conocimiento Estadístico Especializado en Profesores de Educación Básica, basado en la taxonomía SOLO. *Revista Chilena de Educación Matemática, 13*(4), 134–148. https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i4.81

Vidal-Szabó, P., y Estrella, S. (2020). Extensión del modelo MTSK al dominio estadístico. En Y. Morales-López y Á. Ruíz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas 2019* (pp. 1036-1042). Comité Interamericano de EducaciónMatemática.

Vidal-Szabó, P., Kuzniak, A., Estrella, S., y Montoya, E. (2020). Análisis Cualitativo de un Aprendizaje Estadístico Temprano con la Mirada de los Espacios de Trabajo Matemático orientado por el Ciclo Investigativo. *Revista Educación Matemática, 32*(2), 216-245. http://www.doi.org/10.24844/EM3202.09

Wassong, T., y Biehler, R. (2010). A model for teacher knowledge as a basis for online courses for professional development of statistics teachers. En C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics* (pp. 41-46). IASE. https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.205.1284yrep=rep1ytype=pdf

Watson, J. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals.* Lawrence Erlbaum Associates. https://www.routledge.com/Statistical-Literacy-at-School-Growth-and-Goals/Watson/p/book/9780805853995

Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-265. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x

Wild, C., Utts, J., y Horton, N. (2018). What Is Statistics? En D. Ben-Zvi, K. Makar, y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 5-36). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_2

Zieffler, A., Garfield, J., y Fry, E. (2018). What is Statistics Education? En D. Ben-Zvi, K. Makar, y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 37-70). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_2

ESTRUCTURAS MENTALES QUE PREDICE UN PROFESOR QUE MOSTRARÁN SUS ESTUDIANTES ANTE ACTIVIDADES DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Mental structures predicted by a teacher when his students will face activities on the limit of a function

De Los Reyes, D.[a], Hernández-Rebollar, L.[a], Flores-Medrano, E.[b]

[a] Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México
[b] Universidad Complutense de Madrid, España

Temática: 5 –Extensiones del MTSK

Resumen.
En esta investigación se reportan las estructuras mentales que predice un profesor de matemáticas que mostrarán sus estudiantes al resolver actividades sobre el límite de una función y el conocimiento especializado que puso en juego cuando realizó esta actividad. Se implementó el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) y la Teoría Acción, Proceso, Objeto, Esquema (APOE) como bases teóricas y herramientas de análisis. Este trabajo tiene un enfoque cualitativo y un diseño metodológico de estudio de caso instrumental con un profesor de matemáticas de preparatoria. La recolección de datos se dio por medio de tres actividades resueltas por el informante y una entrevista semiestructurada. En los resultados se encontró que el profesor predice que sus estudiantes mostrarán fortalezas y debilidades, así como la manera en que realizarán Acciones y algunos Procesos. Esta propuesta es un acercamiento a una posible relación de trabajo entre la Teoría APOE y el MTSK.

Palabras clave. Teoría APOE, Modelo MTSK, Cálculo Diferencial, Predicción.

Abstract.
This research reports the mental structures that a mathematics teacher predicts his students will reveal when solving activities on the limit of a function and the specialized knowledge he put into play when performing this activity. The Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model and the Action, Process, Object, and Schema Theory (APOS) were implemented as theoretical bases and analysis tools. This work has a qualitative approach and an instrumental case study methodological design with a high school mathematics teacher. Data collection took place through three activities solved by the informant and a semi-structured interview. Based on the results, it was found that the teacher predicts that his students will reveal strengths and weaknesses, as well as the way how they will perform Actions and some Processes. This proposal is an approach to a possible working relationship between APOE Theory and the MTSK Model.

Keywords. APOE Theory, MTSK Model, Differential Calculus, Prediction.

De Los Reyes, D., Hernández-Rebollar, L. y Flores-Medrano, E. (2023). Estructuras mentales que predice un profesor que mostrarán sus estudiantes ante actividades del límite de una función. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 304-311). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

Desde la década de los 80, ha sido interés de los investigadores saber lo que podría estar pasando en la mente de un individuo cuando este trata de aprender un concepto matemático. Como respuesta a esta necesidad surgieron algunas teorías cognitivas, como es el caso de la Teoría Acción, Proceso, Objeto, Esquema (APOE), que se enfoca en modelos hipotéticos de construcciones mentales (Descomposiciones genéticas) que explican este hecho y las utiliza para diseñar materiales de instrucción y/o para evaluar los éxitos y fracasos del alumnado al tratar con problemas matemáticos (Arnon et al., 2014). Del mismo modo, desde principios de este siglo ha venido despertando el interés en el campo de la Educación Matemática el conocimiento específico del profesor de matemáticas, por lo que se han creado diversos modelos analíticos para caracterizarlo, como es el caso del Conocimiento para enseñar (MKT) (Ball et al., 2008) y el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) (Carrillo et al., 2014).

En la actualidad, son varias las investigaciones que indagan sobre el conocimiento del profesor de matemáticas fundamentándose en el MTSK, debido a que se utiliza como una herramienta para identificar y caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas desde su quehacer (Carrillo-Yáñez et al., 2018). Así como, investigaciones que utilizan la Teoría APOE con un enfoque de desarrollo de la comprensión, como una herramienta de evaluación analítica o ambas (Arnon et al., 2014).

Otro aspecto relevante aquí es el ejercicio de que sea el propio profesor quien tenga interés y conciencia sobre comprender los pensamientos matemáticos que usa su alumnado, ya que le permite llevar a cabo un proceso de reflexión sobre y para su práctica no sólo al momento de identificar el error y los razonamientos matemáticos que utilizan sus estudiantes, sino también al momento de diseñar su intervención didáctica (Sosa et al., 2013). En esta investigación se estudia un subdominio del modelo MTSK, el Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las matemáticas (KFLM), que hace posible observar e interpretar cómo este tipo de conocimiento interviene en la toma de decisiones por parte del profesor cuando se está desarrollando un trabajo matemático en el aula (Flores-Medrano et al., 2015).

Es decir, el KFLM informa cómo el profesor secuencia y anticipa la forma en que el alumnado desarrollará el trabajo matemático (Flores-Medrano et al., 2015). Así, es propósito de esta investigación caracterizar KFLM del profesor cuando predice el quehacer matemático de sus alumnos frente actividades sobre límite de una función desde la Teoría APOE, ya que esta teoría nos permitirá describir las estructuras mentales que el profesor cree que mostrarán sus estudiantes al resolver actividades sobre el límite de una función como las que él resolvió.

Marco teórico

Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas – MTSK

Con la necesidad de caracterizar el conocimiento específico del profesor sobre las características propias del aprendizaje de las matemáticas, derivadas de su interacción con el contenido matemático y el contenido matemático como objeto de aprendizaje, se ha elegido el modelo MTSK, considerando que es un modelo analítico y descriptivo, que posibilita la interpretación de este conocimiento especializado de manera integral, estudiando las distintas naturalezas de este conocimiento (matemático y didáctico) y destacando las facetas en las que el profesor conoce el contenido matemático (Escudero-Ávila et al., 2015). Además, este modelo destaca por tener una dualidad, es una propuesta teórica, y al mismo tiempo, una herramienta metodológica (Flores et al., 2013).

De acuerdo con las características de esta investigación, en la que se estudia a profundidad el KFLM, se presentará una descripción de este. Sin embargo, para una revisión detallada del modelo se recomienda Carrillo-Yáñez et al. (2018).

Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas – KFLM

El eje central de este subdominio está en ver al contenido matemático como objeto de aprendizaje, por lo que decidimos centrar la atención en los conocimientos del profesor sobre las características de aprendizaje (Escudero-Ávila y Carrillo, 2020). Es decir, al observar y analizar las interacciones del estudiante con el contenido matemático (Flores-Medrano et al., 2015). Además, aquí se responde a la necesidad del profesor de conocer el modo de pensar del alumno frente a las actividades y tareas matemáticas, por lo que hace referencia al conocimiento sobre teorías de aprendizaje (personales o institucionalizadas) que pueda tener el profesor; las fortalezas y dificultades, obstáculos o errores típicos, con relación al aprendizaje de un determinado contenido; como también los conocimientos sobre las formas de interacción del alumnado con el contenido matemático (Escudero, 2015).

Este subdominio se compone de categorías, que se presentan a continuación teniendo en cuenta lo descrito por Carrillo-Yáñez et al. (2018). Las *Teorías del aprendizaje matemático*, en la que se manifiesta la necesidad de que el docente sea consciente de cómo los estudiantes piensan y construyen conocimiento al abordar actividades y tareas matemáticas; las *Fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas*, aquí, se tiene en cuenta la conciencia de dónde los estudiantes tienen dificultades y fortalezas, de forma general o con respecto a un contenido matemático en particular. También, las *formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático*, en esta se consideran las estrategias (convencionales o no convencionales) que utilizan los estudiantes para hacer matemáticas, así como la terminología utilizada para hablar de contenidos específicos además, en los *Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas*, se evidencian aspectos cotidianos que estimulan la motivación, las expectativas y los intereses de los estudiantes con relación a las matemáticas.

Teoría APOE

En esta teoría se consideran mecanismos y estructuras mentales que conducen a la construcción de conceptos matemáticos, las cuales se detallarán a continuación según Arnon et al. (2014). En primer lugar, se dice que un estudiante muestra una estructura tipo *Acción* si realiza transformaciones de un objeto dirigido externamente; en la estructura *Proceso* se realiza la misma operación que la Acción solo que totalmente en la mente del individuo sin tener que realizar cada paso de manera explícita. El mecanismo por el que una Acción pasa a ser un Proceso se denomina *Interiorización*. Cuando el estudiante reflexiona sobre las operaciones que aplicó a un Proceso como un todo y puede identificar tales transformaciones, se dice que el Proceso ha sido *Encapsulado* en un *Objeto*. A la colección coherente de las estructuras de Acción, Proceso y Objeto, así como las conexiones que se establecen entre ellas, se le denomina *Esquema*.

La Teoría APOE define la Descomposición Genética (DG) como un modelo hipotético que predice y describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar construir para aprender un concepto matemático específico, que se deducen del análisis de los datos recopilados en los diseños experimentales. Siendo una herramienta mediante la cual los investigadores intentan explicar las razones detrás de las dificultades de los estudiantes. En esta investigación se utilizará la DG propuesta por Cottrill et al. (1996), en la que se describen de manera teórica las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante podría necesitar construir para aprender el concepto de límite. En total se compone de siete pasos, los tres primeros pasos de esta DG corresponden con la concepción dinámica o informal de límite y del cuarto paso en adelante corresponden con la concepción formal o métrica del límite. Para este estudio, las actividades propuestas requieren de las estructuras que corresponden a la concepción dinámica (ver Tabla 1).

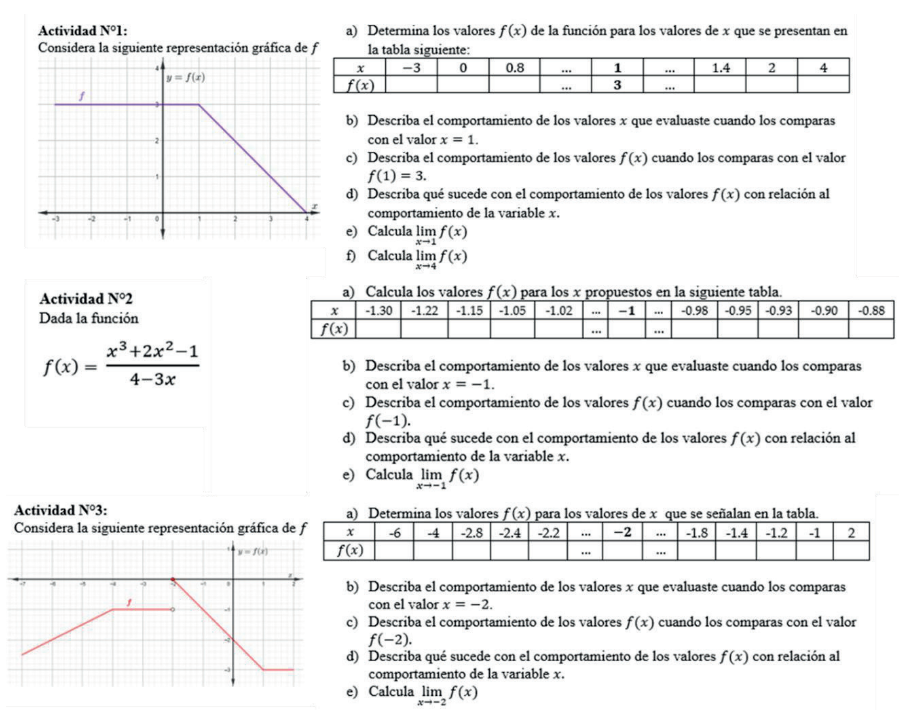
Tabla 1. Descomposición Genética del concepto de límite

Pasos	Descripción	
DG1	La acción de evaluar f en un solo punto x que se considera cercano, o incluso igual al valor a.	
DG2	La acción de evaluar la función f en unos pocos puntos, cada punto sucesivo más cercano al valor a que el anterior.	
DG3	Construcción de un esquema coordinado de la siguiente manera:	
	(A)	Interiorización de la acción del paso 2 para la construcción de un proceso en el dominio en el que x se aproxima al valor a .
	(B)	Construcción de un proceso en el rango en el que y se aproxima al valor L.
	(C)	Coordinación de (A), (B) a través de f .

Fuente: Cottrill et al. (1996).

Metodología

La naturaleza de esta investigación es cualitativa (Hernández-Sampieri et al., 2014) con una perspectiva interpretativa (Bassey, 2003), donde se implementó como diseño metodológico un estudio de caso instrumental (Stake, 2007). Este caso, se llevó a cabo con un profesor de matemáticas (ingeniero químico) que imparte en el nivel medio superior, en el que cuenta con 8 años de experiencia. En este nivel académico, los estudiantes tienen entre 15 y 18 años. En adición, sobre el ciclo de investigación propuesto por la teoría APOE, se implementó el componente de análisis y verificación de datos (Arnon et al., 2014), con la utilización de una DG sobre el límite de una función (Tabla 1) y con la aplicación de actividades diseñadas bajo esta DG, pero no con la intención de validar la DG ni de rediseñar las actividades, sino de relacionar los resultados de este análisis con el que se hizo a través de las categorías del KFLM. La recolección de datos se llevó a cabo por medio de tres actividades sobre el límite de funciones, diseñadas previamente por Morante (2020) bajo el enfoque de la Teoría APOE, que fueron resueltas por el profesor. En conjunto, se realizó una entrevista semiestructurada, que se llevó a cabo por medio de la plataforma online Zoom y fue videograbada. Las actividades que el profesor resolvió se muestran en la Figura 1.


Actividad N°1:
Considera la siguiente representación gráfica de f

a) Determina los valores $f(x)$ de la función para los valores de x que se presentan en la tabla siguiente:

x	-3	0	0.8	...	**1**	...	1.4	2	4
$f(x)$				...	**3**	...			

b) Describa el comportamiento de los valores x que evaluaste cuando los comparas con el valor $x = 1$.
c) Describa el comportamiento de los valores $f(x)$ cuando los comparas con el valor $f(1) = 3$.
d) Describa qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x.
e) Calcula $\lim_{x\to 1} f(x)$
f) Calcula $\lim_{x\to 4} f(x)$

Actividad N°2
Dada la función

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2-1}{4-3x}$$

a) Calcula los valores $f(x)$ para los x propuestos en la siguiente tabla.

x	-1.30	-1.22	-1.15	-1.05	-1.02	...	**−1**	...	-0.98	-0.95	-0.93	-0.90	-0.88
$f(x)$						...		...					

b) Describa el comportamiento de los valores x que evaluaste cuando los comparas con el valor $x = -1$.
c) Describa el comportamiento de los valores $f(x)$ cuando los comparas con el valor $f(-1)$.
d) Describa qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x.
e) Calcula $\lim_{x\to -1} f(x)$

Actividad N°3:
Considera la siguiente representación gráfica de f

a) Determina los valores $f(x)$ para los valores de x que se señalan en la tabla.

x	-6	-4	-2.8	-2.4	-2.2	...	**−2**	...	-1.8	-1.4	-1.2	-1	2
$f(x)$						...		...					

b) Describa el comportamiento de los valores x que evaluaste cuando los comparas con el valor $x = -2$.
c) Describa el comportamiento de los valores $f(x)$ cuando los comparas con el valor $f(-2)$.
d) Describa qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x.
e) Calcula $\lim_{x\to -2} f(x)$

Figura 1. Actividades resueltas por el profesor. Fuente: Morante (2020).

Resultados y análisis

En esta investigación, el análisis inició con la transcripción de la entrevista, posteriormente, se analizó utilizando las categorías del KFLM propuestas por Carrillo-Yáñez et al. (2018) y usando los constructos *evidencia, indicio u oportunidad* descritos por Escudero (2015). Aquí surgieron un conjunto de evidencias de conocimiento en forma de descriptores, los cuales explican con precisión los conocimientos movilizados por el profesor al resolver las actividades y al predecir el comportamiento matemático de sus estudiantes. En segundo lugar, se analizaron las respuestas del profesor en las actividades y en la entrevista, desde el enfoque de la teoría APOE, describiendo las estructuras mentales que él considera que mostrarán sus estudiantes. Los resultados que se presentarán a continuación pertenecen a una investigación más amplia.

A continuación, se presenta en detalle el análisis de los resultados, mostrando las respectivas evidencias de conocimiento obtenidas a través de un análisis realizado con el sistema de categorías del MTSK, luego, dichas evidencias serán descritas a profundidad haciendo uso de la teoría APOE y de la DG, que se resumen en la Tabla 2.

KFLM-1: Conoce y prevé los errores y fortalezas que pueden evidenciar los estudiantes al describir el comportamiento de una función

Esta evidencia guarda relación con el inciso (d) de las tres actividades, en el que se pide al profesor que “describa qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x”. El profesor considera que este ítem sería el más complicado a resolver por sus estudiantes, mencionando que:

> “Lo más probable sería que en el inciso (d) tengan una traba, pero no porque no identifiquen la función, a veces lo que más se les complica es el manejo algebraico.”

Queda en evidencia que, el profesor relaciona dicho ítem con que sus alumnos describan el comportamiento de la función en términos de procedimientos algebraicos, o como se evidencia a continuación, en describir su comportamiento en términos de crecimiento o decrecimiento, así como el cálculo de su ecuación, dominio y rango.

> “Para la definición de las dos funciones, esperaría que determinaran la función de la recta, por ejemplo, que es decreciente, que determinarán su pendiente, la intersección de la recta, con el objetivo de determinar la función a través del intervalo de uno a cuatro…”

En las actividades 1 y 3, el docente aseguró que sus estudiantes calcularían una expresión algebraica, el dominio, el rango y las intersecciones de la función. A partir de esto, se puede afirmar que, cuando el docente intenta predecir lo que harán sus estudiantes se ve influenciado por la gráfica de la función y, entonces, en su predicción se ven argumentos que están relacionados con el comportamiento de la función, pero que se alejan del Proceso de aproximación que ocurre en el dominio y en el rango de la función (Procesos DG3(A) Y DG3(B) de la DG). Es decir, a pesar de que se le pregunta por el comportamiento en términos de la aproximación, el docente considera que sus estudiantes calcularán la expresión algebraica de la función, su dominio, rango, intercepciones, etc., que posiblemente corresponda a lo que habitualmente hacen en clase. Todo esto, corresponde a Acciones que el profesor considera que sus estudiantes realizarán para describir el comportamiento de la función.

KFLM-2 y KFLM-5: Conoce y prevé si los estudiantes tendrán dificultades para identificar la aproximación de los valores de x, así como la manera en que perciben la aproximación en el dominio de la función.

En este resultado se relacionan dos evidencias de conocimiento, pertenecientes a dos categorías diferentes del KFLM (ver Tabla 2) y que se vinculan con lo que se pide realizar en el inciso (b) de las actividades propuestas al profesor. El inciso en mención solicita al informante: “describa el comportamiento de los valores de x que evaluaste cuando los comparas con el valor $x = a$”. En la segunda actividad el profesor predice que:

> “…no habría ningún problema, considero que esa parte si la pudiesen realizar, identificarían que x, en este caso lo que se le está pidiendo, cuando yendo a -1, pues es que se está aproximando a ese -1.”

Así, el profesor afirma que sus estudiantes darán cuenta de la aproximación a $x = -1$ en el dominio de la función, es decir, que mostrarán evidencia del Proceso de aproximación en el dominio (DG3(A)). Vale la pena mencionar que, el profesor no informa sobre lo que espera que sus estudiantes realicen para el paso DG3(B), es decir, con respecto a la aproximación en el rango de la función que se solicita en el inciso (c) de las actividades.

KFLM-3 y KFLM-6: Conoce y prevé dónde los estudiantes tienen dificultades, así como las estrategias convencionales que los estudiantes utilizan cuando calculan el límite de una función.

En esta ocasión, se identifica nuevamente una relación entre dos evidencias de conocimiento, cada una perteneciente a una de las dos categorías analizadas en este estudio (ver Tabla 2), las cuales, guardan al mismo tiempo relación con el inciso (e) de las actividades. En este inciso se pide al profesor que calcule el límite de la función en el valor de interés. Así, para la predicción, el profesor considera que sus estudiantes tendrán dificultad para comprender el concepto de límite como una aproximación, mencionando lo siguiente:

> “Se guiarían mucho por la gráfica, primero resolverían el límite, pero seguramente dirían que cuando $x = 4$ la función es cero, eso es lo que ellos asumirían que cuando $x = 4$ el punto es (4,0), sin embargo, como que todavía no se concibe el concepto de límite correctamente. […] creo que eso es lo que les costaría un poco de trabajo, identificar que es una aproximación.”

Con respecto al proceder de sus estudiantes, el docente considera que para calcular el límite de la función pueden tener una dificultad, ya que para afirmar si este límite existe no lo harán estudiando el comportamiento de los valores cercanos al valor de interés por la izquierda y por la derecha, es decir, por límites laterales, afirmando que:

> “…en la evaluación del límite considero que no harían la evaluación del límite tanto por la izquierda como por la derecha, ese también sería uno de los errores que posiblemente tengan.”

Con base en lo anterior, se puede afirmar que el profesor considera que sus estudiantes realizarán Acciones al calcular el límite de la función, pero que no coordinarían los Procesos de aproximación por la derecha y por la izquierda (DG3(C)).

KFLM-4: Conoce la forma cómo interactúan sus estudiantes con una tabla de valores.

Como en los casos anteriores, para esta evidencia de conocimiento también se identificó que se relaciona con uno de los incisos de las actividades, en esta oportunidad con el inciso (a), en el que se pide al profesor: “determine los valores $f(x)$ para los valores de x que se señalan en la siguiente tabla”, es decir, que evalúe en la función los valores de x propuestos en una tabla de valores. Cabe destacar que, la función es presentada en su forma algebraica (como es el caso de la actividad N°2) o en su registro gráfico (como ocurre con las actividades N°1 y N°3). Así, para realizar esta tabulación el profesor espera que sus estudiantes no tengan ningún inconveniente y la realicen de manera correcta, por lo que, de manera implícita, predice que sus estudiantes mostrarán evidencias de la estructura mental Acción correspondientes a los pasos DG1 y DG2. El profesor afirma:

> "...como ya tenemos la gráfica, entonces, si espero que identifiquen puntos en la gráfica para poder completar la tabla, [...] por lo regular, siempre inician con la tabulación cuando les das una función, ellos inician de manera automática con la tabulación, [...] entonces, con respecto a la tabulación, pues no, no tendrían inconveniente."

Tabla 2. Evidencias de conocimiento del KFLM y estructuras mentales que el profesor predice

Categorías del KFLM	**Evidencias de conocimiento**	**Estructura mental a la que hace referencia**
Fortalezas y Debilidades en el Aprendizaje de las Matemáticas	1. Conoce y prevé los errores y fortalezas que pueden evidenciar los estudiantes al describir el comportamiento de una función	Acciones
	2. Conoce y prevé que los estudiantes tendrán dificultades para identificar la aproximación de los valores de x	Proceso
	3. Conoce y prevé que los estudiantes tienen dificultades cuando calculan el límite de una función	Acciones
Maneras en que los estudiantes Interactúan con el Contenido Matemático	4. Conoce la forma cómo interactúan sus estudiantes con una tabla de valores	Acciones
	5. Conoce la manera en que los estudiantes perciben la aproximación de los valores de x en el dominio de la función	Proceso
	6. Conoce las estrategias convencionales que los estudiantes utilizan para resolver ejercicios relacionados con el límite de una función	Acciones

Fuente: Elaboración propia.

Conclusiones

Acerca del conocimiento que posee el profesor sobre las Características de Aprendizaje, se encontró que en la categoría de Fortalezas y Debilidades en el aprendizaje de las Matemáticas el profesor cree que sus estudiantes realizarán Acciones al evaluar la función y completar una tabla de valores, al describir el comportamiento de la función y cuando calculen el límite en el valor de interés. Para la categoría Maneras en que los estudiantes interactúan con el contenido matemático, el profesor espera que sus estudiantes muestren Acciones al interactuar con la tabla de valores y al resolver ejercicios que se relacionan con el límite de la función. Ahora bien, en ambas categorías, el profesor considera que sus estudiantes mostrarán el Proceso de aproximación en el dominio de la función. Sin embargo, el profesor no informó sobre este Proceso en el rango de la función, pero sí que tendrían dificultades para mostrar el Proceso coordinado.

Consideramos que este es un primer acercamiento a una forma de utilizar la Teoría APOE y el Modelo MTSK, que permite explicar con mayor profundidad el conocimiento que es propio del profesor y que se puede caracterizar de manera sistemática con ayuda del MTSK.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Oktac, A., Roa, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?. *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554
Bassey, M. (2003). Case study research in educational settings. Open University Press.

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., y Montes, M.A. (Eds.). (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.* Universidad de Huelva Publicaciones. https://doi.org/10.13140/2.1.3107.4246

Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167–192.

Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria* [Tesis doctoral, Universidad de Huelva]. http://hdl.handle.net/10272/11456

Escudero-Ávila, D., y Carrillo, J. (2020). El Conocimiento Didáctico del Contenido: Bases teóricas y metodológicas para su caracterización como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Educación Matemática 32*(2), 8–38. https://doi.org/10.24844/em3202.01

Escudero-Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C., y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 10*(1), 53–77. https://doi.org/10.30827/pna.v10i1.6095

Flores, E., Escudero, D. I., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275–282). SEIEM.

Flores-Medrano, E., Escudero-Avila, D., Montes, M., y Carrillo, J. (2015). ¿Cómo se relaciona el conocimiento que tiene el profesor acerca del aprendizaje de las matemáticas con su entendimiento sobre los espacios de trabajo matemático? En I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak, P. R. Richard (Eds.), *Cuarto Simposio Internacional ETM* (pp. 473–484). Instituto de Matemática Interdisciplinar.

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6.a ed.). McGraw-Hill Interamericana.

Morante, J. (2020). *Una secuencia didáctica para la construcción de la definición formal del límite de una función basada en teoría APOE* [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla].

Sosa, L., Aguayo, L., y Huitrado, J. (2013). KFLM: Un entorno de aprendizaje para el profesor al analizar los errores de los estudiantes. En C. Dolores, M. García, J. Hernández, y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: la formación de profesores* (pp. 279–298). Díaz de Santos.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos* (4.a ed.). Morata.

EL MTSK COMO MODELO PARA DESARROLLAR EL NOTICING EN FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

The MTSK as a model for developing noticing in future mathematics teachers.

López, L.[a], Zakaryan, D.[a], Guerrero, C.[a]

[a] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Temática: 5 –Extensiones del MTSK

Resumen.
El noticing es una competencia crucial para los profesores. En educación matemática, el noticing está relacionado con el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK). En esta comunicación, presentamos los resultados de un Taller que investigó el desarrollo del noticing en futuros profesores de matemáticas utilizando el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). Analizamos los niveles de noticing en las dimensiones de atención selectiva e interpretación de una participante. Los datos se recopilaron a partir de un vídeo, a través de cuestionarios y foro online. Nuestros hallazgos revelaron que, después de razonar sobre situaciones de caso desde la mirada del MTSK, la participante mostró mejoras en los niveles de atención selectiva, pero no en los niveles de interpretación. Esta investigación sugiere preguntas para futuros trabajos relacionados con el desarrollo de ambos constructos.

Palabras clave. Noticing, PCK, Desarrollo, MTSK.

Abstract.
Noticing is a crucial competence for teachers. In mathematics education, noticing is related to Pedagogical Content Knowledge (PCK). In this communication, we present the results of a Workshop that investigated the development of noticing in prospective mathematics teachers using the Mathematics Teacher Specialist Knowledge (MTSK) model. We analyzed the levels of noticing in the dimensions of selective attention and interpretation of one participant. Data were collected from a video, through questionnaires and online forum. Our findings revealed that, after reasoning about case situations from the MTSK gaze, the participant showed improvements in selective attention levels, but not in interpretation levels. This research suggests questions for future work related to the development of both constructs.

Keywords. Noticing, PCK, Development, MTSK.

López, L., Zakaryan, D. y Guerrero, C. (2023). El MTSK como modelo para desarrollar el noticing en futuros profesores de matemáticas. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 312-319). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

El noticing se refiere a la competencia de los profesores para identificar y comprender los aspectos importantes de las situaciones de enseñanza y aprendizaje en el aula (Köning et al., 2022, van Es y Sherin, 2021). En el campo de la educación matemática, esta habilidad es crucial, ya que permite a los profesores tomar decisiones informadas sobre cómo enseñar y cómo apoyar el aprendizaje de sus estudiantes, y a la vez, les brinda la oportunidad de razonar sobre su propia práctica docente y mejorar de manera continua (Köning et al., 2022; Mason, 2002; van Es y Sherin, 2002, 2021). Si bien el noticing no se considera como un subdominio del conocimiento (Sherin et al., 2011), la literatura especializada sugiere que está estrechamente relacionado con el conocimiento del profesor de matemáticas (Köning et al., 2022; van Es y Sherin, 2002, 2021).

Entre las diferentes dimensiones del conocimiento del profesor de matemáticas, el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK, por sus siglas en inglés), es considerado un dominio clave. Este dominio permite a los profesores analizar, establecer conexiones entre lo que observan y los principios más amplios de la enseñanza y el aprendizaje, y adaptar su enseñanza en respuesta a ello. Para lograrlo, es necesario que desarrollen la habilidad de prestar atención (noticing) a los eventos relevantes que ocurren en el aula (van Es y Sherin, 2002, 2021).

De manera recíproca, el noticing ayuda a desarrollar el PCK de los profesores al permitirles observar y comprender las interacciones entre los estudiantes y el contenido que se enseña. Al desarrollar la habilidad de notar, los profesores pueden ajustar la enseñanza para satisfacer las necesidades de los estudiantes y mejorar su comprensión del contenido (van Es y Sherin, 2002, 2021). De este modo, pueden mejorar la comprensión de su práctica (Carrillo et al., 2014).

Por lo anterior, autores como van Es y Sherin (2002, 2021) y Kaiser y Yang (2023), proponen estrategias para ayudar a futuros profesores de matemáticas a desarrollar su competencia de noticing. Una estrategia ampliamente reconocida consiste en brindarles oportunidades para observar y analizar videos de enseñanza. Además, se destaca la importancia de brindarles a los futuros profesores oportunidades para desarrollar su PCK (van Es y Sherin, 2002; 2021). En esta comunicación, se presentan algunos de los resultados obtenidos de una sesión taller dedicada a desarrollar la competencia noticing de futuros profesores de matemáticas a través del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés).

Referentes teóricos

MTSK: Conocimiento didáctico del contenido

El MTSK (Carrillo-Yañez et al., 2018) se compone de tres dominios: el conocimiento matemático (MK), el conocimiento didáctico del contenido (PCK) y las creencias del profesor que se encuentran en el núcleo del modelo. Tanto el MK como el PCK consideran tres subdominios, los cuales, a su vez, se dividen en categorías. En esta comunicación nos enfocaremos solo en el dominio PCK, el cual se compone de los siguientes subdominios:

*Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT):*se refiere al conocimiento que tiene el profesor sobre la manera de enseñar el contenido matemático y su potencialidad. Por ejemplo, conocer las potencialidades y limitaciones del uso de diversos recursos tanto materiales como digitales para la enseñanza de las sucesiones, el límite o los fractales (Geogebra, tangrams, puzzles, calculadora, etc.), y las estrategias, técnicas, tareas y ejemplos que se pueden diseñar y/o utilizar para la enseñanza de dichos temas.

Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM): conocimiento de las características del proceso de comprensión de los estudiantes sobre los distintos contenidos, del lenguaje asociado a cada concepto, así como de errores, dificultades u obstáculos posibles. Por ejemplo, conocer las dificultades que presentan los estudiantes para encontrar el siguiente término o el término general de una sucesión.

Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS): conocimiento acerca de lo que el estudiante debe/puede alcanzar en un curso escolar determinado. Es aquello que el profesor sabe sobre las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se promueve en determinados momentos educativos. Por ejemplo, el conocimiento del profesor sobre los cambios curriculares que ha tenido el tema de las sucesiones o de límite de sucesiones en los últimos años.

En síntesis, el MTSK proporciona un marco sólido para comprender y caracterizar el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas.

Noticing

De acuerdo con la teoría propuesta por van Es y Sherin (2021), el noticing se compone de tres dimensiones: atención, interpretación y acción. En esta ocasión, nos centraremos en las dos primeras dimensiones.

La dimensión de *atención selectiva* se refiere a la capacidad de los profesores para identificar los eventos notables que ocurren en el aula. Según Mason (2002), los profesores con una mayor sensibilización para la observación pueden notar de manera intencional características, eventos, interacciones, formas de pensamiento, estrategias, entre otros aspectos que surgen en el aula, lo que les permite mejorar su práctica docente. Asimismo, van Es y Sherin (2021), indican que cuanto más enfocado esté el profesor en el pensamiento de los estudiantes o en los conceptos matemáticos, menos atención prestará a otros aspectos que surgen de las interacciones y que no son relevantes para la enseñanza.

La dimensión *interpretación* se refiere a la capacidad de los profesores para hacer conexiones entre un hecho específico y las ideas más amplias que este representa (van Es y Sherin, 2021). Esta dimensión incluye una amplia gama de procesos cognitivos (Sherin, 2007). Entre ellos *dar sentido y conectar* lo observado, esto se refiere a que los profesores utilizaran lo que saben sobre las matemáticas, los alumnos, el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas junto con sus experiencias previas como profesores y alumnos de matemáticas, y la escolarización en general, para dar sentido e interpretar lo observado (van Es y Sherin, 2021). Es decir, el profesor de matemáticas debe utilizar su MK y su PCK para interpretar los eventos notables observados. Además, van Es y Sherin (2021) declaran tres formas recurrentes de interpretación por parte de los profesores: describir, evaluar e interpretar. Estas van en una escala de menor a mayor complejidad y precisión.

A partir de van Es (2011) se establecen cuatro niveles de noticing. En el ***nivel base***, los participantes, en este caso los futuros profesores que observan el vídeo se enfocan en el ambiente, el comportamiento y el aprendizaje general de toda la clase, considerando a los estudiantes como un conjunto. Además, se centran en los aspectos pedagógicos del profesor que imparte la clase en el vídeo. En este nivel, algunos participantes pueden prestar atención a detalles irrelevantes que no tienen un impacto directo en el aprendizaje de los alumnos. Desde la interpretación, forma impresiones generales de lo que ocurre, proporciona comentarios descriptivos y evaluativos, y proporciona poca o ninguna evidencia para apoyar el análisis.

En el ***nivel mixto***, los participantes continúan centrándose en los aspectos pedagógicos del profesor, pero comienzan a prestar atención a los aspectos específicos de los conceptos matemáticos, así como al pensamiento matemático y el comportamiento de los alumnos. Además, forma impresiones generales y resalta eventos o detalles dignos de mención; y proporciona comentarios principalmente evaluativos con algunos comentarios interpretativos

En el ***nivel enfocado***, los participantes dirigen su atención a aspectos matemáticos particulares y posibles confusiones relacionadas con los enfoques de enseñanza. También prestan atención al pensamiento matemático de alumnos específicos. Desde la interpretación, proporciona comentarios interpretativos, y hace referencia y detalla cuidadosamente sobre dificultades, acontecimientos e interacciones específicas de los alumnos.

En el ***nivel extendido***, los participantes observan la relación entre el pensamiento matemático de alumnos específicos y las estrategias de enseñanza utilizadas por el profesor. En este nivel, los participantes demuestran una capacidad avanzada para analizar y comprender las interacciones complejas entre el profesor, los alumnos y los contenidos matemáticos.

En conclusión, el noticing está relacionado con el desarrollo del conocimiento didáctico del contenido y contribuye a enriquecer las competencias profesionales de los profesores de matemáticas.

Metodología

Desde un enfoque cualitativo, exploramos el desarrollo del noticing y el conocimiento didáctico del contenido de futuros profesores de matemáticas, que se manifiesta cuando observan una sesión de clase sobre la enseñanza de sucesiones.

Participantes

Los informantes de esta investigación fueron 32 futuros profesores de matemáticas que se encontraban en su octavo u noveno semestre de la carrera de Pedagogía en Matemáticas y, en abril de 2023, al momento de realizar el estudio, cursaban la asignatura Taller que tenía por objetivo analizar diferentes situaciones de aula. Previo a esta asignatura, habían cursado Cálculo, Álgebra lineal, Teoría de números, Didáctica de los sistemas numéricos, entre otros.

Instrumentos y proceso de recogida de datos

En la primera sesión, se presentó un vídeo a los participantes de una duración de 9:51 minutos que proyectaba determinados momentos de una clase de una profesora que imparte el tema de sucesiones, como previa a la enseñanza al límite de sucesiones. Como instrumento de recogida de datos, los participantes respondieron tres cuestionarios. El primer cuestionario con una única indicación: *"En función de lo que puedas observar o escuchar en el vídeo, en el espacio asignado escribe todos los aspectos que te llamaron la atención"*; el video fue mostrado una vez y la duración de este momento fue de veinte minutos. En el segundo cuestionario, se les solicitaba responder tres preguntas específicas orientadas a observar el conocimiento de la profesora del video: *"a) ¿Qué conocimientos matemáticos consideras que pone en práctica la profesora? b) ¿Qué conocimientos sobre cómo enseñar matemáticas manifiesta la profesora? c) ¿Qué conocimientos curriculares de la profesora se pueden identificar en el vídeo?"*, este momento también tuvo una duración de veinte minutos.

En un último momento, se les proporcionó el vídeo junto con el tercer cuestionario con preguntas abiertas, pero con la diferencia que para responderlo se organizaron en equipos de tres integrantes. Este último momento tuvo una duración de 90 minutos, Adicionalmente se les solicitó la elaboración de un informe en equipos donde nuevamente debían analizar el video y responder algunas interrogantes que se les plantearon. En los tres momentos, al culminar el tiempo designado, entregaron los cuestionarios completados a los investigadores.

En la segunda sesión, los investigadores profesores del Taller les presentaron a los futuros profesores aspectos básicos constitutivos del MTSK y les invitaron a responder una pregunta plasmada en un foro del aula virtual: "Considere el video observado (...) y responda a la siguiente pregunta: Con base en el modelo MTSK ¿qué observa en el video?"

Análisis de datos

Los datos obtenidos se estudiaron a la luz de las dimensiones y niveles del noticing (van Es, 2011) y de los subdominios y categorías del MTSK (Carrillo-Yañez et al., 2018), particularmente, los del PCK. Para el análisis se utilizaron las actividades desarrolladas de manera individual, de esta forma se identificaron dos momentos: (1) Análisis del primer y segundo cuestionario y, (2) Análisis de las respuestas del foro. En esta comunicación expondremos el caso de Julia (seudónimo). Seleccionamos a Julia porque desde el inicio del taller demostró iniciativa e interés en el desarrollo de las actividades tanto en la presentación del vídeo como en la explicación del modelo MTSK, y mostró mucho interés en la retroalimentación de sus respuestas. Posteriormente, en la respuesta del foro realizó un análisis más detallado frente al trabajo de otros compañeros. Fue una de las participantes que realizó todas las actividades propuestas en el Taller.

Finalmente, a través de un análisis cruzado entre categorías de ambos constructos teóricos, se establecen resultados sobre el desarrollo de la competencia noticing para el PCK en los futuros profesores de matemáticas. Los datos fueron triángulos entre fuentes de datos e investigadores.

Resultados y Discusión: El caso de Julia

Los resultados y la discusión se presentan en consideración a los momentos previamente determinados.

Primer momento

En el primer cuestionario Julia hace comentarios pedagógicos:

1. Mientras la profesora explica, hay una estudiante de espalda.
2. En general, los estudiantes responden a lo que la profesora pregunta

Los comentarios anteriores no son de extrañar, ya que es frecuente que los docentes prioricen los aspectos generales del aula sobre los aspectos matemáticos (van Es, 2011). En estos comentarios, no se evidencian conocimientos ni creencias vinculados a las matemáticas y su enseñanza, sino que se refiere principalmente a situaciones relacionadas con el ambiente y el comportamiento en el aula (nivel atención base). Desde la interpretación, lo que se presenta es una impresión general de lo sucedido, describe lo que sucede (nivel base). En los siguientes dos comentarios, Julia comienza a prestar atención a aspectos matemáticos:

3. La profesora realiza muchas preguntas dirigidas, lo que ayuda en la participación de la clase.
4. La profesora comete un error, pero se dio cuenta cuando un estudiante le pregunta algo de eso, pero lo resuelve de buena forma.
5. La forma en la que enseña el concepto de infinito, como el presentar el Triángulo de Sierpinski

En [3] la idea de preguntas dirigidas apunta a preguntas que dirigen la enseñanza de las matemáticas (ver [7]). En [4] el error mencionado se refiere a que la profesora primero escribe $\frac{3}{4} \cdot A$ pero cuando un estudiante le consulta sobre la actividad que está realizando, la profesora borra y escribe $\frac{1}{4}A$. Desde la interpretación, los tres comentarios siguen siendo descripción (nivel base) mientras que en atención selectiva se ubicarían en nivel mixto, ya que comienza a fijarse en aspectos matemáticos.

En el segundo cuestionario, al consultarle sobre los conocimientos sobre cómo enseñar matemáticas que manifiesta la profesora, Julia plantea:

> 6. Ir de lo más “básico” a lo más “complejo”
> 7. Realizar preguntas dirigidas

Mientras que al consultarle sobre qué conocimientos curriculares de la profesora se pueden identificar en el vídeo ella establece:

> 8. Utilizar diferentes representaciones para dar a conocer el concepto de infinito
> 9. Utilizar las TICS en la clase (PPT)

Aunque en el cuestionario se preguntaba de manera directa sobre el conocimiento, Julia no responde sobre ello. En [6], [7] y [9] los comentarios siguen teniendo un matiz orientado más a lo pedagógico, aunque pensamos que Julia considera dichas acciones como estrategias propias de la enseñanza de las matemáticas (principalmente a la pedagogía del profesor) por lo que estaría en un nivel de atención mixto. En [8] incluye conceptos matemáticos, por lo que está en atención nivel mixto. Desde el modelo MTSK [8] y [9] no corresponden a conocimientos curriculares sino al KMT. Finalmente, en [6-9] las respuestas de Julia siguen siendo una interpretación descriptiva (nivel base).

En síntesis, en este primer momento, el noticing de Julia respecto a la atención selectiva se manifiesta principalmente en un nivel mixto, mientras que la interpretación se ubica en un nivel base.

Segundo momento

En el segundo momento, Julia realiza una tabla con las distintas categorías el MTSK, donde señala que su trabajo consistirá en responder si se evidencian o no en el vídeo. Así para el KMT Julia expone:

> 10. Teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático (formales y/o personales): Pareciera que está utilizando la Teoría de los Registros de Representaciones Semióticas, pues mediante las diferentes representaciones mencionadas anteriormente, da a entender qué es lo que ocurre por ejemplo, con el área de cada uno de los triángulos (...). Respecto de su teoría de enseñanza personal, no se puede asegurar, pero sí se nota que hace preguntas dirigidas hacia los estudiantes para que puedan participar de la clase.
>
> 11. Recursos materiales/ virtuales para la enseñanza de un determinado contenido: Se evidencia un link de GeoGebra que no es asegurable si se utilizó o no, y un uso de PPT mediante un proyector que se ve en muy buen estado, lo que favorece la atención del estudiantado.
>
> 12. Las estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático: En general presenta el conocimiento necesario para brindar retroalimentación cuando los estudiantes así lo requieren, mediante devoluciones, ejemplos y conexiones entre contenidos. Por ejemplo, cuando pregunta ¿el área puede ser cero?

En [10] vemos que sigue atendiendo las representaciones como en [8] pero ahora incorpora la Teoría de Representaciones Semióticas (Duval, 1999). Además, sigue presente la idea de que hacer preguntas dirigidas, algo que la profesora hace a lo largo de todo el vídeo y que Julia menciona en [1], [2], [4] y [7], es parte de una teoría matemática. Todo lo anterior otorga a Julia un nivel de atención enfocado. Respecto a la dimensión interpretación, sube a un nivel mixto ya que, aunque sigue dando comentarios descriptivos resalta detalles dignos de mención y empieza a referirse a eventos e interacciones específicas como evidencia.

En [11] retoma a [9], con la diferencia que esta vez da evidencia de que se fijó en un enlace a GeoGebra además del uso de una presentación para dirigir la clase. La atención está en un nivel mixto. Respecto a la interpretación, aunque sigue siendo a un nivel base esta vez realiza comentarios descriptivo-evaluativos.

En [12] aunque nota que la profesora tiene conocimiento sobre cómo brindar retroalimentación a través de devoluciones, ejemplos y conexiones entre contenidos, sólo remite a una pregunta realizada por un estudiante *¿el área puede ser cero?* No explica sobre a quién se refiere. Desde el punto de vista de la atención, está en el nivel enfocado. Desde la interpretación, siguen siendo comentarios descriptivos.

Al analizar los niveles de noticing de Julia, podemos observar que desde la Atención Selectiva ha subido de nivel y se encuentra en un nivel enfocado, ya que atiende aspectos particulares de las matemáticas. No obstante, desde la interpretación, aunque presenta mejoras en ciertos momentos, sigue siendo en un nivel base.

Por cuestiones de espacio no se presentan los comentarios realizados para el KFLM. Sin embargo, los resultados son similares, la atención se coloca en aspectos matemáticos y la relación de ellos con la profesora y estudiantes. Así para la atención selectiva se mueve entre el nivel de atención mixto y enfocado, mientras que para la interpretación sigue siendo mayormente un nivel base. Para el KMLS, es de indicar que Julia solo indica que no hay evidencia para responder, por ejemplo:

> 13. Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado para un contenido en un determinado momento escolar: Tampoco es algo que se pueda asegurar, al igual que en la anterior, solo se puede saber preguntándole a la profesora acerca de lo que cree respecto del nivel de desarrollo conceptual o procedimental que tienen sus estudiantes.

Al analizar la trayectoria de Julia entre sesiones, se percibe como ella comenzó haciendo comentarios pedagógicos sobre el ambiente y comportamiento en el aula, y levemente fijándose en aspectos matemáticos. Posteriormente, comenzó a fijarse en cuestiones matemáticas. Desde el noticing, su nivel en atención selectiva mejoró, aunque su interpretación aún se mantuvo en un nivel base, limitándose a describir lo que sucedía sin profundizar en las implicaciones o conexiones de los diferentes elementos observados. Esto se observa en la Figura 1, que muestra los distintos niveles de noticing de Julia y cómo cambiaron entre momentos.

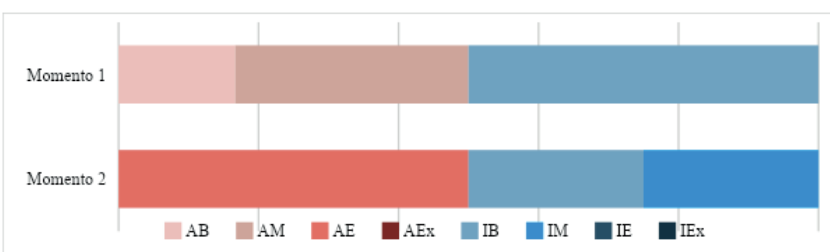


Figura 1. Síntesis de resultados sobre los cambios entre niveles de noticing en Julia.
Nota. AB: Atención nivel base, AM: Atención nivel mixto, AE: Atención nivel enfocado, AEx: atención nivel extendido. IB: Interpretación nivel base, IM: interpretación nivel mixto, IE: Interpretación nivel Enfocado, IEx: Interpretación nivel extendido.

Reflexiones finales

Como se mencionó anteriormente, es importante destacar que ofrecer oportunidades a futuros profesores para desarrollar su competencia de noticing y su PCK es fundamental. En esta comunicación, hemos descrito cómo, después de una sesión enfocada en el MTSK, una futura profesora de matemáticas mejoró su nivel de atención selectiva. Sin embargo, en términos de la dimensión de interpretación, no se observaron cambios sustanciales. Reconocemos que no se pueden generalizar resultados para todos los profesores, pero el trabajo realizado permite plantear preguntas que guiarán futuros trabajos de investigación. Por ejemplo, ¿cómo podría el MTSK contribuir a mejorar la capacidad de interpretación de los profesores en formación?, ¿Qué estrategias o actividades pueden promover el desarrollo de la dimensión de interpretación?

Estas interrogantes invitan a reflexionar sobre las mejores prácticas en la formación de profesores y cómo podemos diseñar intervenciones efectivas que fortalezcan tanto la capacidad de atención selectiva como la habilidad para reconocer e interpretar eventos notables de una manera más profunda. Investigar y abordar estas preguntas contribuirá a mejorar la preparación de los futuros profesores y a potenciar su capacidad para analizar, comprender y responder de manera efectiva a las complejidades del aula de matemáticas.

Agradecimientos

Con el apoyo de Beca ANID Doctorado Nacional de Chile año 2021, folio: 21210589; y ANID FONDECYT REGULAR No. 1230434. Este trabajo está vinculado a la Red MTSK de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

Referencias

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carrrillo, J., Huitrado, J.L., Vasco, D., Zakaryan, D., y Contreras, L.C.. (2014). Nuestras concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En J. Carrillo, L.C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Avila, E. Flores-Medrano, y M.A. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (pp.26-41). Universidad de Helva Publicaciones.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle.

Kaiser, G. y Yang, X. (2023). *Professional Noticing of Mathematics Teachers: state of the art and cultural influences*. [Seminario Web]. Universidad de Cape Coast.

König, J., Santagata, R., Scheiner, T., Adleff, A.-K., Yang, X., y Kaiser, G. (2022). Teacher noticing: A systematic literature review of conceptualizations, research designs, and findings on learning to notice. *Educational Research Review, 36*(100453). https://doi.org/10.1016/j.edurev.2022.100453

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing.* Routledge.

Sherin, M., Jacobs, V., y Philipp, R. A. (2011). Situating the study of teacher noticing. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 3-13). Routledge.

van Es, E. A., y Sherin, M. G. (2021). Extending on prior conceptualizations of teacher noticing. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 53*(1), 17-27. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01211-4

van Es, E. A., y Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10*(4), 571-596.

van Es. E.A. (2011). A framework for learning to notice student thinking. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 134-151). Routledge.

RELAÇÕES TEÓRICAS ENTRE O MATHEMATICS TEACHER'S SPECIALISED KNOWLEDGE E O CONHECIMENTO INTERPRETATIVO

Theoretical Relationships between Mathematics Teacher's Specialised Knowledge and Interpretative Knowledge

Silva, C.[a], Ribeiro, M.[a]

[a] Universidade Estadual de Campinas, Brasil

Temática: 5 –Extensões do MTSK

Resumo.
Estabelecemos possíveis relações entre as conceitualizações Mathematics Teacher's Specialised Knowledge e Conhecimento Interpretativo que tem subsidiado investigações sobre as especificidades do conhecimento do professor de matemática. O Conhecimento Interpretativo é especializado, envolvendo o conhecimento dos tópicos, da estrutura e da prática matemática que, em conjunto, fundamentam a prática matemática do professor associada a interpretar e atribuir significado às produções dos alunos e, posteriormente, tomar decisões pedagógicas mais informadas e que potenciem o entendimento matemático dos alunos. Ao entrelaçar essas teorias obtém-se um melhor detalhamento do conhecimento especializado do professor, inclusive estabelecer relações e complementações entre elas para melhor compreender as especificidades do conhecimento do professor de matemática.

Palavras-chave. MTSK, Conhecimento Interpretativo, Professor de Matemática, Formação de Professores.

Abstract.
We established possible relationships between the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge and Interpretive Knowledge conceptualizations that have supported investigations on the specificities of mathematics teacher knowledge. Interpretive Knowledge is specialised mathematical knowledge, involving knowledge of topics, structure and mathematical practice that together underlie the teacher to understand, interpret and attribute meaning to the students' productions and, subsequently, take pedagogical decisions. Interweaving these theories allows obtaining a better detailing of the teacher's specialized knowledge is obtained, including establishing relationships and complements between them to better understand the specificities of the mathematics teacher's knowledge.

Keywords. MTSK, Interpretive Knowledge, Mathematics Teacher, Teacher Education.ticing, PCK, Development, MTSK.

Silva, C. y Ribeiro, M. (2023). Relações teóricas entre o mathematics teacher's specialised knowledge e o conhecimento interpretativo. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 320-327). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introdução

Ao professor de matemática é requerido um conhecimento profissional relacionado com a prática de possibilitar que os seus alunos entendam matemática, e esse conhecimento é parte tanto do conhecimento matemático, quanto do pedagógico. Concebe-se o conhecimento do professor de matemática como especializado, pois é específico para essa prática profissional e inclui, entre outros, conhecer os procedimentos para resolver um problema, as propriedades, as definições e os fundamentos de um tópico, bem como as conexões entre tópicos e envolvendo-os, além do conhecimento relacionado ao ensino e a aprendizagem em matemática, dificuldades dos alunos e documentos oficiais (Carrillo et al., 2018). Esse conhecimento específico para a prática do professor pode ser compreendido segundo diferentes perspectivas, e aqui consideramos o *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*[1] – MTSK (Carrillo et al., 2018) e o Conhecimento Interpretativo – CI (Jakobsen et al., 2014).

O MTSK é uma conceitualização teórica elaborada para aprofundar a compreensão dos elementos que compõe o conhecimento especializado do professor envolvido na sua prática matemática, serve de ferramenta analítica que permite investigar esse conhecimento, no sentido de interpretá-lo e a partir disso realizar orientações para a formação de professores (Carrillo et al., 2018). O CI também é uma conceitualização teórica, que une o conhecimento matemático especializado envolvido e necessário para a prática matemática do professor, com o conhecimento da abordagem de erros e raciocínios não usuais, entendendo-os como oportunidades de aprendizagem (Di Martino et al., 2020). Assim, o CI fundamenta a prática interpretativa do professor para interpretar e atribuir significado às produções dos alunos e propor *feedback* que contribua com o desenvolvimento do entendimento dos alunos (Jakobsen et al., 2014).

Compreender o conhecimento do professor, nos mais variados tópicos, pode auxiliar em mudanças na formação de professores, uma vez que o CI não se desenvolve na prática da sala de aula, sendo necessário um contexto formativo com esse fito (Ribeiro et al., 2013). Objetiva-se *discutir teoricamente as conceitualizações do MTSK e do CI buscando relações e complementações entre elas, para melhor compreender as especificidades do conhecimento do professor de matemática.*

Mathematics Teacher's Specialised Knowledge

O *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK (Carrillo et al., 2018) é uma conceitualização que modela o conhecimento do professor de matemática e permite caracterizar detalhadamente as especificidades do conteúdo desse conhecimento. O MTSK considera o conhecimento do professor composto por dois domínios: o *Mathematical Knowledge* (MK) e o *Knowledge Pedagogical Content* (PCK).

Discutiremos aqui apenas o conteúdo do MK que se refere ao conhecimento matemático do professor como um todo coerente, em termos da matemática como uma disciplina científica dentro de um contexto educacional (Liñan et al., 2016) e que fundamenta sua prática interpretativa. O MK é subdividido em três subdomínios *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) e *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM). Por forma a trazer exemplos do conteúdo desse conhecimento, optamos por focar no tópico da translação por ser problemático nos aspectos relativos ao ensino e à aprendizagem (e.g., Bairral y Silva, 2010; Gomes, 2012).

O KoT relaciona-se ao conhecimento sobre as grandes ideias matemáticas e os tópicos a serem ensinados. Compreende o conhecimento matemático para além do *saber fazer* em nível de conhecimento do aluno (Carrillo et al., 2018). É composto pelas categorias: (i) procedimentos;

---

[1] Optamos por utilizar a nomenclatura em inglês por esta já ser reconhecida internacionalmente e a tradução poder acarretar uma dessignificação, que se encontra associada a cada uma das dimensões da conceitualização.

(ii) definições, propriedades e fundamentos; (iii) registros de representação; (iv) fenomenologia e aplicações.

Os (i) procedimentos referem-se ao conhecimento das formas de proceder em matemática, utilizando algoritmos (convencionais e alternativos) ou outras estratégias (Carrillo et al., 2018). No âmbito da translação, refere-se a conhecer que para efetuá-la, o vetor é adicionado a cada ponto da figura obtendo os pontos correspondentes na imagem.

As (ii) definições contemplam o conhecimento sobre o conjunto mínimo de propriedades do tópico que permitem identificá-lo univocamente (Liñan et al., 2016). Envolve conhecer que uma definição de translação é "a translação $T_v\colon \Pi \rightarrow \Pi$ determinada pelo vetor v, é a transformação que leva cada ponto P do plano Π no ponto $T_v(P) = P + v$" (Lima, 1992, p. 142). As (ii) propriedades referem-se a conhecer o conjunto de todos os atributos matemáticos que são comuns ao tópico. Inclui conhecer que para efetuar a translação deve-se utilizar suas propriedades – a medida de distância entre um ponto da figura e o ponto correspondente na imagem deve ser igual ao comprimento do vetor –, sendo um erro comum, considerar o comprimento do vetor como a distância entre a figura e a imagem (Bairral y Silva, 2010). Os (ii) fundamentos relacionam-se ao conhecimento sobre o conjunto de atributos matemáticos que "sustentam" o tópico e conectam conceitos (Camacho y Guerrero, 2019). Refere-se a conhecer que para realizar a translação são necessários seus elementos constituintes – figura, vetor e imagem.

Nos (iii) registros de representação incluem-se conhecer os diferentes modos de representar um tópico, conceito, processo ou procedimento (Liñan et al., 2016) e podem ser registros aritmético, concreto, gráfico, pictórico, envolvendo linguagem verbal ou simbólica (Duval, 1996). Em translação, inclui conhecer como representar algebricamente um vetor, por exemplo, por $\overrightarrow{PQ}$ ou, simplesmente, por $\vec{u}$.

A (iv) fenomenologia e aplicações relacionam-se a conhecer os conceitos associados a um determinado tópico e aos diferentes fenômenos que o envolvem, bem como o significado de cada uma das possíveis manifestações e interpretações desses fenômenos, conforme os diferentes contextos para ensiná-lo (Liñan et al., 2016). Por exemplo, inclui conhecer que a translação é uma transformação geométrica isométrica em que realiza-se uma operação na figura (plana ou espacial) seguindo procedimentos específicos (algoritmos), na qual são adicionados vetores a cada ponto da figura, obtendo uma imagem congruente com a figura.

O subdomínio KSM refere-se ao conhecimento das diferentes conexões entre tópicos matemáticos (Carrillo et al, 2018). Considerando os aspectos temporais de sequenciação matemática é composto pelas categorias: (i) conexões de complexificação que envolvem uma perspectiva mais complexa que as discussões específicas requeridas pelo contexto e (ii) conexões de simplificação envolvem algo mais simples (Montes y Climent, 2016). Atentando aos aspectos de cada tópico, tem-se as categorias: (iii) conexões transversais, relacionadas ao conhecimento da natureza de alguns conceitos, que emergem ao abordar diferentes conceitos ao longo da matemática escolar e as (iv) conexões auxiliares, elaboradas quando o professor utiliza conceitos ou tópicos diferentes, que não eram foco da discussão, acrescentando um elemento para contribuir e sustentar a discussão matemática (Montes y Climent, 2016). Como exemplo de conexão transversal entre translação e congruência, inclui conhecer o conceito de congruência, pois a imagem resultante da translação é congruente com a figura.

O KPM refere-se ao conhecimento da prática de produzir matemática, seu funcionamento e não como ensiná-la, envolvendo a classificação e planejamento, as formas de validação, o papel dos símbolos, a linguagem formal e as condições necessárias e suficientes para gerar definições (Carrillo et al., 2018). Inclui também o conhecimento do uso e funcionamento dos exemplos e contraexemplos (Flores-Medrano, 2016) e como demonstrar, justificar, fazer deduções e induções (Carrillo et al., 2018). No âmbito da translação envolve conhecer que referente à linguagem formal, denomina-se imagem (ou transformada) a figura após ser transladada.

O MK fundamenta (o foco e objetivos) a prática profissional do professor de matemática para possibilitar que os alunos entendam o que e por que o fazem a cada momento, demandando assumir como ponto de partida o que e como os alunos conhecem, sendo requerido o conhecimento especializado associado à interpretação – Conhecimento Interpretativo (Ribeiro et al., 2013; Di Martino et al., 2020; Mellone et al., 2020).

Conhecimento Interpretativo

A prática profissional do professor de matemática ao interpretar e atribuir significado às produções dos alunos sustenta-se no seu conhecimento matemático especializado. Ao ser requerido que o professor interprete raciocínios e produções dos alunos, sejam elas incorretas, imprevistas ou não usuais – matematicamente adequadas, mas diferentes das esperadas pelo professor (Di Martino et al., 2020) – é necessário o conhecimento matemático para além de *saber fazer.* Para interpretar as produções dos alunos torna-se necessário conhecer os tópicos matemáticos a serem ensinados, elaborar conexões entre esses tópicos e reconhecer as potencialidades matemáticas das produções dos alunos de maneira válida e significativa (Jakobsen et al., 2014) para, posteriormente, selecionar as melhores decisões pedagógicas e propor *feedback*.

Esse conhecimento especializado do professor é denominado Conhecimento Interpretativo – CI (Ribeiro et al., 2013). Segundo a Enciclopédia Springer Nature (Di Martino et al., 2020), o CI é o conhecimento matemático amplo e profundo dos tópicos que permite ao professor contribuir para o desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos, a partir do seu próprio raciocínio e produções. Complementa o conhecimento das estratégias matemáticas dos alunos com o conhecimento dos possíveis erros típicos e não típicos – potencialidades de aprendizagens (Di Martino et al., 2020).

O CI proporciona ao professor entender a matemática que sustenta os raciocínios e formas de pensar dos alunos presentes nas suas produções, de modo a explorar os erros e realizar orientações com base no significado atribuído. As orientações que auxiliam os alunos a analisar novamente sua produção, reformular raciocínios e estratégias são consideradas *feedback* construtivo (Santos y Pinto, 2009; Di Martino et al., 2017), pois são informações claras propostas aos alunos e contribuem para o desenvolvimento do conhecimento matemático deles, podendo conter dicas, exemplos, correções, explicações ou estratégias alternativas.

Entretanto, existem outros tipos de *feedback* (Galleguillos y Ribeiro, 2019): (i) *feedback* sobre como resolver o problema, contém instruções indicando os procedimentos a serem seguidos pelos alunos para resolverem um problema específico; (ii) *feedback* confuso, apesar de correto é incompreensível para o aluno, devido à complexidade de suas orientações; (iii) contraexemplo como *feedback*, apresenta um exemplo explicativo do porquê a resolução do aluno estar incorreta; (iv) *feedback* superficial, trata-se de uma orientação insuficiente ou inconsistente, que não ajuda o aluno entender seus erros.

As categorias (i) e (ii) associam-se a uma prática instrutiva, dizendo ao aluno como proceder – não requer que o professor atribuía significado ao Pensar dos alunos. As categorias (iii) e (iv) estão associadas a práticas avaliativas e focam em explicar porquê a produção do aluno contém erros, porém requerem do professor uma interpretação correta da produção, requerendo o conhecimento matemático que permita ao professor abordar um problema de diferentes maneiras e envolve que ele conheça diversos exemplos para que possa explicar o porquê alguns modos de proceder são incorretos.

Para o professor propor *feedback* construtivo é essencial conhecer diferentes estratégias e representações para a resolução de problemas, possibilitando atribuir significado às produções que não são semelhantes às suas – fora de seu próprio espaço solução. O espaço solução refere-se ao conjunto das múltiplas formas e representações que cada indivíduo concebe quando é solicitado a resolver um problema, mesmo que ele apresente uma única solução (Jakobsen et al., 2014).

Todavia, o espaço solução sempre é limitado, pois a pesquisa mostra que os professores conhecem essencialmente uma única maneira de proceder para resolver um problema (Jakobsen et al., 2014; Di Martino et al., 2017). Ampliar as fronteiras do espaço solução do professor, de modo a ultrapassar as suas limitações e possibilitar propor um *feedback* construtivo, demanda desenvolver o CI (Jakobsen et al., 2014) em contextos formativos para compreender suas especificidades e como elas impactam em sua prática profissional.

Consideram-se níveis de Conhecimento Interpretativo associados às categorias (Mellone et al., 2017): (i) interpretação avaliativa relaciona-se ao conhecimento que leva o professor a estabelecer uma correspondência entre a sua maneira de resolver um problema e a do aluno, levando em consideração o seu modo como parâmetro para obter a resposta correta e determinando como incorreta as produções que não condizem com a sua; (ii) interpretação para a prática letiva associa-se ao conhecimento que permite ao professor (re)desenhar as seguintes etapas, a partir das produções dos alunos (interpreta a produção e repensa seu planejamento das próximas discussões a serem propostas, de modo a delinear um novo percurso para alcançar o objetivo de aprendizagens matemáticas); (iii) interpretação como pesquisa, o professor (re)analisa sua própria formalização matemática, revendo seu modo de proceder para resolver um problema, para que seja coerente com as produções dos alunos, ainda que estas pareçam estar em conflito com o que é ensinado tradicionalmente na escola. Para isso, o professor pode pesquisar outras maneiras de resolver um problema, que podem advir de resultados de pesquisa ou discutindo a produção com os pares, o que possibilita que ele amplie seu espaço solução, passando a conhecer novas formas de proceder.

Buscando a melhoria da prática profissional do professor – como consequência dos resultados de pesquisa com foco nas especificidades do conhecimento do professor – a interpretação das produções dos alunos não se pode configurar como um processo que envolva apenas uma escuta avaliativa, sem correspondência entre a produção do aluno e o que é esperado pelo professor. Isso ocorre, quando o professor considera que existe somente uma resposta "certa" e não efetua a interpretação por meio de uma escuta mais hermenêutica (Davis, 1997; Di Martino et al., 2017). A escuta hermenêutica ultrapassa o mero ouvir sensorial, envolve interação ativa do professor com os alunos ou suas produções, prestando atenção aos detalhes para interpretar profundamente e atribuir significado ao que escuta (Mellone et al., 2020) e, assim, (re)desenhar os percursos de aprendizagem a partir do que os alunos conhecem em matemática, para que avancem no desenvolvimento do seu conhecimento matemático (Di Martino et al., 2017).

No âmbito da translação, consideremos uma produção em que o aluno efetua a translação apenas levando em conta a direção e o sentido do vetor e adota o comprimento do vetor como a distância entre a figura e a imagem (conhecer o procedimento usual para efetuar a translação). Uma (i) interpretação avaliativa, corresponde a interpretar a produção como incorreta, dizendo ao aluno como fazer para "acertar" o problema (*feedback* sobre como resolver o problema do tipo instrutivo); uma (ii) interpretação para a prática letiva envolve interpretar a produção como parcialmente correta, apresentando a translação correta de uma figura que considere o comprimento do vetor, apontando o erro do aluno (contraexemplo como *feedback* do tipo avaliativo); uma (iii) interpretação como pesquisa considera a produção também como parcialmente correta, buscando entender os motivos matemáticos que sustentam o erro comum dos alunos em considerar o comprimento do vetor como a distância entre a figura e a imagem (Bairral y Silva, 2010) e não a distância entre cada ponto da figura e seu correspondente na imagem. Nesse caso, o professor orienta o aluno a escolher alguns pontos da figura e os correspondentes na imagem e a verificar se a medida da distância entre eles é a mesma, para que o aluno reveja sua produção e conclua que não. Além disso, o professor orienta o aluno a focar no vetor e pensar o que ele deve considerar do vetor para manter a distância entre os pontos da figura e seus correspondentes na imagem. O intuito é que o aluno entenda que é preciso considerar o comprimento do vetor (*feedback* do tipo construtivo).

Relações entre MTSK e CI

O conteúdo do conhecimento matemático especializado (assumindo a conceitualização do MTSK) fundamenta as especificidades do Conhecimento Interpretativo, porém são de naturezas diferentes, visto que o CI foca em uma prática específica do professor de matemática: a interpretativa. Para desenvolver essa prática interpretativa – em um nível superior à avaliativa – cumpre ao professor conhecer, entre outros, diferentes formas de proceder (possuir um espaço solução com vários elementos), possibilitando entender diferentes estratégias, raciocínios e formas de pensar dos alunos e inclusive rever sua própria forma de proceder. Assim, quanto mais amplo e profundo o seu conhecimento matemático, mais elementos possuirá o espaço solução do professor, que o permite entender os motivos que sustentam o "fazer matemático" em contexto educacional.

Esse conhecimento matemático especializado (em cada uma das suas categorias) é mobilizado diante da necessidade de interpretar as produções dos alunos e embasa a prática interpretativa, possibilitando que o professor realize uma interpretação hermenêutica, mesmo que o ponto de partida contenha erros. Pressupõe-se que um elevado nível de CI significa que o professor detenha o conhecimento especializado (também com vários elementos em cada categoria) e o conhecimento que o permita "ouvir o pensar matemático dos alunos" (Di Martino et al., 2017) e efetivamente usar essa oportunidade para implementar práticas investigativas, a partir de o que e como os alunos conhecem. Conjetura-se, que haverá uma relação entre possíveis níveis de conhecimento em cada categoria do conhecimento matemático especializado e os níveis de CI.

O professor também precisa entender profundamente o que é o tópico e seu significado considerando sua fenomenologia e aplicações, para poder interpretar as produções dos alunos e pensar em melhores contextos de aplicação do tópico. Ao conhecer a fenomenologia da translação, entendendo-a como uma operação na figura, o professor interpreta e entende os motivos matemáticos que sustentam, por exemplo, uma produção de aluno que adiciona o vetor como o espaço entre a figura e a imagem e não o adiciona a cada ponto da figura para obter o ponto correspondente na imagem – conhecimento associado ao procedimento da translação, envolvendo a adição de vetores a pontos e entendimento do tópico como uma operação – para posteriormente propor um *feedback* construtivo. Além disso, quanto mais tipos diferentes de registros de representação para um tópico o professor conhecer (espaço solução com diferentes elementos), mais facilidade ele terá para compreender as produções dos alunos, inclusive para antecipar as suas possíveis respostas e entender os motivos que os levam a optarem por determinados registros e o que eles revelam, em termos de conhecimento matemático dos alunos.

Quando a produção do aluno apresenta uma maneira de proceder próxima da maneira de proceder do professor, a interpretação a ser realizada, possivelmente, não exige que o professor estabeleça conexões entre o tópico principal e os demais, pois o professor a considerará como correta. Todavia, diante de produções dos alunos não usuais para o professor torna-se necessário ele deter o conhecimento matemático que fundamente a elaboração de conexões, tanto em um mesmo tópico quanto entre tópicos para entender os porquês dos raciocínios não usuais, para ajudar os alunos a entenderem – *feedback*.

Além de entender os porquês matemáticos que sustentam os raciocínios não usuais, a prática interpretativa envolve a validação ou não desses raciocínios que podem ser matematicamente adequados, apenas não esperados pelo professor. É nesse sentido que o conhecimento sobre as formas de produzir matemática são evocados e permite o professor interpretar a produção do aluno, o que se associa ao conhecimento relacionado à exploração e geração de conhecimento matemático.

Nas situações em que as produções dos alunos contêm erros, o que permite que eles sejam identificados é o conhecimento matemático do professor. Entretanto, não basta identificar o erro, o professor tem de tomar decisões pedagógicas (fundamentadas em seu conhecimento matemático) para propor um *feedback*, ao menos do tipo avaliativo. Envolve o professor estabelecer conexões para entender o erro e refutar a produção, utilizando a linguagem formal na elaboração de argumentos e justificativas matemáticas contidas na orientação que irá propor ao aluno.

Comentários finais

Estabelecer possíveis entrelaçamentos teóricos entre o MTSK e o CI pode ser uma das formas de focar a atenção de pesquisa na prática interpretativa do professor, pois ambas as conceitualizações tem como premissa que o conhecimento do professor de matemática é especializado e requerido para essa prática especializada em níveis superiores de interpretação. Algumas questões em aberto que podem contribuir para guiar pesquisas futuras são: (i) Que relações é possível estabelecer entre o MTSK e o CI em âmbito de uma pesquisa empírica sobre o conhecimento do professor de matemática? (ii) Qual a relação entre os elementos constituintes do MTSK e os níveis de CI?

Agradecimentos

O presente trabalho forma parte do projeto de pesquisa financiado pelo CNPq "Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e suas relações com as Tarefas para a Formação no âmbito da Medida, e do Pensamento Algébrico, Geométrico e Estatístico" (404959/2021-0).

Referências

Bairral, M. A., y Silva, M. A. (2010). *Instrumentação do Ensino da Geometria*. (vol.2, 2.ed.). Fundação CECIERJ.

Camacho, A. M. R., y Guerrero, L. S. (2019). Conocimiento especializado del profesor de primaria en formación: un estudio de caso de la enseñanza de la noción de razón. *Quadrante, 28*(2), 100-124. https://doi.org/10.48489/quadrante.23029

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-Gonzáles, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Davis, B. (1997). Listening for differences: An evolving conception of mathematics teaching. *Journal for research in mathematics education, 28*(3), 355-376. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.28.3.0355

Di Martino P., Mellone M., Minichini C., y Ribeiro M. (2017). Prospective teachers' interpretative knowledge: giving sense to subtraction algorithms. En: S. Zehetmeier, M. Ribeiro, B. Roesken-Winter y B. Potari (Eds.), *Proceedings ERME topic conference mathematics teaching, resources and teacher professional development* (pp. 66-75). ERME, Hall.

Di Martino, P., Mellone, M., y Ribeiro, M. (2020). Interpretative knowledge. En S. Lerman (Org.). *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 424-428). 1ed.: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100019-1

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?. *Recherches en didactique des mathématiques (Revue), 16*(3), 349-382.

Flores-Medrano, E. (2016). Conocimiento de la práctica matemática (KPM). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 30-34). SGSE.

Galleguillos, J., y Ribeiro, M. (2019). Prospective mathematics teachers' interpretative knowledge: focus on the provided feedback. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3281-3288). Utrecht University and ERME. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02422519

Gomes, A. (2012). Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades de futuros professores. *En Atas do Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 233-243). Associação de Professores de Matemática.

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M., y Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education, 19*(3-4), 135-150.

Lima, E. L. (1992). *Coordenadas no plano: geometria analítica, vetores e transformações geométricas.* (2.ed.). GRAFTEX Comunicação Visual.

Liñan, M.M., Contreras, L.C., y Barrera, V. (2016). Conocimiento de los Temas (KoT). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 12-20). SGSE.

Mellone, M., Tortora, R., Jakobsen, A., y Ribeiro, M. (2017). Prospective teachers interpret student responses: Between assessment, educational design and research. En *Proceedings of Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2948-2955). DCU Institute of Education and ERME. https://hal.science/hal-01949034

Mellone, M., Ribeiro, M., Jakobsen, A., Carotenuto, G., Romano, P., y Pacelli, T. (2020). Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning. *Research in Mathematics Education, 22*(2), 154–167. https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1710557

Montes, M. A., y Climent, N., (2016). Conocimiento de la estructura matemática (KSM). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. *Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 21-29). SGSE.

Ribeiro, C. M., Mellone, M., y Jakobsen, A. (2013). Characterizing prospective teachers' knowledge in/for interpreting students' solutions. En A. Heinzey A.M. Lindmeier (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 89-96). PME.

Ribeiro, M., Policastro, M., Caldatto, M., y Almeida, A. (2022). Interpretative Knowledge of Prospective Kindergarten and Primary Teachers in the Context of Subtraction. *Acta Scientiae, 24*(3), 1–31. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6767

Santos, L., y Pinto, J. (2009). Lights and shadows of feedback in mathematics learning. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 5, pp. 49-56). PME.

UNA APROXIMACIÓN A LAS CONEXIONES ENTRE EL MTSK Y LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS PEDAGÓGICAS

An approximation to networking between the MTSK and the Pedagogical Mathematical Practices

Delgado-Rebolledo, R.[a], Zakaryan, D.[b], Wasserman, N.[c]

[a] Universidad de Concepción, Chile
[b] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
[c] Universidad de Columbia, Estados Unidos

Temática: 5 –Extensiones del MTSK

Resumen.
En este trabajo presentamos una primera aproximación a las conexiones entre el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) y el constructo prácticas matemáticas pedagógicas (PMPs). A partir de una tarea formativa sobre números racionales, analizamos el MTSK movilizado y las PMPs que pueden ser identificadas en las respuestas dadas por un grupo de futuros profesores de matemáticas. Los resultados muestran conexiones entre subdominios del conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido del MTSK con diferentes PMPs señalando una posible complementariedad entre ambos constructos lo cual permitiría realizar análisis más profundos de las actividades de la profesión docente y el conocimiento que las sustenta.

Palabras clave. Prácticas matemáticas, Prácticas pedagógicas, Prácticas matemáticas pedagógicas, conexión entre teorías, MTSK.

Abstract.
In this work we expose a first approximation to networking between the Mathematics Teachers Specialized Knowledge (MTSK) model and the Pedagogical Mathematical Practices (PMPs) construct. Based on a teacher training task about rational numbers, we analyze the mobilized MTSK and the PMPs that can be identified in the responses given by a group of prospective mathematics teachers. The results show connections between subdomains of mathematical knowledge and pedagogical content knowledge in MTSK with various PMPs, pointing out a possible complementarity between both constructs, which will allow to develop deeper analyses of activities of the teaching profession and the knowledge that supports it.

Keywords. Mathematical practices, Pedagogical practices, Pedagogical mathematical practices, Networking of theories, MTSK.

Delgado-Rebolledo, R., Zakaryan, D. y Wasserman, N. (2023). Una aproximación a las conexiones entre el MTSK y las prácticas matemáticas pedagógicas. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 328-335). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

En este trabajo presentamos una primera aproximación hacia posibles conexiones entre el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) propuesto por Carrillo et al. (2018) y el constructo Prácticas Matemáticas Pedagógicas (PMPs) desarrollado por Wasserman (2022). Algo que ha llamado la atención de los autores de este trabajo es que, desde un primer acercamiento se puede identificar que las PMPs hacen referencia a las prácticas matemáticas y, por otra parte, en el MTSK se describe un subdominio que agrupa el conocimiento de los profesores de las prácticas matemáticas (KPM). De este modo, un punto de encuentro entre estos dos referentes teóricos es la consideración de las prácticas matemáticas en sus conceptualizaciones. Esto ha generado un interés particular para, en una primera instancia, tratar de entender las similitudes y diferencias de ambos constructos, y posteriormente, reflexionar sobre la posible complementariedad de estos.

Radford (2008) señala que incluso la conexión más sencilla entre teorías requiere establecer un diálogo en el cual haya un esfuerzo por hacerse entender y por comprender lo que dice la otra teoría a pesar de las diferencias que puedan existir. Siguiendo las ideas anteriores, en este trabajo nos proponemos realizar un diálogo entre los constructos que nos permita realizar una primera propuesta de conexiones entre el MTSK y las PMPs. Para el cumplimiento de lo anterior usamos datos empíricos para comprender tanto las PMPs que desarrollan futuros profesores de matemáticas como el conocimiento especializado que movilizan.

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas

De acuerdo con Climent y Montes (2022), el modelo MTSK se propone como una herramienta útil para comprender el conocimiento que posee y/o moviliza un profesor de matemáticas en su actividad profesional. El modelo se estructura en dos dominios de conocimiento, cada uno con sus respectivos subdominios y categorías. Además, se describe un dominio de creencias del profesor sobre la matemática, su enseñanza y su aprendizaje. En este trabajo nos centraremos en los dominios de conocimiento.

El conocimiento matemático (MK) caracteriza lo que el profesor conoce desde tres puntos de vista; un conocimiento local del contenido matemático que el profesor enseña en el subdominio *conocimiento de los temas* (KoT), el cual incluye el conocimiento de procedimientos, definiciones, propiedades y sus fundamentos, registros de representación, y fenomenología y aplicaciones de un contenido matemático; un conocimiento sobre conexiones entre contenidos matemáticos que pueden ser de complejización, simplificación, transversales o auxiliares, en el subdominio *conocimiento de la estructura de la matemática* (KSM); y un conocimiento de carácter sintáctico en el subdominio *conocimiento de la práctica matemática* (KPM), donde se incluye el conocimiento de las prácticas de demostrar, definir, resolver problemas y el conocimiento del papel del lenguaje matemático.

En cuanto al conocimiento didáctico del contenido (PCK), este caracteriza lo que el profesor conoce respecto a la enseñanza y el aprendizaje en directa relación con la matemática. Lo anterior se describe en tres subdominios: un conocimiento de teorías y recursos de enseñanza, así como de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos en el *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT); un conocimiento de teorías de aprendizaje de las matemáticas, fortalezas y debilidades en el aprendizaje, formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático y aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas, que se reúnen en el *conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas* (KFLM); finalmente el *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS) incluye el conocimiento de la secuenciación de temas, el nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado y los resultados de aprendizaje esperados.

Las prácticas matemáticas pedagógicas

En el trabajo de Shulman (1986) se describe la noción de PCK como una intersección entre conocimientos de tipo matemáticos y pedagógicos. Wasserman (2022) propone re-explorar esta intersección entre lo matemático y lo pedagógico desde el punto de vista de las prácticas. De acuerdo con el autor, conjeturar, generalizar, definir, formalizar y demostrar son ejemplos de actividades en las que los matemáticos participan regularmente, algunas de las cuales son aplicables a la enseñanza cuando los profesores de matemáticas desarrollan actividades como explicar, diseñar e interpretar el trabajo de los estudiantes. Así, las PMPs son actividades clave que realizan los matemáticos en su trabajo disciplinar y que comparten características con aquellas actividades que realizan los profesores de matemáticas cuando enseñan la asignatura.

El reconocimiento de PMPs resulta útil para la investigación en Educación Matemática pues dichas prácticas permitirían describir algunas actividades de la profesión docente de manera clara y situada, reflejando de forma inherente y más explícita las matemáticas (Wasserman, 2022). En esta línea, la identificación de prácticas matemáticas que son productivas para la enseñanza podría aportar a la formación de los profesores de matemáticas. Siguiendo las ideas anteriores, en los trabajos de Wasserman y McGuffey (2021) y Wasserman et al. (2022) se presentan aquellas PMPs que fueron utilizadas en el diseño y la implementación de un curso de Análisis Real dirigido a profesores de matemática en formación y en activo.

En la PMP1: *reconocer y revisar los supuestos y las restricciones matemáticas* se considera que en matemáticas hay un dominio o conjunto de objetos para el cual una declaración es verdadera, de modo que un argumento que es válido en un entorno puede que no lo sea en otro. De manera análoga los profesores deben reconocer las limitaciones matemáticas que tienen ciertas ideas, analogías o descripciones que son usualmente presentadas en la enseñanza. Adicionalmente, en esta práctica se considera la precisión en el uso del lenguaje matemático en la enseñanza de las matemáticas.

En la PMP2: *considerar y usar casos límites para probar e ilustrar ideas matemáticas* se menciona el uso que hacen los matemáticos de casos especiales para probar las condiciones e implicaciones de un teorema y como los profesores usan de manera intencional ejemplos, contraejemplos y no ejemplos para hacer concretas algunas ideas abstractas.

Por su parte, la PMP3: *exponer la lógica que subyace a una interpretación matemática* se refiere al uso del lenguaje matemático prestando atención a la lógica y sus convenciones, particularmente el hecho de que los profesores y los estudiantes no siempre comunican sus ideas matemáticas en un lenguaje estrictamente formal por lo cual los profesores deben estar atentos a aquello que subyace a las ideas matemáticas que escuchan y comunican.

Adicionalmente, la PMP4: *usar objetos simples para estudiar objetos más complejos* se refiere a que en matemáticas usualmente se utilizan modelos compuestos de ideas más comprensibles para comunicar objetos menos comprensibles. De manera similar, los profesores utilizan objetos familiares como punto de partida para introducir nuevos objetos.

En cuanto a la PMP5: *evitar dar reglas sin acompañarlas de explicaciones matemáticas*, esta se refiere la importancia que tiene la demostración en la comunidad matemática y la prioridad que los profesores deben dar a las justificaciones de reglas, algoritmos y conceptos, de forma que al presentar una regla se debe explicar matemáticamente su significado.

Por último, en la PMP6: *buscar y dar múltiples explicaciones* se reconoce que los matemáticos regularmente buscan diferentes explicaciones para proposiciones que ya se sabe son ciertas, de manera similar, los profesores utilizan múltiples explicaciones y enfoques para ofrecer oportunidades de aprendizaje a sus estudiantes.

Contexto y método

Con el propósito de identificar conexiones entre las PMPs y el MTSK nos apoyamos del análisis de datos empíricos. Los datos fueron recolectados a partir de una tarea formativa propuesta en un curso que es parte de la formación didáctica de la carrera de Pedagogía en Matemáticas de una universidad chilena. En el curso (dirigido a estudiantes de tercer año de la carrera) participaron 36 futuros profesores de matemáticas (de ahora en adelante FP). En la tarea formativa (T), a la que deben responder de forma individual, se presenta a los FP una situación que consiste en la interacción entre una profesora de matemáticas y sus estudiantes de octavo básico (13-14 años). En dicha situación, cuando la profesora pregunta "¿Por qué el conjunto de los números racionales se dice denso?", la respuesta que obtiene de la mayoría de sus alumnos es "porque tiene infinitos números". A partir de la situación anterior, se solicita a los FP que interpreten la respuesta de los alumnos (T1) y que presenten una explicación que ellos darían para subsanar esta respuesta (T2). Aclaramos que a pesar de que la profesora solo usa la palabra denso, en el contexto de la tarea formativa se entiende que se refiere a la densidad de los números racionales en los números reales.

Para el análisis de los datos identificamos evidencias e indicios de conocimiento en las respuestas de los FP a partir de las categorías de cada subdominio del MTSK. También elaboramos una descripción específica de las PMPs asociadas a la tarea formativa y realizamos el análisis de la presencia de dichas prácticas en las respuestas de los FP (Montesy Climent, 2022). Consideramos que para esta tarea formativa la PMP1 significa que los profesores hagan afirmaciones sobre la densidad y la infinitud como propiedades que se mantienen o no en diferentes conjuntos numéricos. Esta práctica también está presente en la forma en que los futuros profesores usan el lenguaje para referirse a la palabra infinito: como un cardinal o cantidad, como no acotado o ilimitado, o se refieren a la infinitud entre números (idea cercana a la densidad). La PMP2 se observa cuando los FP presentan ejemplos y contraejemplos de conjuntos infinitos. La PMP3 se da cuando los FP realizan afirmaciones e interpretaciones desde una lógica más formal, por ejemplo, cuando proponen contraejemplos para mostrar la falsedad de la afirmación hecha por los estudiantes, centrándose en la lógica matemática detrás del contraejemplo. La PMP4, en el contexto de esta situación no tiene una interpretación significativa. La PMP5 se presenta en las explicaciones matemáticamente precisas sobre densidad que dan los FP y la PMP6 tiene que ver con la explicación de la propiedad de ser denso de al menos dos formas distintas.

A partir del análisis del MTSK y de las PMPs de los participantes, identificamos que las respuestas de seis de ellos eran más completas y explicativas, por lo cual nos permitían ilustrar de manera más amplia tanto los conocimientos como las PMPs puestos en juego. Así realizamos un análisis detallado de estas seis respuestas identificando en ellas puntos de encuentro entre el MTSK y las PMPs. Por razones de espacio limitado y considerando los propósitos de este estudio nos enfocamos en tres de estos seis participantes (FP2, FP4 y FP5) que nos permiten ejemplificar las relaciones entre el MTSK y la PMPs.

Resultados

Al interpretar la respuesta que dan los estudiantes a la profesora (T_1) "los racionales son densos porque son infinitos", el FP2 señala:

> Los estudiantes asocian el concepto de densidad con el concepto de infinitud de los números. Pero los naturales y los enteros también lo son [son infinitos] y no son conjuntos densos. Además, no es común hablar de la densidad de los sistemas numéricos en el aula, entonces por eso puede que exista aquella confusión.

En el fragmento anterior, el FP2 se refiere a la forma en que los estudiantes comprenden la densidad en términos de infinitud. Lo anterior da cuenta de un conocimiento de las f*ormas de interacción con el contenido matemático* (KFLM) y, a su vez, observamos el uso que el FP2 hace del lenguaje matemático pues expone el *infinito como un cardinal* (PMP1). Siguiendo con su intervención, el FP2 muestra como *ejemplo* de conjuntos infinitos a los números naturales y los números enteros (PMP2), pero señala que estos no son densos en los reales, lo cual da muestra de su conocimiento de la *propiedad de densidad* (KoT). En esta línea, los naturales y los enteros también son mencionados como un *contraejemplo* de conjuntos infinitos que no son densos en los reales (PMP2). Además, el FP2 presenta una posible causa de la respuesta de los estudiantes refiriéndose a que la densidad de los reales en los racionales no es un contenido que usualmente se trate en octavo grado, lo cual da cuenta de su conocimiento de *expectativas de aprendizaje* (KMLS).

En cuanto a las explicaciones que daría a los estudiantes (T_2), el FP2 comenta:

> Se les podría preguntar si los números naturales son infinitos y si son densos. La idea es que respondan que los naturales no son densos. Entonces, ahí podría justificar que no porque un conjunto sea infinito es denso. Si se puede hablar que entre un número racional y otro hay infinitos números, pero no es así en los naturales y enteros

En la intervención anterior, el FP2 muestra nuevamente su conocimiento de la *propiedad de densidad* (KoT) pero esta vez explicando que dicha propiedad no se mantiene en los naturales y en los enteros (PMP1). Además, realiza una interpretación desde el punto de vista lógico de la proposición ser infinito no implica ser denso (KPM-PMP3), usando el contraejemplo de los naturales y los enteros de manera más explícita (desde el punto de vista matemático) que en su intervención anterior. Al finalizar su explicación, el FP2 se refiere a la densidad como una infinitud entre números (PMP1).

Por su parte, el FP4 al realizar un análisis de la respuesta que los estudiantes dan a la profesora (T_1) señala lo siguiente:

> Los estudiantes deben haber relacionado la palabra denso con cantidades o cardinales. Entonces, al escuchar que son un conjunto denso, lo entienden como que los racionales tienen muchos números o que es un «conjunto grande» debido a que es infinito.

De acuerdo con lo anterior, el FP4 expone un *uso del lenguaje matemático* para referirse a la densidad como un cardinal y como algo grande o ilimitado (PMP1). A su vez, alude a la comprensión que tienen los estudiantes de la palabra infinito como sinónimo de grande (PMP1) mostrando un conocimiento de las *formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático* (KFLM).

Continuando con su intervención, el FP4 se refiere a las explicaciones que daría a los estudiantes (T_2) de la siguiente forma:

> En primer lugar, les haría ver que [el conjunto de] los números racionales no es el único conjunto infinito, sino que los naturales, enteros, irracionales también lo son y no por eso se dicen densos en los reales. Luego, les hablaría desde una mirada más histórica-epistemológica sobre que hay infinitos más grandes que otros y que a pesar de que es difícil de entender, existió un matemático llamado Cantor que demostró esto y que de ahí viene el decir denso a los números racionales en los reales.

Observamos que el FP4 presenta los naturales, los enteros y los irracionales como *ejemplos* de conjuntos infinitos (PMP2). Además, señala que ser infinito no implica ser denso en los reales mostrando el desarrollo de la PMP3, pero comete un error al incluir los números irracionales en su afirmación puesto que estos sí cumplen con la propiedad de ser densos en los reales. Sumado a lo anterior, el FP4 se adentra en la idea de diferentes infinitos cuando expresa que hay infinitos más grandes que otros, usando la palabra *infinito como cardinal* (PMP1). En esta línea, también muestra su conocimiento de las *dificultades de los estudiantes* (KFLM) para comprender el infinito en relación con su complejidad y con el proceso para ser construido como objeto matemático (mirada histórico-epistemológica). Enlazado con lo anterior, el FP4 presenta una *explicación* (PMP5) de la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ desde un punto de vista teórico, refiriéndose a una demostración de la cardinalidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R}$.

En el caso del FP5 al responder a la T1, comenta que la respuesta de los estudiantes se debe a un malentendido del concepto de densidad pues solo se refieren a la infinitud entre números. De acuerdo con esta respuesta identificamos un indicio del conocimiento del FP5 de la *propiedad de densidad* (KoT). Adicionalmente, desde el punto de vista de las PMPs, usa la expresión *infinitud entre números* (PMP1) como idea cercana al significado de la densidad.

En cuanto a las explicaciones que daría a los estudiantes para enfrentar la respuesta equivocada (T_2) el FP5 expone :

> Para subsanar aquellas posibles malinterpretaciones del objeto matemático, me valdría de diversas representaciones semióticas. En este caso, representando los números racionales en una recta numérica real. Esto junto a una devolución que permita a los estudiantes reflexionar respecto a su respuesta. Por ejemplo, en la devolución les diría: Los números enteros también son infinitos, pero este no es un conjunto denso, ¿Qué pasa ahí? Se espera que reflexionen y compartan ideas para proceder mostrando que para p y $q \in Q$ cualquiera, existen infinitos racionales $r_n \in Q$. Por ejemplo, en [0,1] existen infinitos $\frac{n}{n+1}$, $n \in Z$ tal como $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{999}{1000}, \ldots, \frac{n}{n+1}\right\}$.

El FP5 propone una explicación usando los términos de la teoría de los registros de representación semiótica (Duval, 2004) dando muestras de su conocimiento de esta *teoría formal de aprendizaje* (KFLM). Además, observamos que el FP5 presenta una pregunta y un ejemplo que identifica como una devolución, noción que hace parte de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2007). De acuerdo con lo anterior, identificamos un conocimiento del FP5 de una *teoría formal de enseñanza* (KMT). Ambas teorías se abordaron en una asignatura de formación didáctica cursada por el FP5.

En la devolución que propone el FP5 considera los números enteros como *contraejemplo* de un conjunto que es infinito, pero no es denso en los reales (PMP3), mostrando también su conocimiento de los contraejemplos y su uso (KPM). Este contraejemplo está expresado como una proposición que ha sido construida a partir del conocimiento del FP5 de las *reglas de uso de los símbolos* (KPM-PMP3). En esta proposición, el FP5 presenta una caracterización de la densidad refiriéndose a la infinitud entre números (PMP1), pero lo hace usando solo números racionales expresando una densidad del conjunto en sí mismo y no en los reales. La proposición anterior es complementada mostrando un ejemplo (PMP2) de infinitos números entre 0 y 1, el cual es utilizado para dar una *explicación matemática* (PMP5) de la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, sin embargo, esta explicación es limitada ya que no es suficiente para mostrar a los estudiantes que la propiedad se cumple para números reales cualesquiera.

En la Tabla 1 presentamos un resumen de las PMPs identificadas en las respuestas de los tres FP analizados.

Tabla 1. PMPs de los FP

FP	T_1	T_2
FP2	Uso del lenguaje: Infinito como cardinal (PMP1) Ejemplo: $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son infinitos (PMP2) Contraejemplo: $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son infinitos, pero no son densos en $\mathbb{R}$ (PMP2)	La densidad no es una propiedad que se mantiene en $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ (PMP1) Uso del lenguaje: Densidad como infinitud entre números (PMP1). Interpretación del contraejemplo desde la lógica: Ser infinito no implica ser denso (PMP3)
FP4	Uso del lenguaje: Infinito como cardinal y como algo ilimitado (PMP1)	Uso de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{I}$ como ejemplos de conjuntos infinitos (PMP2) Explicación de la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ (PMP5)
FP5	Uso del lenguaje: infinitud entre números (PMP1)	Interpretación del contraejemplo desde la lógica: $\mathbb{Z}$ es infinito lo cual no implica ser denso en $\mathbb{R}$ (PMP3) Ejemplo de infinitud de números entre 0 y 1 (PMP2) Explicación de la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ (PMP5)

Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo con lo expuesto en la Tabla 1, para responder a la tarea formativa los FP desarrollan diferentes PMPs. Se destaca la presencia de la PMP1 respecto al uso de la palabra infinito y la PMP2 cuando los FP dan ejemplos y contraejemplos de conjuntos infinitos. Además, los profesores usan contraejemplos pertinentes a la situación mostrando la lógica que subyace a ellos (PMP3) y dan una explicación matemática de la propiedad de densidad (PMP5) pero no presentan diversas explicaciones (ausencia de PMP6).

Por otra parte, en la Tabla 2 presentamos una síntesis del conocimiento especializado identificado en las respuestas de los tres FP analizados.

Tabla 2. MTSK de los FP

FP	T_1	T_2
FP2	Propiedad de densidad (KoT) Formas de interacción: Comprensión de los estudiantes de la palabra denso como infinito (KFLM) Expectativas de aprendizaje: La densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ no se aborda en octavo básico (KMLS)	Contraejemplo y su uso: $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son infinitos, pero no son densos en $\mathbb{R}$ (KPM). Propiedad de densidad (KoT)
FP4	Formas de interacción	Dificultades de los estudiantes: El infinito como obstáculo epistemológico (KFLM)
FP5	Propiedad de densidad (Indicio-KoT)	Teoría formal de enseñanza: Teoría de situaciones didácticas (KMT) Teoría formal de aprendizaje: Teoría de los registros de representación semiótica (KFLM) Reglas de uso de los símbolos para construir y usar un contraejemplo: $\mathbb{Z}$ es infinito, pero no es denso en $\mathbb{R}$ (KPM)

Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo con lo expuesto en la Tabla 2, observamos que para responder a la tarea formativa los FP ponen en juego tanto conocimientos matemáticos (KoT y KPM) como conocimientos didácticos (KMT, KFLM y KMLS). Se destaca la presencia del KoT y del KFLM tanto para interpretar las respuestas de los estudiantes (T_1) como para subsanarlas (T_2).

Comentarios finales

Hemos identificado la conexión esperada entre el KPM y las PMPs, en especial en la forma en que los futuros profesores *usan los contraejemplos.* Adicionalmente, identificamos una conexión entre la PMP2 (*ejemplos*) y el KoT (*propiedades*), lo cual muestra que en el desarrollo de PMPs los FP utilizan otros conocimientos matemáticos adicionales al KPM. A su vez, en las respuestas a la tarea formativa resultó relevante el conocimiento de las *formas de interacción con el contenido matemático* (KFLM) que se evidencia en conexión con la PMP1 respecto al *uso de la palabra infinito.*

Adicionalmente, para cada PMP fue posible identificar un conocimiento dentro del MTSK que se relaciona con dicha práctica. Sin embargo, notamos que, al contar con una sola fuente de datos, no fue posible profundizar en algunos conocimientos, mientras que no sucedía lo mismo con la identificación de las PMPs. De acuerdo con lo anterior, los futuros trabajos en esta línea nos permitirían profundizar sobre la posible complementariedad entre el MTSK y las PMPs, que usados en conjunto serían útiles para realizar análisis más completos de las actividades de la profesión docente y el conocimiento que las sustenta.

Agradecimientos

Este trabajo está vinculado a la Red MTSK de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

Referencias

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Libros del Zorzal.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Climent, N. y Montes, M. (2022). El modelo MTSK: Antecedentes y estructura. En J. Carrillo, M. A. Montes, y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 27–34). Dykinson.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle.

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM–Mathematics Education, 40*(2), 317-327. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0090-3

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.

Wasserman, N. (2022). Re-exploring the intersection of mathematics and pedagogy. *For the Learning of Mathematics, 42*(3), 28-33.

Wasserman, N., Fukawa-Connelly, T., Weber, K., Mejia Ramos, J. P., y Abbott, S. (2022). *Understanding analysis and its connections to secondary mathematics teaching.* Springer.

Wasserman, N., y McGuffey, W. (2021). Opportunities to learn from (advanced) mathematical coursework: A teacher perspective on observed classroom practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 52*(4), 370-406. https://doi.org/10.5951/jresematheduc-2019-0017

O EIXO ARTICULADOR PROCESSOS MATEMÁTICOS NO CICLO DE ALFABETIZAÇÃO DA CIDADE DE SÃO PAULO: CONHECIMENTOS ESPECIALIZADOS REQUERIDOS DOS PROFESSORES

The articulating axis Mathematical Processes in the literacy cycle of the city of São Paulo: specialised knowledge required from teachers

Soares, R. M.[a], Bianchini. B. L.[b], Lima, G. L.[b]

[a] Escola da Vila, Brasil
[b] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil

Temática: 5 –Extensões do MTSK

Resumo.
Propomos neste trabalho uma análise dos conhecimentos especializados potenciais requeridos pelo professor que ensina Matemática que atua no Ciclo de Alfabetização na rede de ensino da cidade de São Paulo com relação às habilidades previstas no eixo articulador Processos Matemáticos do Currículo da Cidade, destinado a tematizar o desenvolvimento de práticas relacionadas ao trabalho matemático em sala de aula. Destacamos uma complexa rede de conhecimentos necessários ao pedagogo para o desenvolvimento das habilidades requeridas, relacionados aos temas, às teorias de aprendizagem e às de ensino de Matemática. Além disso, salientamos a diversidade de registros, especialmente o oral, além da valorização no trabalho coletivo em sala de aula.

Palavras-chave. MTSK, Currículo da Cidade de São Paulo, Processos Matemáticos, Ensino Fundamental.

Abstract.
In this paper, we propose an analysis of the specialized knowledge required by the teacher who teaches Mathematics that works in the Literacy Cycle in the education network of the city of São Paulo in relation to the abilities foreseen in the articulating axis Mathematical Processes of the City Curriculum, aimed at thematizing the development of practices related to mathematical work in the classroom. We highlight a complex network of knowledge necessary for the pedagogue to develop the required skills, related to the themes, theories of learning and teaching of mathematics. In addition, we emphasize the diversity of registers, especially the oral one, in addition to the valorization in the collective work in the classroom.

Keywords. MTSK, São Paulo City Curriculum, Mathematical processes, Elementary school

Soares, R. M., Bianchini. B. L. y Lima, G. L. (2023). O eixo articulador processos matemáticos no ciclo de alfabetização da cidade de São Paulo: conhecimentos especializados requeridos dos professores. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 336-343). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introdução

Este trabalho é parte dos estudos decorrentes da tese de doutorado em desenvolvimento pela primeira autora e orientada pelos demais autores. Ao analisar o documento curricular da cidade de São Paulo, nos chamou a atenção a presença de um eixo específico, denominado *Processos Matemáticos*, centrado na abordagem do trabalho matemático em sala de aula, algo que, até então, não era presente em outros documentos curriculares da cidade ou do Estado de São Paulo.

Diante desse cenário, nos inquietou o questionamento acerca de quais conhecimentos especializados, de acordo com o modelo teórico Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (*Mathematical Teacher's Specialised Knowledge* - MTSK), os professores que ensinam Matemática no Ciclo de Alfabetização (destinado a crianças de 6 a 8 anos de idade) precisam mobilizar para propor práticas que tematizem o trabalho matemático nas salas de aula de 1º ao 3º ano do Ensino Fundamental nas escolas municipais.

Sendo assim, este trabalho configura parte da análise do documento "Currículo da Cidade", que futuramente fará parte de nosso relatório de pesquisa. Nele apresentamos nosso ponto de vista a respeito dos conhecimentos especializados potencialmente demandados em cada um dos seis subdomínios do modelo MTSK para o desenvolvimento das habilidades destacadas pelo documento para o ciclo de escolaridade em questão.

Uma breve apresentação do Currículo da Cidade

A Base Nacional Comum Curricular (Ministério da Educação de Brasil [MEC], 2018), documento norteador da Educação Básica brasileira, homologado em dezembro de 2017, é referência na elaboração de currículos regionais em todo o território brasileiro. Mediante sua iminente aprovação, no ano de 2017 iniciou-se na cidade de São Paulo a construção do Currículo da Cidade (São Paulo, 2019), documento curricular implementado já no ano seguinte como orientador dos Projetos Político-Pedagógicos das escolas municipais da cidade de São Paulo. Em relação à Matemática, o Currículo da Cidade contempla as mesmas unidades temáticas da BNCC (Números; Álgebra; Geometría; Grandezas e Medidas; Probabilidade e Estatística), renomeadas como eixos estruturantes, e inclui também três eixos articuladores, intitulados Jogos e Brincadeiras, Conexões Extramatemática e Processos Matemáticos que, na abordagem desta ciência, têm por objetivo estabelecer relações tanto entre os vários eixos estruturantes da Matemática (relações intramatemáticas) como entre as diferentes áreas de conhecimento (relações extramatemáticas). Neste artigo, considera-se como objeto de análise o eixo articulador Processos Matemáticos que, de acordo com o que é preconizado no documento,

> deve desenvolver-se simultaneamente aos outros eixos e se articular sobre processos básicos imprescindíveis no "fazer matemático": a resolução e formulação de problemas, os projetos de investigação matemática, a matematização, os jogos e a modelagem. Esses processos são ricos para o desenvolvimento do raciocínio, representação, comunicação, generalização, argumentação e estabelecimento de conjecturas numa variedade de contextos usando conceitos e procedimentos matemáticos. (São Paulo, 2019, p. 80)

Ainda segundo o documento, a resolução de problemas e as tarefas investigativas são o centro da atividade matemática e devem pautar a aprendizagem em Matemática ao longo do Ensino Fundamental. Nos 1º, 2º e 3º anos do Ensino Fundamental (que atende crianças de 6 a 8 anos) que, na divisão proposta pelo Currículo da Cidade compõem o chamado Ciclo de Alfabetização, o foco está "na alfabetização matemática, que leva em consideração os conhecimentos matemáticos que a criança traz de suas vivências e agrega novos conhecimentos que se articulam aos anteriores, possibilitando o desenvolvimento das crianças e sua participação na sociedade" (São Paulo, 2019, p. 83). No eixo articulador Processos Matemáticos, os objetos de conhecimento são as estratégias e os procedimentos de resolução de problemas e de validação de resultados; a elaboração de enunciados de problemas, a partir, por exemplo, de sentenças matemáticas e as investigações em contextos numéricos.

No Ciclo Interdisciplinar, contemplando o 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental (anos destinados a alunos de 9 a 11 anos), o foco está na ampliação da capacidade de os estudantes raciocinarem e no fortalecimento da argumentação, recorrendo, para isso, ao "uso de justificativas, com exemplos, contraexemplos, análise de casos e formulação de hipóteses, justificando-as com exemplos e deduções informais" (Secretaria Municipal de Educação [SME], 2019, p.97). Os objetos de conhecimento inseridos no eixo articulador Processos Matemáticos são: investigações em contextos numéricos, algébricos e geométricos; e resoluções de problemas empregando a linguagem matemática.

Por fim, no 7º, 8º e 9º anos (destinados a estudantes de 12 a 14 anos) , que correspondem ao ciclo Autoral, o foco está na criação de situações que possibilitem aos estudantes realizar observações sistemáticas de aspectos qualitativos e quantitativos da realidade, levando em consideração o que já deveria ter sido aprendido nos anos anteriores e, visando o desenvolvimento da comunicação matemática, o uso da linguagem simbólica, de diferentes representações e da argumentação, de modo a propiciar aos estudantes a ampliação do raciocínio matemático. No eixo articulador Processos Matemáticos, os objetos de conhecimento neste ciclo são: investigações em contextos numéricos, algébricos e geométricos; processo e método de trabalho científico; e emprego de recursos tecnológicos no processo de aprendizagem.

Observando os objetos de conhecimento previstos para o eixo articulador Processos Matemáticos, notamos que configuram, de fato, boas oportunidades para o professor tematizar alguns aspectos do trabalho matemático ao longo do Ensino Fundamental. Desse modo, nos questionamos: quais deveriam ser os conhecimentos especializados dos professores que ensinam Matemática e dos professores de Matemática, atuantes em cada ciclo de aprendizagem, a serem mobilizados e colocados em prática em suas aulas? Neste artigo, considerando como recorte o ciclo Alfabetização, para responder à esta questão, recorremos ao modelo teórico Conhecimento Especializado do Professor de Matemática (*Mathematical Teacher's Specialised Knowledge* - MTSK).

Aspectos metodológicos

Lizarde y Caldatto (2022) apontam que, para além da intencionalidade analítica-interpretativa, o modelo MTSK seja, também, utilizado para analisar componentes das propostas formativas oficiais, tanto em formações iniciais, quanto em formações continuadas. Propomos, em outra perspectiva, o uso do modelo MTSK para análise de documentos curriculares oficiais. Para isso, utilizamos o "conhecimento especializado potencial do professor de/que ensina Matemática" (Lizarde y Caldatto, 2022), ou seja, conjecturamos possíveis conhecimentos mobilizados pelos professores ao trabalhar com o eixo articulador Processos Matemáticos no Ensino Fundamental, comparando-os aos que sugerem os domínios, subdomínios e categorias propostos pelo modelo. Neste artigo, nossa atenção volta-se especificamente para o Ciclo de Alfabetização, buscando explorar presenças, evidências ou ausências dos conhecimentos que compõem os domínios e subdomínios do modelo MTSK.

Neste trabalho, do ponto de vista metodológico, adotamos a acepção de análise de conteúdo proposta por Krippendorff (1997), considerando como unidade de amostra, dentre o conjunto de documentos oficiais passíveis de serem analisados, o documento completo do Currículo da Cidade de São Paulo e, de modo a aprofundar as análises, consideramos, como unidades de registro, os objetivos previstos no eixo articulador Processos Matemáticos. De acordo com esse autor, "as unidades de registro são descritas separadamente e podem ser consideradas partes de uma unidade de amostra que podem ser analisadas isoladamente" (Krippendorff, 1997, p.83).

Breve explanação sobre o MTSK

Neste artigo utilizaremos o modelo MTSK, proposto por Carrillo et al. (2018), por meio do qual o conhecimento especializado do professor de Matemática é estruturado nos domínios de conhecimentos MK (*Conhecimento Matemático*), PCK (*Conhecimento Pedagógico do Conteúdo*) e em Crenças, que permeiam os domínios mencionados. O MK (*Conhecimento Matemático*) se refere ao conhecimento do professor sobre a Matemática, conceitos, sua estrutura, as regras e os recursos pertinentes ao processo de criação do conhecimento matemático, grupo de conhecimentos que permite ao professor ensinar conteúdos de forma conectada e poder validar conjecturas próprias e aquelas feitas pelos estudantes em sala de aula. O PCK (*Conhecimento Pedagógico do Conteúdo*) se refere ao conhecimento pedagógico do conteúdo matemático a ser ensinado. Já as Crenças permeiam os dois domínios destacados anteriormente e, de acordo com Pascual et al. (2019) são incluídas no domínio afetivo, juntamente com atitudes e emoções.

O domínio MK é constituído por três subdomínios: *Conhecimento dos Tópicos* (KoT), *Conhecimento da Prática Matemática* (KPM) e *Conhecimento da Estrutura da Matemática* (KSM). Já o domínio PCK é composto pelos subdomínios *Conhecimento das Características de Aprendizagem da Matemática* (KFLM), *Conhecimento do Ensino da Matemática* (KMT) e Conhecimento dos Estândares de Aprendizagem da Matemática (KMLS).

O eixo articulador Processos Matemáticos no Ciclo de Alfabetização e os conhecimentos especializados do professor de Matemática ou do professor que ensina Matemática

O Ciclo de Alfabetização corresponde ao período em que são priorizadas situações de aprendizagem que favorecem o desenvolvimento da leitura, da escrita e das alfabetizações matemática e científica. Sendo assim, é imprescindível que sejam oportunizadas situações em que os estudantes possam se expressar utilizando diversos tipos de linguagem, incluindo, mas não somente, a linguagem escrita.

Diante disso, o documento propõe destaque para a expressão oral dos estudantes para apresentação das estratégias elaboradas para as situações propostas nos dois primeiros anos do Ciclo, fortalecendo o caráter dialógico que uma proposta pautada no trabalho matemático pode ter. Notando a gradação das habilidades, destacamos a proposição coletiva de enunciados e a investigação da propriedade comutativa da adição por meio da observação de regularidades, previstas para o 3º ano do ensino fundamental.

Destacamos a seguir os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento do eixo articulador Processos Matemáticos, bem como os conhecimentos especializados potenciais que o professor atuante no Ciclo de Alfabetização precisa mobilizar ao desenvolver as habilidades especificadas.

Quadro 1. Conhecimentos Especializados relacionados aos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento do eixo articulador Processos Matemáticos no Ciclo de Alfabetização

Objetivos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização
(EF01M38) Explicar oralmente as estratégias e os processos de raciocínios utilizados na resolução de um problema. (EF01M39) Explicar oralmente os registros feitos e os resultados obtidos na resolução de um problema. (EF02M36) Expressar, oralmente e de forma organizada, o processo desenvolvido na resolução de um problema e justificar o resultado, usando vocabulário pessoal. (EF02M37) Elaborar perguntas para um problema e resolvê-lo, verificando a validade da solução. (EF03M36) Formular coletivamente o enunciado de um problema a partir de uma sentença matemática e resolvê-lo, analisando a plausibilidade dos resultados. (EF03M37) Investigar a validade da propriedade comutativa da adição a partir de regularidades.
Conhecimentos Especializados do domínio MK
KoT: contagem; funções sociais dos números; o conjunto dos números naturais, comparação, composição e decomposição de números naturais, leitura e escrita numérica; identificação e localização de números naturais na reta numérica; relações entre números naturais; sistema de numeração decimal; procedimentos de cálculo e fatos fundamentais da adição, da subtração e da multiplicação de números naturais; relação de igualdade em diferentes sentenças matemáticas envolvendo adições ou subtrações; problemas do campo aditivo envolvendo o significado de composição, de transformação e de comparação; problemas do campo multiplicativo envolvendo o significado de proporcionalidade e de configuração retangular; padrões numéricos ou figurais; sequências repetitivas e sequências recursivas, tanto numéricas quanto figurais: construção, identificação, descrição de padrões e regularidades e determinação de elementos ausentes; leitura e representação da localização e movimentação de pessoas ou objetos no espaço, pontos de referência, a partir da indicação de posição, de direção e sentido; figuras espaciais e figuras planas, suas semelhanças e diferenças; planificação de figuras espaciais; superfícies planas ou arredondadas; medida de comprimento, capacidade, massa e tempo: uso de unidades padronizadas, não padronizadas, estimativas, medições e comparações de medidas; sistema monetário brasileiro; as ideias de acaso e de aleatoriedade e suas relações com situações do cotidiano; coleta, classificação, organização, representação, leitura, comparação e comunicação de dados.
KSM: conexões entre: a ideia básica de contagem e seus aprofundamentos subsequentes em problemas combinatórios; o conjunto dos números naturais, suas características e as operações definidas em tal conjunto e os demais conjuntos numéricos e seus aspectos caracterizadores que serão estudados posteriormente; os diferentes tipos de problemas dos campos aditivo e multiplicativo; a igualdade e a relação de equivalência; os números naturais e a noção de medida; os números naturais e o sistema monetário brasileiro; as figuras geométricas planas e as espaciais; a localização de pontos no plano e no espaço e os eixos cartesianos. Por fim, as conexões entre os diferentes eixos estruturantes: Números, Álgebra; Geometria; Probabilidade e Estatística; Grandezas.
KPM: aspectos caracterizadores dos modos específicos de pensar, proceder, criar ou produzir em Matemática, ou seja, conhecimento acerca dos elementos que constituem o pensamento matemático em suas diferentes vertentes: aritmético, algébrico, geométrico, computacional, variacional, proporcional, combinatório, estatístico, probabilístico e financeiro. Conhecimentos acerca da comunicação matemática, de como estabelecer relações entre conceitos e propriedades, de como selecionar adequadamente representações para um dado objeto matemático, de como argumentar para comprovar, refutar e refinar raciocínios e dos processos de verificar uma afirmação ou explicitar contraexemplos para ela. Conhecimentos acerca das fases e das heurísticas relacionadas ao processo de resolução de um problema matemático.
Conhecimentos Especializados do domínio PCK
KFLM: as teorias de aprendizagem da Matemática; que dificuldades estudantes desta faixa etária podem encontrar ao estudar os conteúdos matemáticos previstos para o Ciclo de Alfabetização; os resultados de pesquisas da área de Educação Matemática; principais erros que costumam cometer; em que áreas enfrentam mais dificuldades e em quais têm maior facilidade; como os estudantes interagem com esses conteúdos matemáticos e como se portam diante das tarefas inerentes aos objetivos de aprendizagem e desenvolvimento deste Ciclo; quais os efeitos, para a aprendizagem de Matemática, particularmente para as crianças de 6 a 8 anos de idade, de aspectos emocionais; as características dos diferentes estilos de aprendizagem de Matemática por estudantes das supracitadas idades.
KMT: as estratégias (como a resolução e a proposição de problemas, as investigações matemáticas); as teorias de ensino de Matemática; os recursos (físicos e digitais) mais apropriados para o trabalho com os conteúdos matemáticos previstos para serem desenvolvidos no Ciclo de Alfabetização; as potencialidades e as limitações de determinadas estratégias, atividades, técnicas e exemplos para o ensino de cada um dos conteúdos matemáticos a serem abordados.
KMLS: a BNCC (documento que subsidiou a elaboração do Currículo da Cidade); os níveis de habilidades matemáticas a serem desenvolvidas, conforme preconizado pelo Currículo da Cidade, no Ciclo de Alfabetização; resultados esperados, em termos de aprendizado, de níveis de desenvolvimento conceitual e processual em Matemática, para crianças de 6 a 8 anos de idade; sequenciamento previsto oficialmente para os conteúdos a serem trabalhados no ciclo mencionado; os papéis que devem desempenhar os eixos articuladores; o papel específico do eixo articulador Processos Matemáticos; a matriz de referência para avaliação do Saresp (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) Matemática.

Fonte: Elaboração própria.

No eixo articulador Processos Matemáticos, ao voltarmos nossa atenção para o Ciclo de Alfabetização, no âmbito do Conhecimento Matemático (MK), os Conhecimentos dos Tópicos (KoT), são aqueles relacionados aos procedimentos, definições, propriedades, fundamentos, representações em diferentes registros, fenomenologia e aplicações vinculados aos conceitos matemáticos previstos para serem trabalhados, neste ciclo, nos eixos estruturantes. Nota-se, portanto, a necessidade de uma sólida formação matemática do docente que atua no Ciclo de Alfabetização, a qual, muitas vezes, não se consolida na formação inicial do pedagogo, uma vez que a carga horária para reflexões matemáticas, em geral, é muito reduzida (Curi, 2004; Cunha, 2010; Maldaner, 2020) e as discussões acabam se restringindo aos aspectos didáticos, sem aprofundamento conceitual dos objetos matemáticos com os quais os futuros professores irão trabalhar.

Em relação aos Conhecimentos das Estruturas da Matemática (KSM), a articulação de diferentes conceitos matemáticos nos parece fundamental para que o docente possa trabalhar, de modo efetivo, a proposta do eixo Processos Matemáticos. Formações iniciais ou continuadas de docentes que atuam no Ciclo de Alfabetização, que os possibilitem construir de maneira consistente conhecimentos relativos ao domínio KSM, são condições essenciais para a implementação efetiva do Currículo da Cidade, do modo como este foi concebido no que se refere à articulação de conceitos matemáticos por meio dos eixos Jogos e Brincadeiras, Conexões Extramatemática e Processos Matemáticos.

Acerca dos Conhecimentos da Prática Matemática (KPM), além daqueles relativos aos diferentes tipos de pensamentos matemáticos, há alguns que adquirem especial protagonismo, a saber: a comunicação matemática, a argumentação para comprovar, refutar e refinar raciocínios, os processos de verificar uma afirmação ou explicitar contraexemplos que a refutem e as heurísticas relacionadas ao processo de resolução de um problema. Tal protagonismo deveria, portanto, ser refletido também em ações para suas construções e consolidações nas formações iniciais e continuadas dos docentes responsáveis por implementar o Currículo da Cidade. Destacamos também, no objetivo de conhecimento e de aprendizagem EF03M37, a orientação para a realização de uma investigação relacionada às propriedades das operações já nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para orientar o estudante em relação a este aspecto, o professor deve ter o conhecimento especializado de que as propriedades das operações não são uma série de regras a serem seguidas sem atribuição de significado e conhecer outros contextos nos quais os estudantes se depararão com a discussão das propriedades e estas não necessariamente seguirão válidas, como, por exemplo, o contexto das matrizes (objeto de estudo do Ensino Médio), no qual a operação de multiplicação não é comutativa.

No que se refere ao domínio Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK), os apontamentos feitos no Quadro 1 acerca do subdomínio Conhecimento das Características de Aprendizagem da Matemática (KFLM) evidenciam a pertinência de as formações dos docentes que atuam ou atuarão no Ciclo de Alfabetização possibilitarem o contato com investigações da área de Educação Matemática, sendo, em nosso ponto de vista, essencial, sobretudo, que os professores/futuros professores se apropriem de pesquisas que tematizam o processo de desenvolvimento das diferentes vertentes do pensamento matemático e que sejam estimulados a refletir a respeito das influências de questões emocionais, como a ansiedade, por exemplo, na aprendizagem de Matemática, bem como que entrem em contato com estudos acerca dos diferentes estilos evidenciados pelos sujeitos ao aprender Matemática. Além disso, as teorias de aprendizagem especificamente voltadas à Matemática também devem ser objetos de estudo nestas formações para que possa ocorrer uma implementação competente do que é preconizado no documento analisado neste artigo. A análise dos conhecimentos inseridos no subdomínio KoT revela a particular necessidade de os docentes se familiarizarem com a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud.

Voltando nossa atenção aos Conhecimentos do Ensino da Matemática (KMT), as informações presentes no Quadro 1 evidenciam o quão importante é, para que os docentes possam efetivamente alcançar os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento visados no eixo articulador Processos Matemáticos no Ciclo de Alfabetização (Quadro 1), construírem conhecimentos sólidos acerca de duas estratégias de ensino de Matemática intimamente relacionadas: a resolução e a proposição de problemas. Ambas devem estar presentes – e serem vivenciadas pelos professores/futuros professores – nas formações iniciais e continuadas (Proença, 2015; Oliveira y Oliveira, 2013), nas quais é fundamental que reflitam acerca de suas limitações, potencialidades e das possíveis dificuldades a serem enfrentadas ao adotá-las em aulas voltadas às crianças de 6 a 8 anos de idade. Ainda com relação a esse subdomínio KMT, observando os objetivos previstos no eixo articulador analisado, os professores precisam reconhecer a importância de tematizar nas aulas de Matemática elementos próprios do trabalho matemático, assim como é importante que reconheçam diferentes contextos em que a investigação matemática pode ser um elemento potente em sala de aula. Devem ainda estar atentos às investigações e às atividades propostas, a como envolver os estudantes ao propô-las, em possibilitar um ambiente em que todos possam falar, expressar suas ideias e corrigir possíveis erros. Por fim, no Ciclo de Alfabetização ou em qualquer outra etapa educacional, é necessário que os professores sejam cuidadosos para não proporem investigações e outros tipos de atividades muito complexas para a faixa etária com a qual trabalham, assim como tenham conhecimento de até que ponto podem intervir nas discussões, sem darem respostas prontas ou direcionarem demais os estudantes para um caminho de resolução.

No subdomínio Conhecimentos dos Estândares de Aprendizagem da Matemática (KMLS) adquire papel central, para a atuação do docente no Ciclo de Alfabetização, além do conhecimento da BNCC e do Currículo da Cidade de modo geral, a compreensão do porquê haver neste último documento mencionado os denominados eixos articuladores, que papéis estes devem ter na aprendizagem dos estudantes, e, especialmente, qual o objetivo do eixo articulador Processos Matemáticos, objeto de análise neste artigo. É importante que o docente tenha conhecimento de que, no Currículo da Cidade, prevê-se uma sequência gradual das propostas dos eixos articuladores, relacionados, inclusive, com o objetivo de cada um dos três Ciclos. O professor precisa reconhecer essa gradação nas propostas, a relação com os conteúdos previstos para cada ano e a vinculação com o Ciclo em que trabalha. Além disso, obviamente o professor precisa conhecer o que se espera que o aluno tenha aprendido ao final do mencionado Ciclo e o que será dele cobrado no Saresp, avaliação que é aplicada pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo aos alunos dos ensinos Fundamental e Médio com o intuito de diagnosticar a situação da escolaridade básica no Estado, de modo a subsidiar o monitoramento de políticas voltadas à melhoria da qualidade educacional.

Considerações finais

A indicação para metodologias, como resolução e proposição de problemas e investigações desde o Ciclo de Alfabetização, é por nós avaliada como um avanço importante proposto por esse documento, no sentido de tematizar o trabalho matemático em sala de aula. Outro destaque é a valorização do uso de diversos tipos registros de representação (nem todos de representação semiótica), iniciando pelo oral, escrito em linguagem natural, uso de tabelas, gráficos, até chegar ao algébrico no Ciclo Autoral.

Contudo, acreditamos que o documento poderia propor mais casos em que as investigações pudessem ser exploradas no Ciclo de Alfabetização, como o cálculo mental sendo um caminho para explorar regularidades em adições, relações entre termos das operações, dentre outros. Além disso, no 3º ano desse Ciclo, a proposta é investigar as propriedades por meio de regularidades, mas o documento não apresenta orientações para o professor desse nível de ensino realizar tal trabalho e de como as propostas previstas para esse Ciclo podem ser base para discussões futuras e repercutir em outras temáticas. Uma orientação mais detalhada, aliada à formação continuada, esta última indicada pelo próprio documento, poderiam favorecer a potencialidade do desenvolvimento das habilidades propostas para o eixo articulador Processos Matemáticos, já que a intencionalidade didática voltada ao reconhecimento das oportunidades de serem tematizados alguns dos elementos próprios do trabalho matemático e da valorização desse tipo de trabalho, só é possível se o conhecimento matemático está presente como base de toda a análise.

Nesse sentido, após a análise dos conhecimentos especializados potenciais demandados pelo professor que ensina Matemática nos três anos do Ciclo de Alfabetização e de caracterizar o quão complexa é a relação entre esses conhecimentos e a concretização do trabalho proposto pelo eixo analisado, destacamos como um sólido conhecimento matemático relacionado aos temas e algum domínio quanto às práticas características da Matemática são requisitos básicos para esse trabalho, assim como é essencial o conhecimento a respeito de alguns resultados de pesquisas na área da Educação Matemática. Assim, este artigo pode contribuir para que propostas de formação continuada direcionadas aos professores pedagogos abordem os conhecimentos especializados de modo pertinente às práticas matemáticas requeridas para o desenvolvimento das habilidades destacadas para o Ciclo de Alfabetização.

Referências

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Cunha, D. R. (2010). *A matemática na formação de professores dos anos iniciais do ensino fundamental: relações entre a formação inicial e a prática pedagógica* [Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul]. https://tede2.pucrs.br/tede2/handle/tede/3394

Curi, E. (2004). F*ormação de professores polivalentes: uma análise de conhecimento para ensinar matemática e de crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos* [Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo]. http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Tese_curi.pdf

Krippendorff, K. (1997). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica.* Paidós.

Lizarde, E., y Caldatto, M. E. (2022). El modelo MTSK y el análisis de programas formativos. En J. Carrillo, M. A. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 291–302). Dykinson.

Maldaner, A. S. (2020). *Formação do pedagogo para o ensino da matemática nos anos iniciais: um olhar para os currículos das universidades federais do Brasil* [Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Paraná]. https://hdl.handle.net/1884/69305

Ministério da Educação de Brasil [MEC]. (2018). *Base Nacional Comum Curricular.* Autor.

Oliveira, G. M. de, y Oliveira, A. T. de. C. C. de (2013). A Matemática Na Formação Inicial De Professores Dos Anos Iniciais: Reflexões A Partir De Uma Análise De Teses E Dissertações Defendidas Entre 2005 E 2010 No Brasil. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, 4*(1), 1/25. https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2238

Pascual, I., Fernández-Gago, J., García, M., Marbán, J., y Maroto, A. (2019). El dominio afectivo y MTSK. En *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 32-40). Universidad de Huelva.

Proença, M. C. de. (2015). O ensino de frações via resolução de problemas na formação de futuras professoras de pedagogia. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 29*(52), 729–755. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a15

Secretaria Municipal de Educação [SME]. (2019). *Currículo da Cidade: Ensino Fundamental: componente curricular: Matemática.* Autor. https://educacao.sme.prefeitura.sp.gov.br/wp-content/uploads/2019/05/50629.pdf

CONHECIMENTO ESPECÍFICO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA EM TECNOLOGIAS DIGITAIS

Specific Knowledge of Mathematics Teacher in Digital Technologies

Martins, R.G. de O[a], Santos, M. E. K. L.[a]
[a] Universidade Cruzeiro do Sul, Brasil

Temática: 5 –Extensões do MTSK

Introdução

A reflexão da formação inicial e contínua, a partir da análise das práticas pedagógicas permeiam o saber e o fazer pedagógico dos professores que tem como objetivo agir de forma coerente e transformadora, enfatizando o seu papel, compromisso e fortalecendo atuação docente. Diante disso, ressaltamos que o conhecimento de professores necessário para ensinar tem percorrido uma trajetória que vai do genérico ao especializado (Moriel-Junior y Wielewski, 2017).

A disciplina de Matemática foi precursora ao abordar suas especificidades com o modelo Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) (Ball et al., 2008), dadas as evoluções e limitações acarretou o desenvolvimento do modelo do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK) (Carrillo et al., 2014; Carrillo et al., 2018). Reconhecendo-se o impacto do MTSK na área de educação matemática, o modelo passou a ser transposto a outras disciplinas das ciências e tecnologias.

O aperfeiçoamento das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) promoveu novas possibilidades nos processos de ensino e aprendizagem. A evolução tecnológica contribuiu e vêm contribuindo para o desenvolvimento do ensino a distância on-line e para a aprendizagem com mobilidade (com dispositivos móveis). A tecnologia, além de fazer do cotidiano das pessoas, está também fazendo parte das salas de aula.

Enquadramento Teórico

O modelo MTSK é apresentado por um hexágono com dois domínios, que são nomeados de Conhecimento Matemático (MK) e conhecimento Didático do conteúdo (PCK) cada um desses conhecimentos possuem três subdomínios.

A partir da elaboração do modelo MTSK, outros modelos foram transpostos para outras disciplinas de ciências e neste VI Congresso o MTSK existe uma proposta para o Ensino de Tecnologias na Temática 5 - 2) a relação com o uso da tecnologia (a relevância, atualidade e variedade no uso da tecnologia abrem essa linha considerando a relação do MTSK com poderosos frameworks para o uso da tecnologia na Educação Matemática), que por não encontrar uma sigla pertinente sugiro neste trabalho MTTSK (Conhecimentos Especializado de Professores de Matemática em Tecnologias).

Martins, R.G. de O. y Santos, M. E. K. L. (2023). Conhecimento específico do professor de matemática em tecnologias digitais. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 344-345). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Metodologia

A pesquisa é qualitativa (Bogdan e Biklen, 1992), bibliográfica, de cunho analítico, teve como fonte de dados o banco de dados da *Web of Science*. Foi realizada a pesquisa a partir do levantamento de artigos científicos. Na busca foram utilizadas as palavras chaves: "MSTK in Technologies" and "Mathematics teacher and the use of tecnologies".

Resultados

Os resultados deste estudo não atenderam às nossas expectativas. Embora a *Web of Science* seja uma plataforma abrangente que facilita a pesquisa confiável, com quase 1,9 bilhão de referências citadas e mais de 171 milhões de registros, nenhum artigo foi encontrado com as palavras-chave propostas para o tema deste estudo, como mostrado na Figura 1. Foram investigados diferentes tópicos oferecidos pela plataforma.

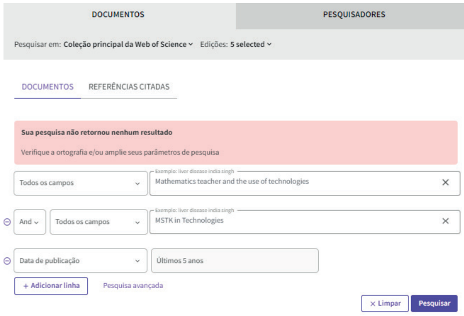


Figura 1. Página oficial da Web of Science -
https://www-webofscience.ez342.periodicos.capes.gov.br/wos/woscc/basic-search

Considerações Finais

O indício identificado aponta a necessidade da continuidade da investigação para ampliar a compreensão do fenômeno observado, a falta de artigos na temática proposta.

Apesar dos nossos resultados da análise estarem restritos ao atual estado do conhecimento sobre o modelo do MTTSK (assim proposto pelos autores), a expectativa é que continuemos a desenvolver pesquisas com o modelo teórico (como a deste trabalho) quanto empíricas. Acreditamos que com professores mais preparados com conhecimento especializado seja possível uma melhoria significativa da qualidade do ensino de matemática através das tecnologias digitais e da aprendizagem discente.

Referencias

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: Whats Makes It Special? *Journal of teacher education, 59*(5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M.A., Escudero-Ávila, D., y Flores-Medrano, E. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas.* Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Moriel Junior, J.G., y Wielewski, G. D. (2017). Base de conhecimento de professores de matemática: do genérico ao especializado. *Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas, 18*(2), 126-133.

FORO "EQUIPO DE CHILE- RED MTSK": SUBREDES DE COLABORACIÓN, INNOVACIÓN E INVESTIGACIÓN

Red MTSK-Chile Team forum: emergence of collaborative, innovative, and research subnetworks

Ramos-Rodríguez, E.[a], López-Urquía, L. M.[a]

[a] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Resumen.
En este documento se presentan ideas compartidas en el Foro "Equipo de Chile - Red MTSK", desarrollado durante el VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas en Valparaíso, Chile. Se ofrece una mirada sobre la consolidación del equipo de Chile de la Red MTSK, identificando siete subredes nacionales con diversos enfoques y resaltando los aspectos claves de cada una de ellas. Se menciona la conformación de estas subredes mediante colaboraciones nacionales e internacionales, las temáticas que abordan y sus aportes a la educación matemática en Chile e Iberoamérica.

Palabras clave. Chile, Red MTSK.

Abstract.
Aspects shared in the MTSK-Chile Network Forum are presented, developed during the VI Ibero-American Congress on Specialized Knowledge of Mathematics Teachers in Chile. A look at the MTSK-Chile Network is offered, identifying seven national subnetworks with diverse focuses and highlighting the key aspects of each of them. It highlights how these subnetworks, through national and international collaborations, have enriched mathematics education in Chile and Ibero-America.

Keywords. Chile, MTSK Network.

Ramos-Rodríguez, E. y López-Urquía, L. M. (2023). Foro "Equipo de Chile- Red MTSK": subredes de colaboración, innovación e investigación. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 346-350). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

Al ser Chile el país anfitrión del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (CIMTSK), se le dio la oportunidad de contar con un espacio en este evento donde los investigadores del equipo chileno de la Red Iberoamericana MTSK (en adelante, Red MTSK) pudieran presentar sus proyectos y acciones desarrolladas en Chile bajo el modelo que subyace a la Red. De esta manera, se diseñó y ejecutó el Foro Equipo de Chile-Red MTSK. Este documento ofrece una visión general del equipo de Chile en la Red MTSK e ideas principales que se compartieron en dicho foro.

Una mirada al Equipo de Chile - Red MTSK

El Equipo de Chile de la Red MTSK se ha destacado en el periodo 2022-2023 por su participación en las cinco temáticas que se desarrollan en la Red MTSK. Con 23 investigadores asociados, el equipo ha generado proyectos de investigación, capítulos de libros y artículos científicos, teniendo una presencia destacada en congresos nacionales (p.ej. XXV y XXVI Jornadas Nacionales de Educación Matemática de la SOCHIEM, en 2021 y 2022, respectivamente) e internacionales (p.ej. Congreso Universitario Internacional sobre la Comunicación, Innovación, Investigación y Docencia - CUICIID, 2022; Septième Symposium d'Étude sur le Travail Mathematique - ETM7, 2023; Thirteenth Congress Of The European Society For Research In Mathematics Education, 13 CERME – 2023; XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática, XVI CIAEM - 2023).

Los integrantes del equipo de Chile se encuentran distribuidos en diversas universidades a lo largo del territorio nacional de una extensión de 4.270 km. La Figura 1 muestra el mapa de ubicación de las sedes centrales de las universidades con participantes activos del equipo. Asimismo, varias de estas instituciones cuentan con sedes en diferentes regiones del país, desde la zona norte, centro y sur de Chile, donde el modelo MTSK se emplea con fines educativos e investigativos.

Los espacios de trabajo del equipo nacional han promovido el intercambio de prácticas innovadoras con el objetivo de influir en la formación de profesores de matemáticas, garantizando una formación especializada de alta calidad, como queda de manifiesto en Ramos et al. (2022). En estos espacios se han discutido resultados de proyectos, investigaciones, tesis y proyectos en desarrollo.

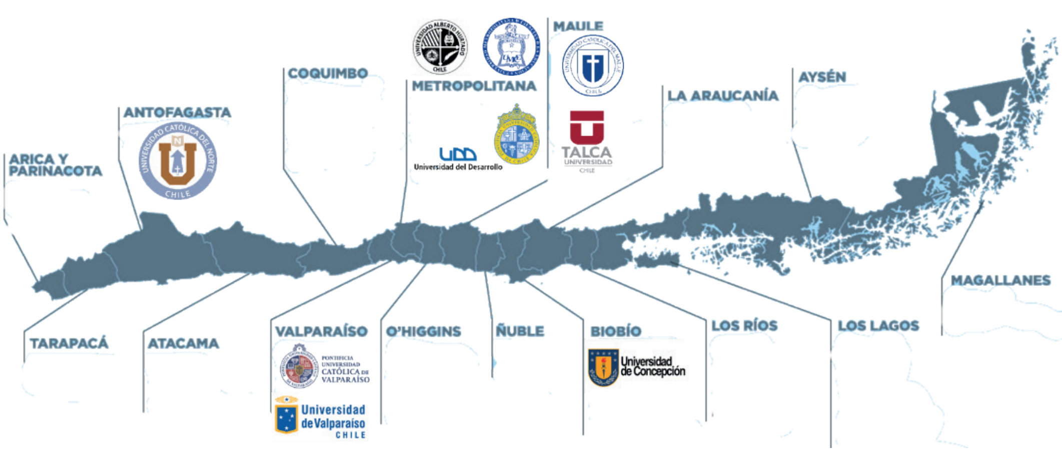


Figura 1. Universidades chilenas con miembros de la Red MTSK

En particular, los últimos años han sido testigo de un esfuerzo conjunto que se tradujo en la adjudicación de proyectos concursables internos que convocan universidades y otros con financiamiento gubernamental en calidad de investigadores responsables (p.ej. FONDECYT Iniciación N° 11231088, Gonzalo Espinoza; FONDECYT Iniciación N° 11230523, Carolina Henríquez; FONDECYT Iniciación N°11190553, Elisabeth Ramos; FONDECYT Iniciación N°11230240, Paula Verdugo; FONDECYT Regular N°1230434, Diana Zakaryan). De acuerdo con la percepción del equipo, esta colaboración ha enriquecido la esfera teórica, metodológica y formativa en los integrantes de la red, promoviendo además la integración de nuevos investigadores.

Además, en el 2023 se llevó a cabo el VI CIMTSK en Valparaíso, Chile, organizado por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, lo que refleja el compromiso continuo con el desarrollo y la difusión del modelo MTSK en el país.

Junto con identificar las universidades con integrantes activos de la Red MTSK, un análisis de las contribuciones reflejadas en la Memoria de la Red MTSK 2022 permitió distinguir siete subredes conformados por los mismos.

La colaboración en estas subredes ha permitido consolidar ideas y generar conocimiento especializado, como queda reflejado en las múltiples producciones (divulgación y proyectos) en torno al modelo del MTSK generadas por el equipo. Cada subred compartió su experiencia en el foro, desde cómo surgió la sinergia hasta los frutos tangibles cosechados por su trabajo conjunto. Estas alianzas han ido más allá de la investigación, impactando positivamente en la formación de profesores y en el desarrollo de la educación matemática en Chile (Ramos et al., 2022) e Iberoamérica.

En la Figura 2 se ilustra la conformación de las subredes. Cada punto representa a un investigador miembro del equipo de Chile la Red MTSK y los distintos colores de estos puntos señalan las distintas universidades asociadas. Los puntos en color gris identifican a integrantes de otros países de la Red MTSK, que comparten investigación o colaboración con investigadores de Chile. Cada subred tiene un enfoque específico y atiende distintas temáticas propuestas desde la Red MTSK. Cada una se nutre de la colaboración y el diálogo constante entre investigadores nacionales e internacionales, tanto miembros como no miembros de la Red MTSK, lo que brinda oportunidades de expansión y difusión más amplias.

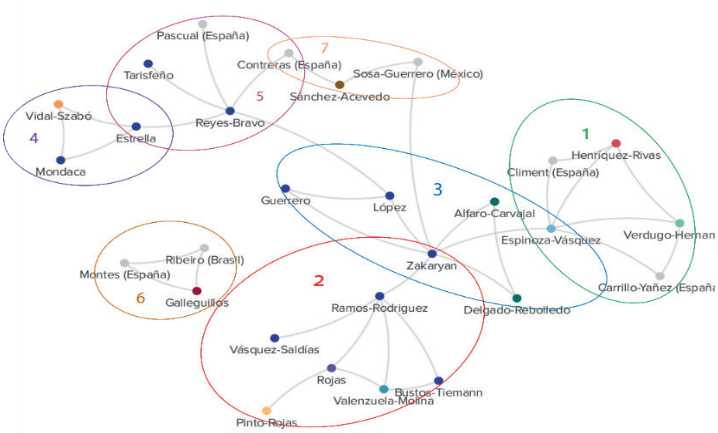


Figura 2. Subredes del equipo de Chile.

Esto ha llevado a que cada subred aporte presentaciones, investigaciones, publicaciones y proyectos que enriquecen la comprensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas desde diversas perspectivas y modelos, divulgados en revistas, libros y congresos de educación matemática. Debido a limitaciones de espacio, no es posible detallar las publicaciones individuales de cada subred ni otros aspectos que justificarían la dedicación de un capítulo para cada una de ellas, pero presentamos de manera sintética las ideas centrales de sus producciones. Además, mencionamos a los miembros de cada subred para que los lectores interesados puedan dirigirse a ellos.

Subred 1: Temática 5 – Explora la relación entre ETM y MTSK, centrada en comprender la práctica del profesor de matemáticas desde ambos modelos, encontrando puntos de conexión y complementariedad. Proyecta investigar cómo el MTSK influye en el diseño del ETM y viceversa, ampliando su trabajo a diversas nociones matemáticas y niveles escolares.

Miembros de la Subred 1: Gonzalo Espinoza Vásquez de la Universidad Alberto Hurtado; Carolina Henríquez Rivas de la Universidad Católica del Maule y Paula Verdugo Hernández de la Universidad de Talca.

Subred 2: Temática 1 y 3 – Se concentra en estudiar el MTSK en la formación de profesores y su relación con diversos temas y etapas, profundizando en cómo el modelo impacta la formación docente y su aplicación en distintos contextos. Proyecta una beta investigativa con relación a la transformación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Miembros de la Subred 2: Elisabeth Ramos Rodríguez, Cristián Bustos Tiemann, Patricia Vásquez Saldías y Diana Zakaryan de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso; Nielka Rojas González de la Universidad Central del Norte; y Macarena Valenzuela Molina de la Universidad Alberto Hurtado.

Subred 3: Temática 4 y 5 – Su enfoque gira en torno al desarrollo del MTSK y en la indagación de relaciones entre el MTSK y el *Noticing* en la práctica docente y en la formación inicial de profesores de matemática. Destaca por su colaboración basada en la dirección de tesis y la afinidad académica.

Miembros de la subred 3: Diana Zakaryan, Carolina Guerrero Ortiz y Ledher López Urquía de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso; Rosa Delgado Rebolledo de la Universidad de Concepción; y Gonzalo Espinoza Vásquez de la Universidad Alberto Hurtado.

Subred 4: Temática 5 – Se profundiza y desarrolla en el Modelo STSK (i.e., Conocimiento Especializado del Profesor de Estadística), una extensión del modelo MTSK, tal que diferencia a la estadística como una disciplina propia, cuyas ideas principales son: variabilidad, contexto de los datos e incertidumbre.

Miembros de la subred 4: Pedro Vidal Szabó de la Universidad del Desarrollo; Soledad Estrella de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso; y se cuenta con la colaboración de investigadores de Brasil.

Subred 5: Temática 2 – Se concentra en el conocimiento especializado del formador de profesores de educación primaria, trabajando en colaboración con académicos españoles.

Miembros de la subred 5: Macarena Reyes Bravo y Soledad Estrella de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, junto con investigadores de España.

Subred 6: Temática 1 – Se centra en el Conocimiento Interpretativo y Especializado del profesor de Matemáticas (CIEspMAT), estudia las Tareas para la Formación de Profesores (TpF) y las creencias de los profesores, buscando entender cómo influyen en la interpretación y aplicación del conocimiento especializado.

Miembros de la subred 6: Jeannette Galleguillos de la Universidad de Valparaíso, junto con investigadores de Brasil y España.

Subred 7: Temática 3 y 4 – Explora la selección y uso de ejemplos en la ecuación y función cuadrática, actualmente profundizando en la exploración del MTSK en relación con la ejemplificación, buscando comprender cómo este modelo impacta la elección de ejemplos en la enseñanza.

Miembros de la subred 7: Nicolás Sánchez Acevedo de la Universidad Alberto Hurtado y Universidad Central de Chile, junto con investigadores de México y España.

Como hemos visto, los integrantes del Equipo de Chile abordan las cinco temáticas que propone la Red MTSK. Cada subred ha trascendido las fronteras de la investigación y se proyecta hacia un futuro donde su impacto será aún más significativo.

A modo de cierre

Agradecemos sinceramente a cada uno de los miembros de las diversas subredes que han respondido al llamado y han participado activamente, tanto en la creación de la presentación que sirvió como base para este documento, como también en el evento del foro llevado a cabo durante el VI CIMTSK.

Expresamos nuestro agradecimiento a las ex coordinadoras del equipo de Chile de la Red MTSK, Diana Zakaryan (2015-2020) y Nielka Rojas González (2020-2023), quienes han desempeñado roles fundamentales en la construcción y buen desarrollo de equipo nacional. Actualmente, lidera la coordinación del equipo chileno la profesora Elisabeth Ramos Rodríguez de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Asimismo, felicitamos a Rosa Delgado Rebolledo quien a la fecha es coordinadora de la Temática 4 -Desarrollo del MTSK, y se ha desempeñado como presidenta del Comité Científico del VI CIMTSK, labores que dan visibilidad al equipo de Chile.

La red y cada subred enfrenta diversos obstáculos y desafíos (p.ej. compaginar el tiempo para coincidir en reuniones, buscar recursos financieros para proyectos), los cuales han ido superándose con el tiempo y seguirán avanzando para dar continuidad a los proyectos e investigaciones. Celebramos la apertura demostrada por cada subred chilena para promover la participación de otros miembros de la Red MTSK, provenientes de cualquier universidad y país, con el objetivo de seguir estableciendo lazos de amistad y colaboración investigativa, fortaleciendo cada subred en pos de la Red Iberoamericana MTSK.

Referencias

Ramos-Rodríguez, E., Rojas, N., Valenzuela, M. y Martínez, M. (2022). *Aportes teóricos a la formación de profesores desde tesis doctorales y su impacto en la educación matemática en Chile*. Octaedro.

MESA DE CIERRE: AVANCES Y OPORTUNIDADES DE INVESTIGACIÓN CON EL MTSK

Advances and research opportunities with the MTSK

Delgado-Rebolledo, R.[a], Reyes-Bravo, M.[b], Douglas, R.[c], Alencar, E. S.[d]

[a] Universidad de Concepción, Chile
[b] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
[c] Instituo Federal de São Paulo, Brasil
[d] Universidad Federal da Grande Dourados, Brasil

Resumen.
En este documento presentamos una síntesis de los trabajos expuestos en la sexta versión del Congreso Iberoamericano Sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. Para cada una de las temáticas del encuentro realizamos un análisis de las posibles tendencias de investigación e identificamos subgrupos de temas de interés. De acuerdo con lo anterior mostramos avances en el estudio del conocimiento especializado del profesorado de matemáticas y oportunidades de investigación en esta línea.

Palabras clave. Aplicaciones del MTSK, conocimiento de los formadores de profesores, MTSK en diferentes tópicos, desarrollo del MTSK, extensiones del MTSK.

Abstract.
In this document we present a summary of the works exposed in the sixth version of the Ibero-American congress about Mathematics Teachers´ Specialized Knowledge. For each one of the themes of the meeting we develop an analysis of possible research tendencies and identify subgroups of topics of interest. Following the above, we demonstrate advances in the study of the Mathematics Teachers´ Specialized Knowledge and research opportunities in this line.

Keywords. Applications of MTSK, Knowledge of teacher educators, MTSK in different topics and stages, Development of MTSK, Extensions of MTSK.

Delgado-Rebolledo, R., Reyes-Bravo, M., Douglas, R. y Alencar, E. S. (2023). Mesa de cierre: avances y oportunidades de investigación. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 351-355). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

El modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK, Carrillo et al., 2018) se ha consolidado como un referente teórico relevante en la investigación actual sobre el profesorado de matemáticas. En la sexta versión del Congreso Iberoamericano sobre MTSK (VI CIMTSK) se presentaron 37 comunicaciones y cuatro pósteres, de investigadores de nueve países, abarcando variados contenidos matemáticos y niveles escolares, así como contextos de formación inicial y continua de profesores.

Las comunicaciones y los pósteres presentados en el VI CIMTSK se distribuyeron en las cinco Temáticas de investigación que se desarrollan en la Red Iberoamericana MTSK. La Temática 1: Aplicaciones del MTSK en la formación de profesores y la Temática 5: Extensiones del MTSK son las que agrupan la mayor cantidad de contribuciones del encuentro (45% y 25% respectivamente). Por su parte, los estudios presentados en la Temática 2: Investigaciones sobre el formador de profesores de matemáticas corresponden al 12% de las contribuciones presentadas en el congreso, mientras que en la Temática 3: MTSK en distintos temas y etapas, y en la Temática 4: Desarrollo del MTSK se reporta una menor cantidad de contribuciones (13% y 5% respectivamente). A continuación, presentamos una síntesis de las comunicaciones y posters presentados en cada temática.

Temática 1: Aplicaciones del MTSK en la formación de profesores

En esta temática se presentaron 17 comunicaciones y dos posters cuyos contenidos se pueden clasificar en cinco grupos. En el primero de ellos, reunimos investigaciones en las que se usa el MTSK para el análisis, diseño y/o implementación de tareas formativas que abordan la modelización (Gamboa-Araya y Chavarría-Vásquez), el pensamiento espacial y métrico (Acevedo Rincón y Flórez Pabón), la inferencia estadística informal (Pascual y colaboradores) y los números racionales (Galleguillos y Ribeiro). Por su parte, en el trabajo de Campos-Cano y Flores-Medrano, las tareas formativas que se proponen están relacionadas con el desarrollo de la competencia *noticing*. Adicionalmente, algunos de los estudios sobre tareas también se refieren a la formación de los profesores de matemáticas para la inclusión, por ejemplo, al enfocarse en estudiantes con Síndrome de Asperger (Chico y colaboradores) o considerar la enseñanza de las matemáticas en el contexto rural (Barajas).

Además, encontramos estudios sobre el uso del MTSK para comprender actividades profesionales, como el diseño de clases (Advíncula-Clemente y colaboradores), la toma de decisiones didácticas en la enseñanza de la estadística (Lizarde y colaboradores), prácticas de enseñanza de contenidos geométricos (Villela y colaboradores), el trabajo en comunidades de aprendizaje profesional (Soto y colaboradores) y la práctica educativa (Ramos-Rodríguez y colaboradores). Estos trabajos ¬se desarrollan en el contexto de la formación continua, reflexionando sobre la importancia de la misma.
El siguiente grupo de investigaciones expone el uso del MTSK en el diseño de programas de formación de profesores de matemáticas de secundaria (Parra-Sandoval y Salas-Solano; Paz-Huamán y Ordoñez Montañez). En estos trabajos se señala la utilidad de considerar en los programas de formación los dominios y subdominios del MTSK. Otro grupo corresponde a investigaciones sobre la transformación del MTSK (Bustos-Tiemann y colaboradores; González-Arriagada y colaboradores). Finalmente, encontramos trabajos variados como aquellos que abordan el MTSK para la formación de profesores de infantil (Alencar y colaboradores) y el PCK de profesores en formación (Gazmuri-Sanhueza y Muñoz-Quezada) o usan el MTSK para el análisis de libros de texto (Batista y colaboradores).

Temática 2: Investigaciones sobre el formador de profesores de matemáticas

En esta temática se presentaron cinco comunicaciones que apuntan a caracterizar conocimientos de formadores de profesores. Reyes-Bravo y colaboradores identifican conocimientos especializados de un grupo de formadores de profesores de primaria en instancias en que ponen su foco en el futuro profesor y en el estudiante de primaria, lo que han denominado doble mirada del formador. Piñeiro y Calle, al entrevistar a formadores de profesores de educación especial con diferentes perfiles, identifican que estos ponen el énfasis de la formación en la fenomenología y la resolución de problemas siendo necesario acordar qué aspectos de la matemática y su enseñanza deberían contemplarse en la formación de profesores de educación especial. En el estudio de Coura y Passos se identifica subdominios del conocimiento didáctico del contenido de la formación que manifiesta una formadora en sus narrativas. Finalmente, dos trabajos indagan en conocimientos puestos en juego por formadores de profesores. Uno de ellos estudia qué conocimientos de los formadores favorecen el desarrollo de la identidad profesional de futuros profesores de secundaria (Ávalos-Rogel y colaboradores); mientras que el otro, describe el conocimiento de un grupo de formadores de profesores de primaria sobre la práctica profesional *noticing* (López y Reyes-Bravo).

Temática 3: MTSK en distintos temas y etapas

Cuatro comunicaciones y un póster fueron presentados en esta temática, que indagan en el MTSK de profesores de primaria (Sarmiento-Afanador), secundaria (Escudero-Domínguez y Yepes-Montoya) y universidad (Regiolini y Climent), abordando tópicos matemáticos como funciones (Vianna-Júnior y Moriel-Junior) y álgebra (Senhora y colaboradores).

En el estudio de Senhora y colaboradores los autores se enfocan en el MTSK que precisa un profesor de primaria para desarrollar actividades asociadas al pensamiento algebraico en relación con otros tipos de pensamiento matemático. Por su parte, los trabajos de Escudero-Domínguez y Yepes-Montoya, y Regiolini y Climent coinciden en reportar la notoriedad del conocimiento de los temas (KoT) de los profesores y sus relaciones con otros subdominios, como el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT). En esta misma línea, Vianna-Júnior y Moriel-Junior recopilan relaciones entre el KoT y el KMT identificadas en seis investigaciones sobre el MTSK de profesores de secundaria que enseñan funciones.

Temática 4: Desarrollo del MTSK

En esta temática se presentaron dos comunicaciones las cuales tienen el propósito de comprender relaciones en el MTSK y su posible aporte a la formación de los profesores de matemáticas. Así, Sánchez y colaboradores se centran en la ejemplificación como una práctica de enseñanza referida al uso de ejemplos con intención y atención consciente sobre aspectos críticos de los ejemplos. Los autores señalan la presencia de la ejemplificación en distintos subdominios del MTSK, lo cual releva la importancia de esta práctica para potenciar los procesos de enseñanza. Por su parte, Almonacid y colaboradores exponen relaciones en el MTSK de una futura profesora de matemáticas cuando reflexiona sobre la enseñanza de la función. Los autores resaltan la forma en que se conecta el conocimiento didáctico de la profesora.

Temática 5: Extensiones del MTSK

Nueve comunicaciones y un póster de esta edición del congreso trataron sobre las extensiones del MTSK, las cuales organizamos en tres grupos. En el primer grupo—investigaciones en el XTSK— se ubican los trabajos dedicados a la proposición de modelos del conocimiento del profesor de una disciplina o área de conocimiento distinta a las matemáticas (representada con X). Las investigaciones que construyen otros modelos inspirados en el MTSK suelen trabajar con disciplinas escolares, como la Biología, la Física o la Química. En este congreso, se percibe un cierto desapego de ese lugar común, pues se presentó una ponencia sobre el conocimiento del profesor de Electricidad (Vidal-Araya y Quiroga-Merino), otra del profesor que enseña Estadística (Vidal-Szabó y Estrella) y un póster sobre el conocimiento del profesor de matemáticas y tecnologías (Martins y colaboradores). Si bien la Electricidad y la Estadística están relacionadas con la Física y la Matemática, respectivamente, la primera comunicación se centra en el profesor que enseña en la formación técnica profesional, mientras que la segunda posiciona el conocimiento especializado del profesor que enseña Estadística, considerando la distinción entre Estadística y Matemática.

Otro grupo de trabajos lo desarrollan investigadores que utilizan el modelo MTSK en conjunto con otras teorías o constructos teóricos de la Educación Matemática que pueden ser usados para el estudio de fenómenos asociados tanto a los profesores como a los estudiantes. Más concretamente, estudios donde se usa el MTSK y el ETM - Espacio de Trabajo Matemático (Espinoza-Vásquez y colaboradores), y el MTSK y la teoría APOE - Acción, Proceso, Objeto y Esquema (De Los Reyes y colaboradores). Existe una preocupación constante por parte de los autores para que la integración de otros constructos teóricos no produzca incompatibilidades inevitables y, para ello, se percibe la creciente influencia de la denominada *Networking of Theories* (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2014) como soporte de investigaciones de este tipo.

Un último grupo de trabajos versó sobre el MTSK en relación con un referente teórico que también estudia al profesor de matemáticas, ya sea respecto a competencias profesionales como el *noticing* (Pinto y colaboradores; López y colaboradores), prácticas matemáticas pedagógicas (Delgado-Rebolledo y colaboradores), conocimiento interpretativo (Silva y Ribeiro) y procesos matemáticos propuestos en el currículo de infantil (Soares y colaboradores).

Comentarios finales

De acuerdo con lo que se ha presentado en las secciones anteriores, resaltamos el interés de la comunidad por utilizar el MTSK como referente teórico para investigar en la formación de profesores de matemáticas (Temática 1). Si bien, lo anterior tiene relación con que la gran parte de los investigadores de la Red Iberoamericana MTSK se desempeñan como formadores de profesores, consideramos que la razón principal para la presencia de numerosos estudios en esta temática es que la formación de profesores (inicial y continua) es el contexto más natural de aplicación del MTSK (Climent, 2023). Así, aunque en este VI CIMTSK predominaron los estudios que se desarrollaron con profesores en formación inicial, resaltamos el interés creciente por la investigación en la formación continua de los profesores de matemáticas lo cual es un avance respecto a los problemas abiertos y preguntas para la reflexión sobre el modelo que se discutieron en encuentros anteriores.

Por otra parte, el uso del MTSK para el análisis, diseño y/o implementación de tareas formativas ya se había identificado como una línea de estudio relevante en la investigación con el MTSK. En este congreso, la variedad de comunicaciones en las que se presentan tareas formativas es una muestra de avance en esta línea, sin embargo, es importante seguir profundizando en la conceptualización de tarea que se utiliza en estos trabajos y el papel del MTSK en la construcción e implementación de dichas tareas. En este sentido, surgen cuestionamientos relacionados con los formadores que implementan estas tareas y cómo su conocimiento o no del MTSK impacta en el desarrollo de la implementación y los resultados de la misma.

Adicionalmente, consideramos la importancia de seguir desarrollando estudios sobre el conocimiento de los formadores de profesores de matemáticas (Temática 2). En esta edición, se presentaron cinco comunicaciones aumentando en tres estudios respecto a la versión anterior del congreso realizado en 2021. Consideramos este aumento como una señal de interés en las investigaciones en esta temática, lo cual también se refleja en el hecho de que los estudios reportados presentan datos empíricos a diferencia de los trabajos anteriores que tenían una índole más teórica. A su vez, diversas interrogantes se abren a partir de las discusiones generadas en este congreso, por ejemplo, ¿cuál es el rol del MTSK en el conocimiento del formador de profesores de matemática?; ¿qué elementos podrían configurar el conocimiento de estos profesionales?; ¿cómo es —o debiese ser— el conocimiento de los formadores respecto del conocimiento de los profesores de matemática? Se espera contar con más espacios de debate sobre estos cuestionamientos emergentes. En esa línea, se ha posicionado, en esta instancia académica, la importancia de pasar de ser quienes investigan a ser posibles sujetos de estudio.

En cuanto a las investigaciones que se presentan en las Temáticas 3 y 4, estas en principio, utilizan el MTSK para caracterizar el conocimiento especializado de profesores de matemáticas, lo cual Moriel-Junior et al. (2022) denominan el uso ordinario del MTSK, sin embargo, vemos que estos trabajos también incluyen el establecimiento de relaciones en el MTSK de los profesores, señalando la potencialidad de las mismas tanto para la investigación como para la formación de profesores de matemáticas. Las relaciones en el MTSK han sido un tema de interés en el que se ha venido avanzando en sucesivos encuentros, a tal punto que nos cuestionamos si el establecimiento de relaciones podría considerarse parte del uso ordinario del MTSK y no un elemento adicional en el análisis. Consideramos además la sugerencia de Sosa et al. (2017) de que las relaciones entre subdominios de conocimiento podrían ser útiles para analizar situaciones de la práctica de aula de cara a su uso potencial como actividades de formación de maestros. Este uso de las relaciones en el MTSK es un elemento necesario de abordar en la investigación, desde el punto de vista teórico (qué son, de qué tipo son, y cómo podrían desarrollarlas los profesores) y metodológico (cómo identificarlas).

Finalmente, aunque la Temática 5 se denomina extensiones del MTSK diferenciamos los estudios sobre extensiones (XTSK) de aquellos en los que se usa el MTSK en conexión con otros referentes teóricos, pues consideramos que son trabajos de naturaleza distinta. Así, invitamos a continuar con el desarrollo de estudios en la línea del Networking of Theories con el propósito de abordar de manera más amplia las problemáticas asociadas al conocimiento del profesor y a su desarrollo profesional.

Referencias

Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (2014). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. Springer.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Climent, N. (2023). Construcción de conocimiento especializado en la formación de profesorado. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 9-19).

Moriel Junior, J., Escudero-Ávila, D., y Flores-Medrano, E. (2022). Producción MTSK en la Web of Science hasta 2020: Focos, abordajes, aporte complementares y alcances. En J. Carrillo, M. A. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 306–315). Dykinson.

Sosa, L., Contreras, L.C., Gómez-Chacón, I. Mª, Flores-Medrano E. y Montes, M.A. (2017). Síntesis, problemas abiertos, preguntas para la reflexión. En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 71-79). CGSE.

Actas

VI Congreso Iberoamericano sobre

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

8, 9 y 10 de Noviembre 2023

Valparaíso - Chile - 2023